VI-DEC (Vídeos Didácticos de Experimentos Científicos) Física

Fractales

Introducción

Un fractal es un elemento geométrico cuya estructura básica, aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas. Lo más común en la naturaleza (montañas, nubes, costas, etc.) es la irregularidad, no está formado por líneas o superficies lisas. Mandelbrot (matemático polaco, uno de los creadores de la geometría fractal) hizo estudios hacia 1970 de esta complejidad y encontró un gran orden. Los paisajes artificiales, nubes, fuegos, etc. se obtienen con los ordenadores y se usan constantemente en las películas. Además, los fractales constituyen un nuevo lenguaje para describir las formas del caos.

Fundamento teórico

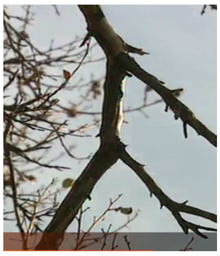
1. Fractales en la naturaleza

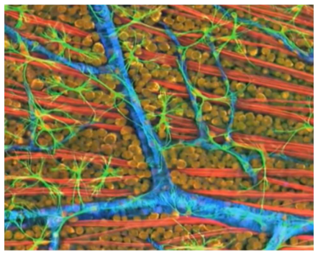
En la naturaleza se encuentran formas irregulares: las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son rectas, las cortezas de los árboles no son lisas y los rayos no se desplazan en línea recta. Todos ellos además tienen, dentro de su irregularidad, un orden asombroso.




La geometría fractal es una herramienta para explorar la naturaleza. El primer problema que plantean los objetos fractales es determinar su longitud o su superficie.

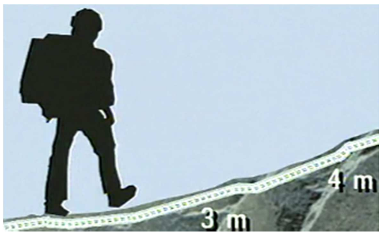
Las ramas de un árbol, las hojas de un helecho, las arterias y las venas, al verlas más de cerca, repiten las irregularidades y son semejantes al modelo anterior. Esta propiedad se llama autosemejanza o autosimilitud.

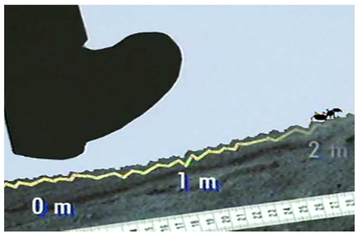





2. Los fractales y las escalas

Un excursionista y una hormiga encuentran obstáculos similares al subir una montaña. Para el excursionista bordear una roca es lo mismo que para la hormiga bordear un grano de arena. La longitud recorrida por el hombre a escala de 1 m (paso de un hombre) es mucho menor que la de la hormiga a escala de 1 mm (paso de una hormiga) con tantas subidas y bajadas.

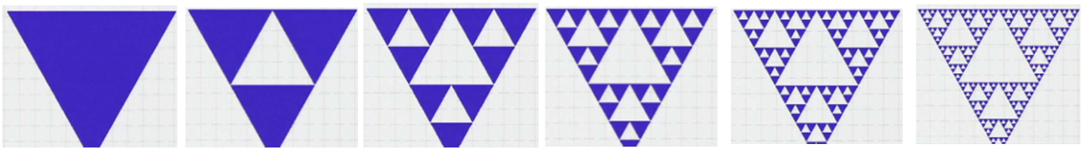


3. Formas fractales

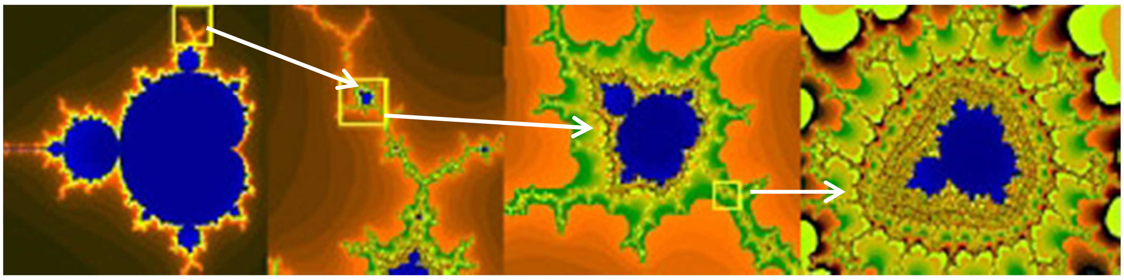
Entre 1875 y 1925, unos matemáticos comenzaron a crear formas que no existían, las llamaron monstruos matemáticos. Estos eran fáciles de obtener mediante un simple proceso de iteración, es decir, repitiendo un mismo proceso al resultado obtenido de la etapa anterior.

El triángulo de Sierpinski se obtiene uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero. Se repite el proceso en los 3 triángulos que quedan y así indefinidamente. Cada una de sus partes mantiene la misma apariencia (autosimilitud).

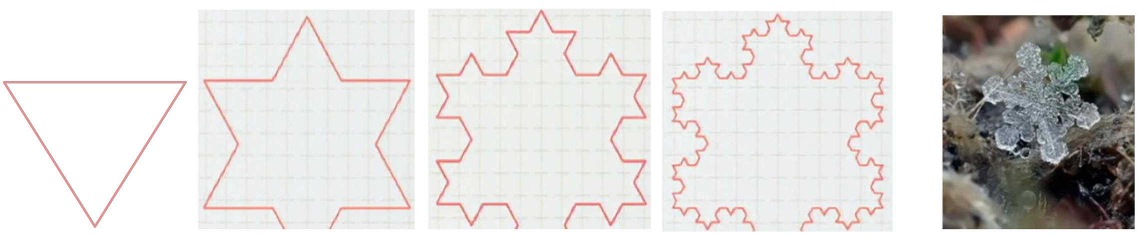
En la geometría clásica, los objetos tienen dimensiones enteras. Una cuerda tiene dimensión 1, un polígono tiene dimensión 2 y un poliedro tiene dimensión 3. En la geometría fractal las figuras tienen dimensiones fraccionarias, como el triángulo de Sierpinski que tiene infinitos agujeros, con área 0 y dimensión fractal 1,58.



Este proceso de iteración se puede aplicar, bien a objetos geométricos o a números (los reales representan puntos en una línea y los complejos puntos en un plano) mediante funciones sencillas. Se hacen millones de veces las mismas operaciones, donde el dato de partida de cada paso es el obtenido en el paso anterior. Al aparecer los ordenadores, Mandelbrot resolvió estos problemas matemáticos y acuñó el término de fractales. Con leyes muy simples obtuvo maravillas, formas complicadas y armoniosas, que aparecen una y otra vez, como el conjunto que lleva su nombre a partir de la conocida forma recursiva: $Z_{n+1} = Z^2_n + C$.



Otro ejemplo es la curva de Koch, llamada copo de nieve por su apariencia con el natural. Se parte de un triángulo equilátero, de cada de uno de sus lados quitamos la tercera parte del centro y levantamos sobre ella otro triángulo. Repetimos el proceso indefinidamente. Con unos pocos pasos encontramos una curva extraña con autosimilitud. El contorno es intrincado, la longitud entre dos puntos es infinita, sin embargo, la curva encierra una superficie finita (1,6 veces la del triángulo original) y tiene de dimensión fractal 1,26.

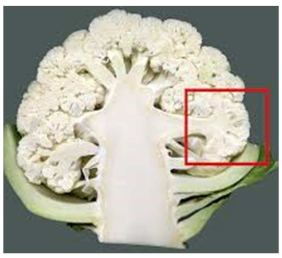


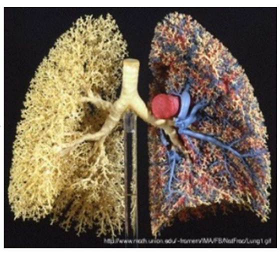
4. Dimensión fractal de formas de la naturaleza

La longitud de una costa, muchas veces irregular, es mayor cuanto más de cerca la medimos. Las curvas fractales han permitido medir la longitud de la costa mediante su dimensión fractal, entre 1 y 2, según la curva a la que se asemeje.

Por procedimientos análogos y utilizando superficies fractales, se puede determinar el nivel de rugosidad de la superficies de los planetas. Así, la superficie terrestre tiene una dimensión fractal de 2,1 y la de Marte 2,4. Esto quiere decir que Marte es más accidentado que la Tierra.

Una coliflor (o un brócoli) es, complicada a la vez que simple, fácil de pesar y difícil de medir su superficie. Si cortamos con un cuchillo un cogollo y lo observamos por separado, tenemos una coliflor entera, pero más pequeña. Y si la cortamos nuevamente, una y otra vez, siguen apareciendo coliflores cada vez más pequeñas. Si quiero saber cuál es la superficie de una coliflor, tengo que medir y medir, ya que esta superficie resulta más grande cuanto más me acerco a tamaños más pequeños de este vegetal. Su superficie tiene de dimensión fractal entre 2 y 3. Lo mismo sucede al pulmón, pesa muy poco, pero el área que presenta al intercambio del oxígeno es inmensa. Los bronquios se ramifican, una y otra vez, antes de llegar a los alveolos.

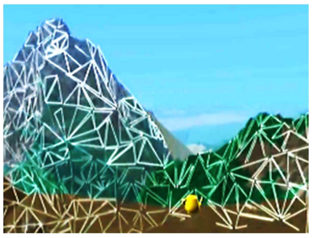




5. Funciones fractales

Entre 1980 y 2000, algunos matemáticos e informáticos, se dedicaron a iterar funciones. Obtuvieron multitud de figuras fractales, muchas de ellas nos recuerdan a objetos de la naturaleza, como la hoja de helecho, el fuego o los paisajes, que son utilizados constantemente en las películas, como Star Wars.





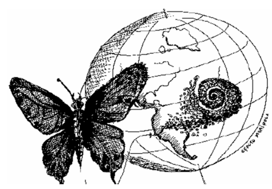

6. Fenómenos caóticos en la naturaleza

El universo está compuesto de muchos sistemas que se comportan de forma caótica. Las llamas de una hoguera, el humo, las olas del mar, el agua de un arroyo o de una cascada son manifestaciones cotidianas del caos. La ciencia busca el orden dentro del caos.

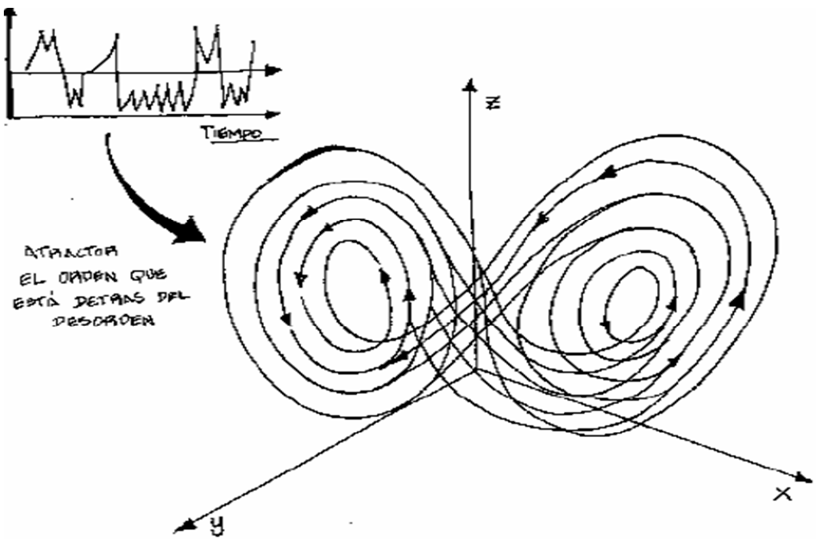
Cuando en 1687 Newton publica los principios matemáticos y su famosa ley de la gravitación universal, demuestra que la naturaleza posee unas leyes matemáticas y el ser humano es capaz de encontrarlas.

A principio del siglo XX coexistían dos paradigmas científicos: 1) El determinista, que se aplicaba a sistemas simples con pocas partículas y utilizaba ecuaciones diferenciales y 2) El estadístico, que se aplicaba a sistemas complejos formados por muchas partículas con muchos grados de libertad en el que reina el azar. Lo que nadie podía sospechar es que sistemas simples formados por muy pocas partículas pudieran tener un comportamiento caótico. Se pensaba que el universo se comportaba como un mecanismo de relojería y que las ecuaciones diferenciales podían predecir el estado de un sistema conociendo las condiciones iniciales. Estas ecuaciones permiten medir la órbita de la Tierra o predecir eclipses, pero son incapaces de determinar el estado de las partículas de gas encerradas en un globo o de las miles de gotas que forman un torrente. Esto se conoce globalmente con datos estadísticos, pero no sabemos qué va a hacer cada uno de los componentes.

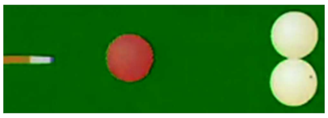
En 1960 Lorenz desarrolló un modelo matemático para realizar previsiones del tiempo. Este era muy simple, con solo tres variables (velocidad del viento, presión atmosférica y temperatura, que rigen el movimiento de convección) relacionadas entre sí mediante tres ecuaciones diferenciales. Lorenz puso a trabajar el ordenador. Cada minuto simulaba el paso de un día. Con sorpresa comprobó que, con una diferencia de menos de una milésima en una de las variables, al cabo de unos días en la simulación, producía un estado climático totalmente distinto. Se llama “Efecto mariposa”: el aleteo de una mariposa en Japón puede provocar dentro de unos meses un huracán en estados Unidos. Había descubierto la característica de los fenómenos caóticos, una pequeña variación de las condiciones iniciales produce una gran variación en el sistema a lo largo del tiempo. Esto indica que los comportamientos caóticos son impredecibles a largo plazo.

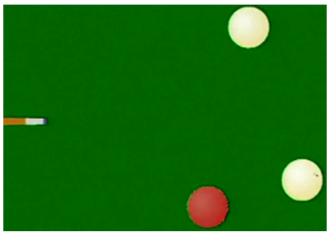


Pero incluso en los fenómenos caóticos aparecen ciertas regularidades. Este orden se investiga mediante el espacio de fases del sistema. Cada punto representa al sistema en su conjunto en cada instante de tiempo. En este sistema aparecen los atractores, como la Mariposa de Lorenz. Un atractor es un conjunto de valores numéricos hacia el cual un sistema tiende a evolucionar, en una amplia variedad de condiciones iniciales.



Los sistemas caóticos aparecen en los lugares más dispares, como en la evolución de una epidemia, el desarrollo de una población de una determinada especie, las reacciones de la bolsa y de la economía en general, la atmósfera, y hasta en el sistema solar. Newton no podía sospechar el hecho demostrado por el matemático francés Poincaré, a principios del siglo XX, que un sistema formado solo por tres cuerpos es caótico, como se puede comprobar en el juego del billar.





7. Relación entre el caos y los fractales

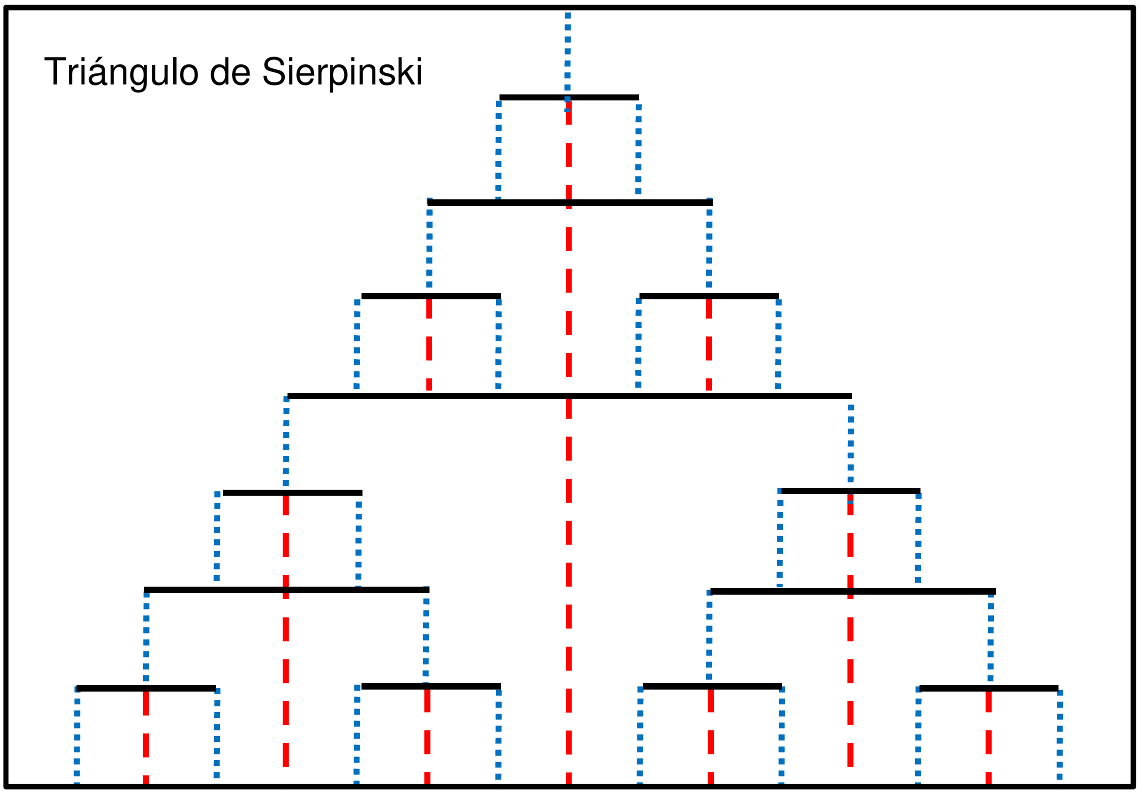
Desde su nacimiento, hacia 1960, el caos y los fractales no parecían estar relacionados, pero los dos son similares matemáticamente, ambos buscan la estructura profunda de la irregularidad. Los fractales constituyen un nuevo lenguaje para describir las formas del caos, la cara más frecuente de la naturaleza.

Realización práctica:

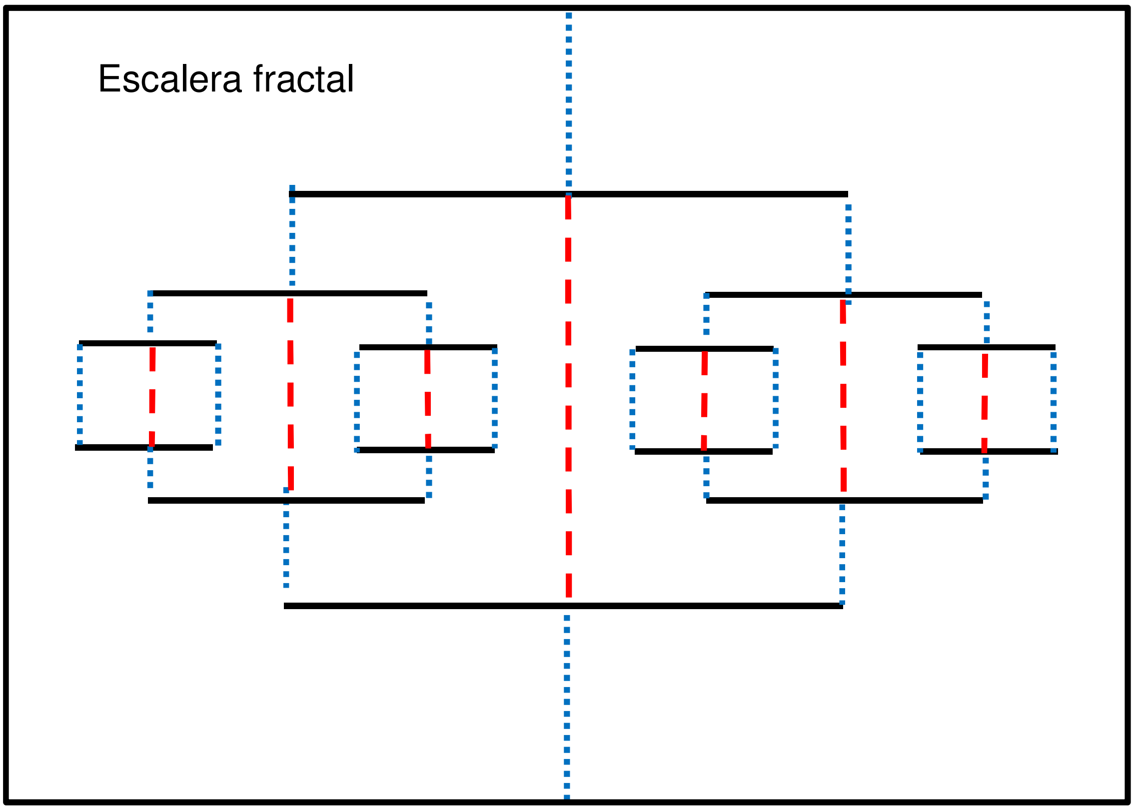
Construir en 3D con papel los fractales conocidos como:

- El triángulo de Sierpinski
- La escalera fractal
- El peine de Cantor

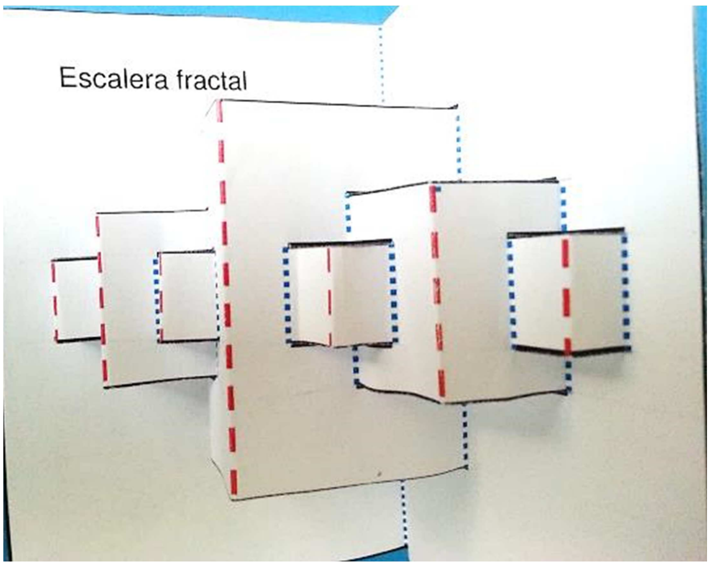
Para ello hay que recortar las plantillas, que se dan a continuación, por las líneas continuas gruesas, doblar hacia fuera por las discontinuas y doblar hacia el interior por las líneas punteadas.

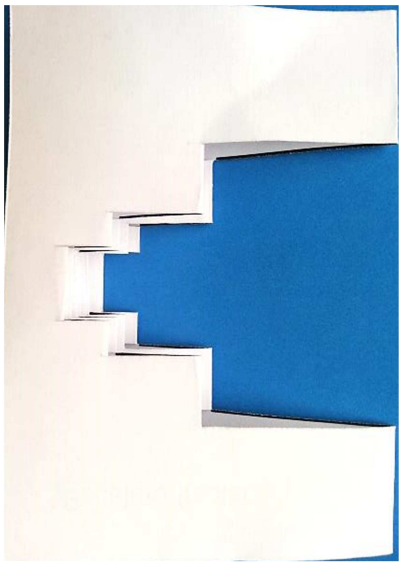


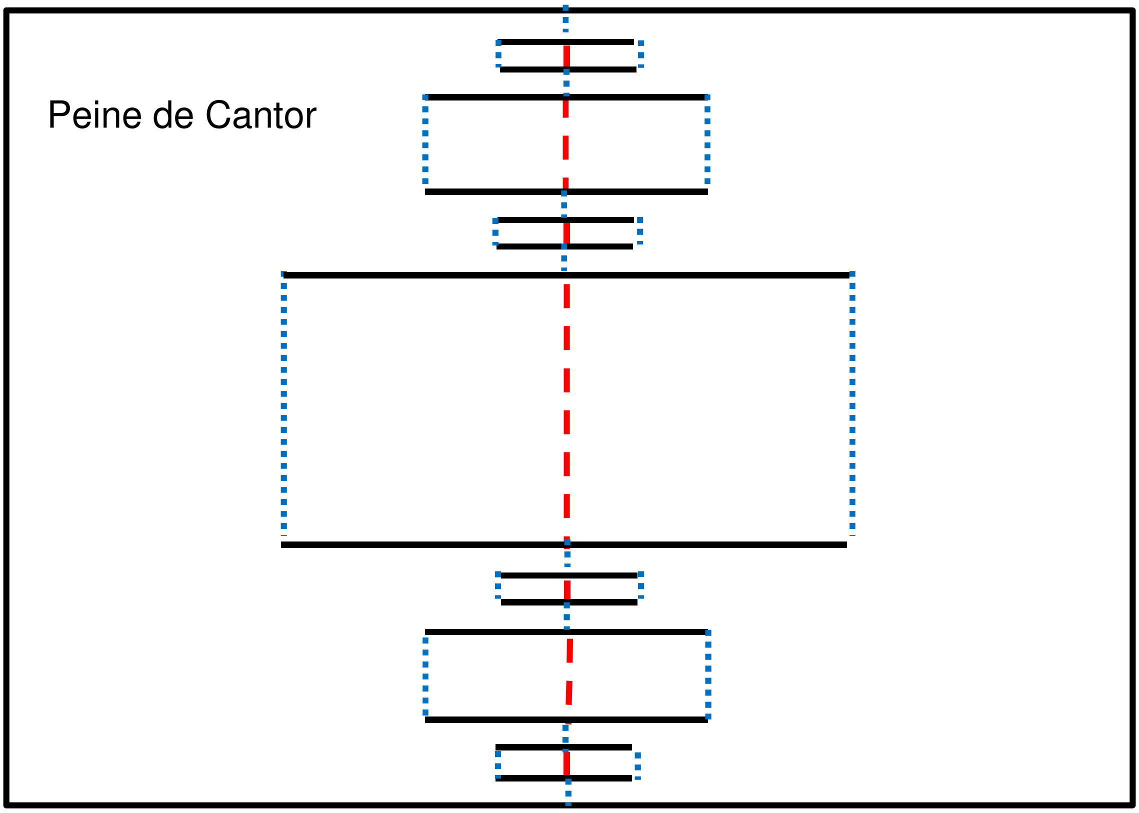
La figura que resulta se muestra abierta y cerrada:



La figura que resulta se muestra abierta y cerrada:







La figura que resulta se muestra abierta y cerrada: