VI-DEC (Vídeos Didácticos de Experimentos Científicos)
Física

DANZA DE LOS PÉNDULOS

SUMARIO

I. RESUMEN Y OBJETIVO

El fenómeno conocido como esferas danzantes o danza de péndulos consiste en el efecto óptico que se produce en un juego de péndulos simples de longitudes diferentes y no acoplados, cuando se dejan libres partiendo de la misma posición lateral. Los péndulos dibujan una serie de ondas que cambian en el tiempo para repetirse al terminar cada ciclo.

En este artículo se describen las características que un conjunto de péndulos tiene que cumplir para que se produzca la *danza de péndulos.* Se estudian, en detalle, las simetrías que se producen en varios ejemplos de oscilación y se generaliza a un modelo que cualquiera desee construir. En la introducción se resumen los conceptos básicos de física general, necesarios para iniciar a cualquier persona en la comprensión de este fenómeno como son: Efecto óptico, Comportamiento colectivo o, en conjunto, Movimiento armónico simple y Onda armónica. Además, se presentan unos gráficos, donde se ven las posiciones de cada péndulo, según el número de oscilaciones que realiza desde el inicio de la danza. El tratamiento didáctico de este fenómeno que aquí se hace, permite acercar el estudio de oscilaciones y ondas a un público no experto.

Se puede ver esta danza con música en el **vídeo 1**. (Hacer clic sobre el recuadro para verlo). Al observar el movimiento, el cerebro trata de sincronizar la música con el movimiento de los péndulos, realzando su belleza.

II. CONCEPTOS BÁSICOS

II.1 Introducción

El estudio de las oscilaciones y las ondas es apasionante, ya que se presentan en la naturaleza en múltiples aspectos: los átomos, el sonido, los emisores y receptores de radio o al tirar una piedra al agua.

En este artículo se van a abordar las oscilaciones que se visualizan periódicamente en un conjunto de péndulos de distintas longitudes.

La parte de la física teórica de este comportamiento ha sido explicada con detalle en el artículo [1] y ha sido ampliamente utilizada por muchos autores sobre todo en internet, como puede verse por ejemplo en [2, 3 y 4]. No obstante, las múltiples preguntas que muchas personas hacen a los autores muestran que no lo llegan a entender en profundidad. A ellas van dirigidas las explicaciones de este artículo, con la ilusión de hacer más comprensiva la observación de tanta belleza como aparece en este curioso experimento.

Estos péndulos no acoplados (independientes unos de otros) producen el efecto óptico de ondas que cambian con el tiempo. Se dice efecto óptico, ya que estas ondas no transportan energía, como realmente lo hacen las ondas, por ejemplo las olas del mar al llegar a la costa. Este es un ejemplo de comportamiento colectivo que se presenta cuando una señal continua es examinada sólo en puntos concretos de su eje.

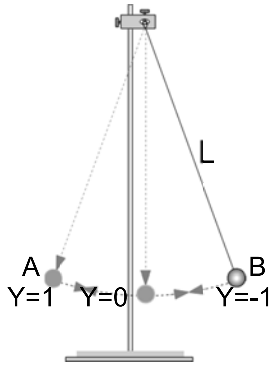
Otro ejemplo de comportamiento colectivo es el efecto estroboscópico. En este caso el movimiento colectivo surge cuando una señal continua es examinada en determinados momentos discretos del tiempo. El efecto óptico se produce al iluminar mediante destellos un objeto que se mueve de una forma rápida y periódica. El objeto se ve en movimiento lento, hacia adelante o hacia atrás, según la frecuencia de destellos sea inferior o superior a la del movimiento del objeto. Ver el **vídeo 2**. Esto se observa, a veces, cuando visualizamos en el cine el movimiento de las ruedas de los trenes o coches.

Los dibujos animados y el cine son escenas sucesivas en periodos inferiores a una décima de segundo, que es lo que el ojo humano necesita para detectar dos escenas separadas. Así, la visión humana ve un movimiento continuo en lo que son escenas movidas unas respecto de otras.

Estos efectos ópticos no tienen posibilidad de dar información de la función continua que subyace a lo largo de todos los puntos del eje en el caso de los péndulos, o en cada uno de los instantes, en el caso del movimiento del objeto.

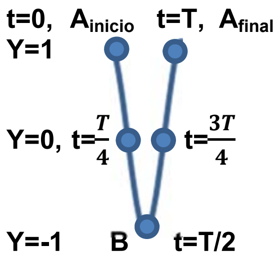
II.2 Definiciones

Oscilación. Es el movimiento repetido de un péndulo en torno a su posición de equilibrio. Consideramos que es un movimiento armónico simple y que se realiza sobre el eje Y. El recorrido de una oscilación completa consiste en ir desde una posición extrema, A (Y=1), a la otra, B (Y=-1), y volver a la primera, A (Y=1), pasando dos veces por la posición central (Y=0).



Periodo T. Es el tiempo que tarda el péndulo en realizar una oscilación o ciclo.

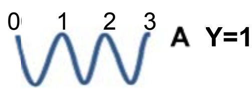
Fase. Es cada una de las posiciones que puede tomar el péndulo en una oscilación completa. Se muestran algunos ejemplos para distinguir las diferentes fases. En las figuras se han separado los recorridos de ida y vuelta. Se muestran las fases para:



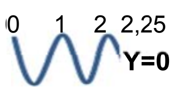
- **t=0**, el péndulo está en A, inicio del ciclo: A_{inicio}, Y=1
- **t=T/4**, el péndulo ha recorrido 1/4 del ciclo, está en Y=0
- **t=T/2**, el péndulo ha recorrido 1/2 ciclo, está en B, Y=-1
- **t=3T/4**, el péndulo ha recorrido 3/4 del ciclo, está en Y=0
- **t=T**, el péndulo está en A, final del ciclo: A_{final}, Y=1

Se ponen también ejemplos para ver las posiciones y las fases en las que se encuentra el péndulo según las oscilaciones realizadas.

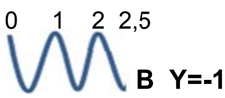
Cuando un péndulo hace un **nº entero** de oscilaciones completas: siempre se encontrará en **A**, **Y=1**. Aquí ha realizado 3 oscilaciones.



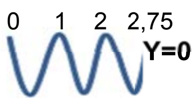
Cuando un péndulo hace un **nº entero** de oscilaciones completas **más un cuarto (1/4)** de oscilación, siempre se encontrará en **Y=0**. Aquí ha realizado 2,25 oscilaciones.



Cuando un péndulo hace un **nº entero** de oscilaciones completas **más media (1/2)** oscilación, siempre se encontrará en **B**, **Y= -1**. Aquí ha realizado 2,5 oscilaciones.



Cuando un péndulo hace un **nº entero** de oscilaciones completas **más tres cuartos (3/4)** de oscilación, siempre se encontrará en **Y= 0**. Aquí ha realizado 2,75 oscilaciones.



II.3 Relación entre la longitud y el periodo de un péndulo

Esta es: $L=\frac{gT^2}{4\pi^2}$ donde g es la aceleración de la gravedad g=9,8 m/s^2

y L es la distancia entre el centro de gravedad del péndulo y el punto de sujeción.

Despejando L y poniendo los valores de g y π se obtiene $L(m)=0{,}248T^2$ y $T(s)=2{,}007\sqrt{L(m)}$

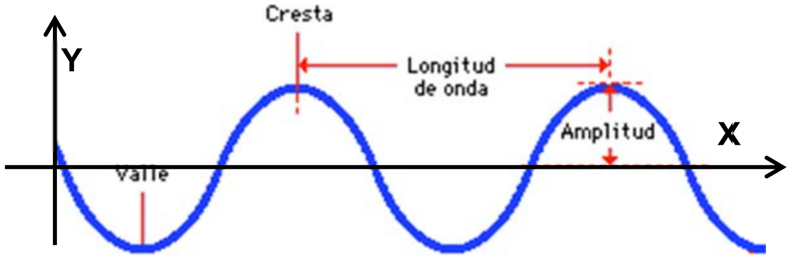
La relación entre L y T de dos péndulos, 1 y 2 es: $\frac{L1}{L2}=\left(\frac{T1}{T2}\right)^2$

Para L1=1 m y L2=0,25 m aproximadamente se obtiene: T1=2 s y T2=1 s

II.4 Onda armónica.

Se dice que una onda es armónica cuando todos sus puntos hacen un movimiento armónico simple. Esta onda es periódica:

- En el **tiempo**. Cada péndulo tiene su periodo, T, o tiempo de la oscilación completa.
- En el **espacio**. Longitud de onda, λ, es la distancia mínima entre dos puntos en fase, por ej. entre dos crestas.



III. ESTUDIO SOBRE LA DANZA DE LOS PÉNDULOS

III.1 Condiciones que deben cumplir los péndulos para que se origine la danza

Estar separados entre sí una misma distancia d. Este valor es arbitrario. Se puede elegir el mínimo, para que los péndulos no choquen entre sí.

Hacer un número entero consecutivo de oscilaciones, N+n (n=0,1, 2,… hasta un número arbitrario), en un tiempo **T** (ciclo de la danza). Este tiempo **T** tiene que ser significativamente mayor que el periodo de cada péndulo individual. Fijados los valores N y **T**, queda definida cómo va a ser la danza. A cada péndulo le corresponde:

Periodo: $T_n=\frac{\boldsymbol{T}}{N+n}$, Longitud: $L_n(cm)=24{,}8xT_n^2$ Posición: $x_n=n.d$

III.2 Estudio de las simetrías que se producen en un primer ejemplo

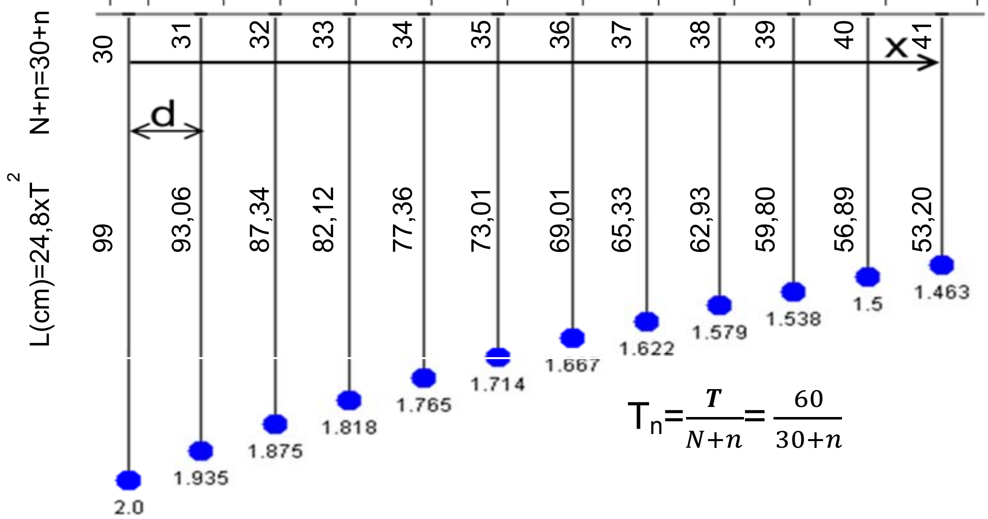
Para este estudio se ha elegido: N=30, **T**=60 s, d=3,5 cm, se utilizan 12 péndulos y cada péndulo se designa con el valor de "n" que le corresponde.

Se describen los datos de interés en tres de estos péndulos.

- El primer péndulo, n=0, hace N+n=30 oscilaciones en **T**=60 s, su periodo es T_0=**T**/N=60/30=2 s, está situado en x_0=0x3,5=0 cm y es el más largo L(m)=0,248T^2=0,99 m=99 cm.
- El segundo, n=1, hace N+n=31 oscilaciones en **T**=60 s, su periodo es T_1=**T**/(N+n)=60/31=1,935 s, está situado en x_1=1x3,5=3,5 cm y L(m)= 0,248T^2=0,93 m=93 cm.
- El 12º, n=11, hace N+n=41 oscilaciones en **T**=60 s, su periodo es T_{11}=**T**/(N+n)= 60/41=1,463 s, está situado en x_{11}=11x3,5=38,5 cm y es el más corto L(m)=0,248T^2=0,53 m=53 cm.

En el esquema siguiente se resumen los datos de cada péndulo

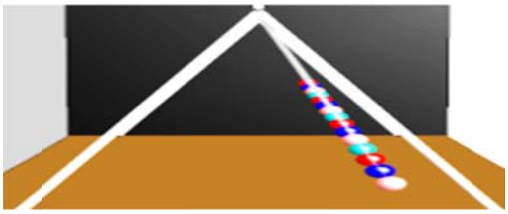
Nombre (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Posición en cm: (x_n=n.d)	0	3,5	7	10,5	14	17,5	21	24,5	28	31,5	35	38,5



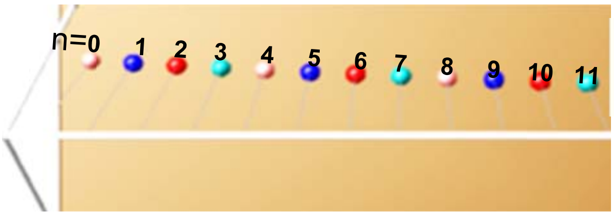
$$T_n=\frac{T}{N+n}=\frac{60}{30+n}$$

Al analizar la evolución temporal del sistema, aparecen simetrías producidas por la fase en que se encuentra cada péndulo. La fase está relacionada con el número de oscilaciones realizadas. Al separarlos de su posición de equilibrio y soltarlos a la vez, todos los péndulos inician sus movimientos en fase, instante llamado t=0 s, pero enseguida se desfasan por sus distintos periodos de oscilación. Después de un tiempo **T** (ciclo de la danza), todos han realizado un número entero de oscilaciones, N+n, y vuelven a estar todos de nuevo en fase, como para t=0 s, listos para repetir la danza.

Pintamos los 12 péndulos con 4 colores: - Rosa para n=0, 4 y 8. - Azul para n=1, 5 y 9. - Rojo para n=2, 6 y 10. -Verde para n= 3, 7 y 11.



Péndulos vistos de costado



Péndulos vistos desde arriba

La selección de tiempos se ha hecho en base a las simetrías que se producen entre la primera y la segunda mitad de la danza y se muestra a continuación:

A1) Inicio de la danza **A2) Final**

B1) Un cuarto **B2) Tres cuartos**

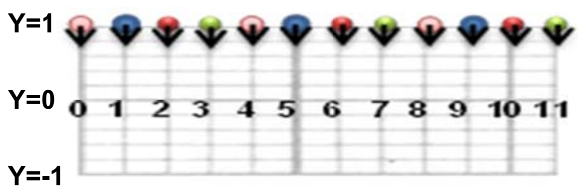
C1) Un tercio **C2) Dos tercios**

Mitad

	A1)	B1)	C1)	D)	C2)	B2)	A2)
t(T) (s)	 0	T/4 15	T/3 20	T/2 30	2T/3= T(1-1/3) 40	3T/4= T(1-1/4) 45	T 60
λ	∞	4d	3d	2d	3d	4d	∞

III.2.1 Simetría para A1) inicio y A2) final de la danza

A1) En el **inicio** de la danza, t=0 s, los péndulos han hecho 0 oscilaciones, todos ellos están separados de la posición de equilibrio, la máxima amplitud positiva, Y=1, cuando se miran desde arriba.



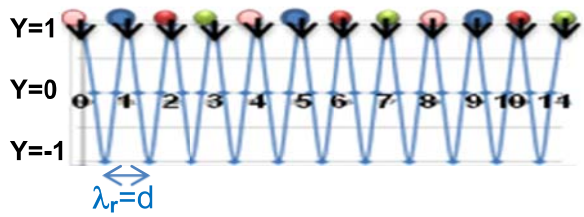
A2) En el **final** de la danza, t=**T**=60 s, todos los péndulos han hecho un número entero de oscilaciones, como se muestra en la tabla:

Péndulo (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nº osc. en 60 s (30+n)	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41

Se distinguen dos tipos de ondas:

Onda "visual", la que dibujan los péndulos. Todos ellos están en una horizontal, Y=1, como para t=0 s. Su longitud de onda es $\lambda_v=\infty$.

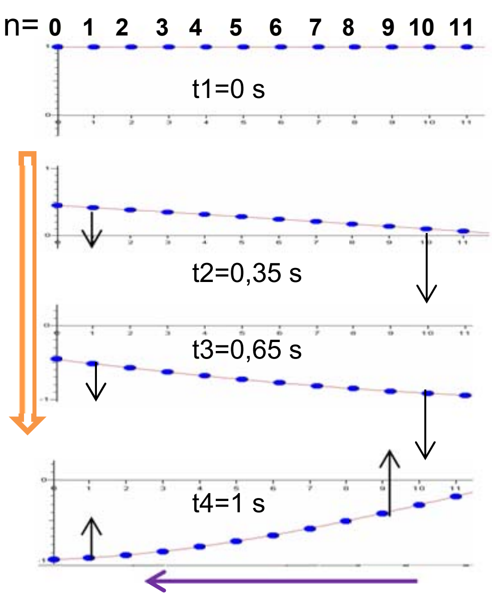
Onda "real" es la que dibujarían los péndulos si estuvieran colocados de forma continua, en vez de estar en posiciones discretas, separados una distancia, d, entre ellos. A cada uno de ellos le separa del otro una oscilación completa. La longitud de esta onda "real" es λ_r=d.



A continuación se muestran 4 secuencias durante el **primer segundo** desde el inicio y otras 4 simétricas durante el **último segundo** del final de la danza. Observar que en 1 s el péndulo n=0 con T_0=2 s hace media oscilación de t1 a t4 al inicio o de t5 a t8 al final. Por ejemplo, para t2=0,35 s y para t7=59,65 s, los péndulos tienen posiciones iguales, pero sus movimientos están invertidos.

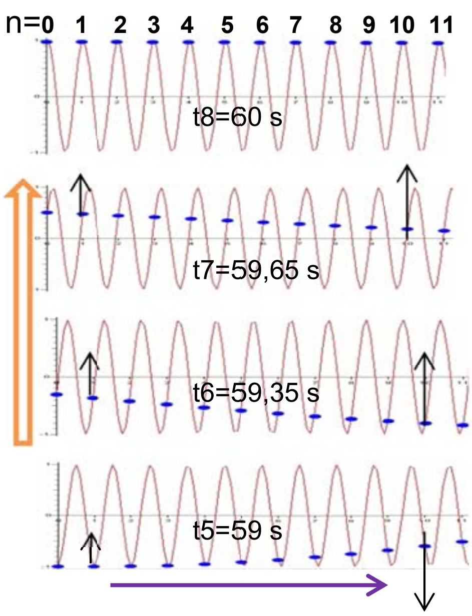
A1) Inicio de la danza.

El péndulo n=0, el de mayor periodo, se mueve más lento que el siguiente, n=1, y por tanto va detrás de él. El conjunto es como una onda que avanza hacia la izda. Primero baja la parte dcha. y luego la izda.



A2) Final de la danza

El péndulo n=0 va retrasado respecto al n=1, va más lento y detrás de él. El conjunto es como una onda que avanza hacia la dcha. Primero sube la parte dcha. y luego la izda.



Se pueden relacionar los avances de estas ondas con los de las olas del mar.

En A1) de t1 a t 4 va hacia la izda.

En A2) de t5 a t8 va hacia la dcha.

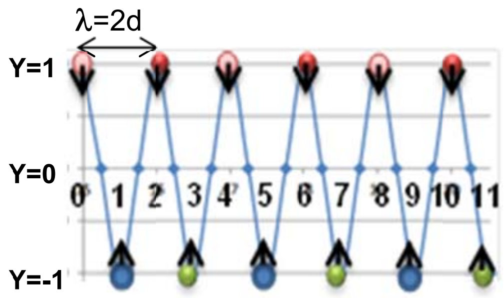
III.2.2 Simetría para D) antes y después de la mitad de la danza

En la mitad de la danza a **T**/2=60/2=30 s, los péndulos han hecho (N+n)/2 oscilaciones, como se muestra en la tabla:

Péndulo (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nº osc. en 30 s (15+n/2)	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5	20	20,5

<u>Cada péndulo se separa ½=0,5 oscilación del siguiente</u>.

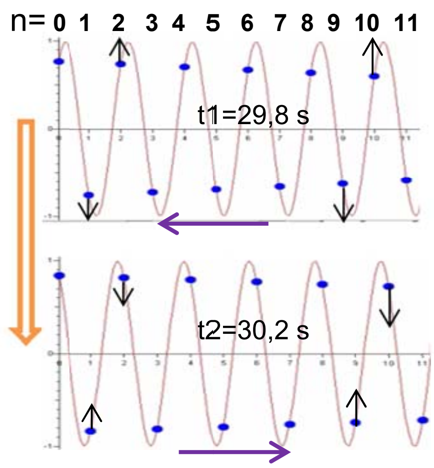
Los péndulos que hacen un número par de oscilaciones en **T**=60 s, hacen un número entero de oscilaciones en **T**/2=30 s, se encuentran arriba en Y=1, y los que hacen un número impar de oscilaciones en **T**=60 s, hacen un número entero más media oscilación en **T**/2=30 s, se encuentran en Y=-1. Alternativamente están en Y=1 e Y=-1. La longitud de onda es de 2d.



Se muestra la simetría entre t1=29,8 s y t2=30,2 s. O sea 0,2 s antes y 0,2 s después de la mitad de la danza.

Se forman dos ondas independientes con los péndulos alternativos y movimientos inversos, en t1 se separan y en t2 se acercan. (La parte izquierda va siempre más despacio que la derecha).

En t1 estas dos ondas van hacia la izda. y en t2 van hacia la dcha.



III.2.3 Simetría para B1) un cuarto y B2) tres cuartos de la danza

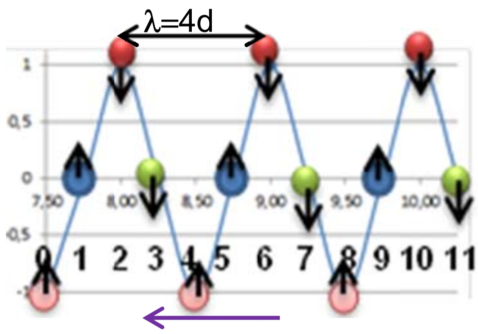
B1) En **un cuarto de la danza** a **T**/4=60/4=15 s, los péndulos han hecho (N+n)/4 oscilaciones, como se muestra en la tabla:

Péndulo (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nº osc. en 15 s (7,5+n/4)	7,5	7,75	8	8,25	8,5	8,75	9	9,25	9,5	9,75	10	10,25

Cada péndulo se separa ¼=0,25 de oscilación del siguiente.

El péndulo n=0 ha hecho 7 más media oscilación, se encuentra abajo en Y= -1. El n=1 ha hecho 7 más 3/4 de oscilación y se encuentra en Y=0. El n=2 ha hecho 8 oscilaciones, se encuentra arriba en Y=1.

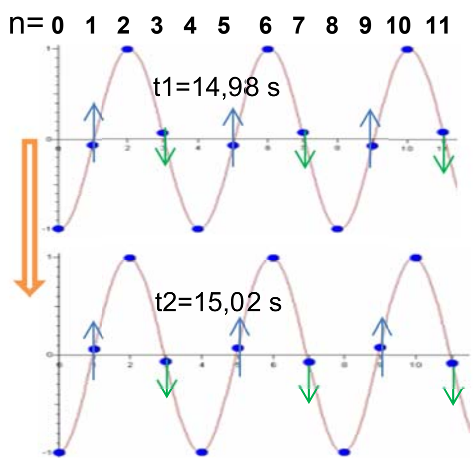
En **T**/4=15 s, se puede ver que el conjunto de los 12 péndulos es una onda con 3 crestas que avanza hacia la izquierda, con longitud de onda 4d.



Como es lógico, al observar a t=**T**/z cada péndulo se separa 1/z de oscilación del siguiente y la longitud de onda es λ=zd. Se necesitan z+1 péndulos entre una cresta y otra. En este caso: z=**4**.

Al mismo tiempo se pueden ver z=4 ondas independientes con los tres péndulos que están en la misma fase y con el mismo color.

- Los rojos están en Y=1 para empezar a bajar.
- Los rosas están en Y=-1 para empezar a subir.
- Los azules (suben) y los verdes (bajan) están en Y=0.



A continuación se muestran 2 secuencias: para 0,02 s antes y 0,02 s después de un cuarto de la danza.

- En t1=14,98 s, los péndulos azules y verdes se van aproximando a Y=0 y
- En t2=15,02 s, se van alejando.

B2) En **tres cuartos de la danza** a 3**T**/4=3x60/4=45 s, los péndulos han hecho 3(N+n)/4 oscilaciones, como se muestra en la tabla:

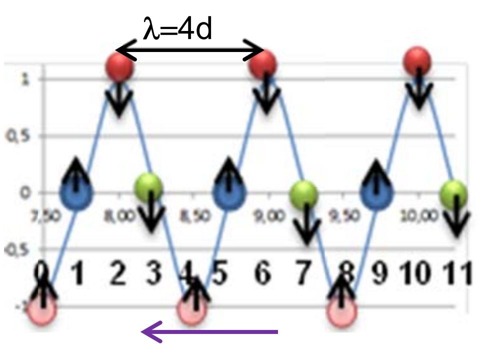
Péndulo (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nº osc. en 45 s (22,5+3n/4)	22,5	23,25	24	24,75	25,5	26,25	27	27,75	28,5	29,25	30	30,75

Cada péndulo se separa 3/4=0,75 de oscilación del siguiente.

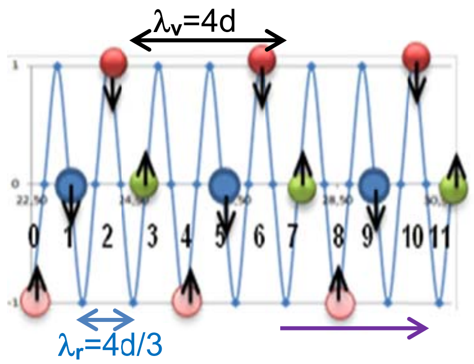
El péndulo n=0 ha hecho 22 más media oscilación, se encuentra abajo en Y=-1. El n=1 ha hecho 23 más ¼ de oscilación, se encuentra en Y=0. El n=2 ha hecho 24 oscilaciones, se encuentra arriba en Y=1.

En los dibujos se muestra las simetrías entre B1) y B2):

B1) t=**T**/4



B2) t=3**T**/4

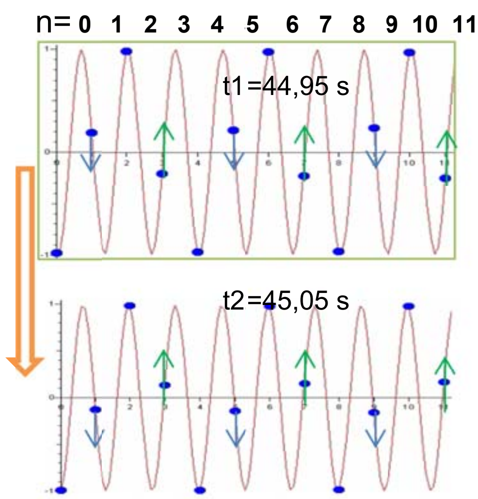


Los péndulos ocupan las mismas posiciones en B1) y B2), tienen la misma onda "visual" de longitud de onda 4d, pero se invierten los movimientos. Las bolas que suben o bajan en B1, bajan o suben en B2.

La longitud de la onda "real" en B2 es λ_r=4d/3.

Se pueden ver en B2 ondas similares a las de B1:

- En t1=44,95 s los péndulos azules y los verdes se van aproximando a Y=0 y
- En t2=45,05 s se van alejando.



III.2.4 Simetría para C1) un tercio y C2) dos tercios de la danza

C1) En un **tercio de la danza** a **T**/3=60/3=20 s, los péndulos han hecho (N+n)/3 oscilaciones, como se muestra en la tabla:

Péndulo (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nº osc. en 20 s (10+n/3)	10	10,33	10,66	11	11,33	11,66	12	12,33	12,66	13	13,33	13,66

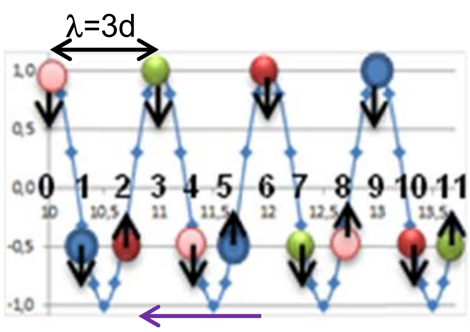
<u>Cada péndulo se separa 1/3=0,33 de oscilación del siguiente</u>.

El péndulo n=0 ha hecho 10 oscilaciones, se encuentra arriba en Y=1. El n=1 ha hecho 10 más 1/3 de oscilación, se encuentra por debajo de Y=0, bajando. El n=2 ha hecho 10 más 2/3 de oscilación, se encuentra por debajo de Y=0, subiendo.

El conjunto de los 12 péndulos forma una onda con 4 crestas, cada una de un color que avanza hacia la izquierda, con longitud de onda 3d. Se cumple que para t=**T**/z, λ=zd, y se necesitan z+1 péndulos entre una cresta y otra. En este caso: z=3.

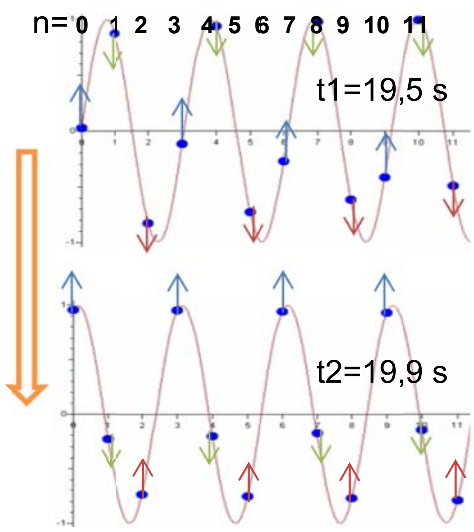
Al mismo tiempo se pueden ver z=3 ondas independientes con los 4 péndulos que están en la misma fase, cada uno de un color:

– 1ª onda, los péndulos que están en Y=1.
– 2ª onda, los péndulos están a 1/3 de oscilación de la 1ª bajando.
– 3ª onda, los péndulos están a 1/3 de oscilación de la 2ª subiendo.



También se puede ver cómo avanzan estas ondas:

- En t1=19,5 s, 0,5 s antes de **T**/3.
- En t2=19,9 s, 0,1 s antes de **T**/3.



C2) En **dos tercios de la danza** a 2**T**/3=2x60/3=40 s, los péndulos han hecho 2(N+n)/3 oscilaciones, como se muestra en la tabla:

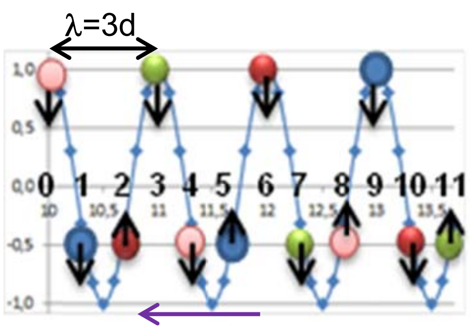
Péndulo (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nº osc. en 40 s (20+2n/3)	20	20,66	21,33	22	22,66	23,33	24	24,66	25,33	26	26,66	27,33

Cada péndulo se separa 2/3=0,66 de oscilación del siguiente.

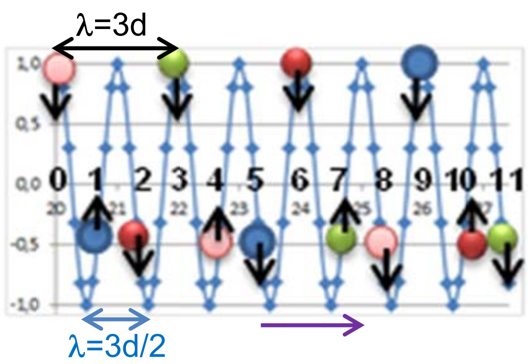
El péndulo n=0 ha hecho 20 oscilaciones, se encuentra arriba en Y=1. El n=1 ha hecho 20 más 2/3 de oscilación, se encuentra por debajo de Y=0, subiendo. El n=2 ha hecho 21 más 1/3 de oscilación, se encuentra por debajo de Y=0, bajando.

En los dibujos se muestran las simetrías entre C1 y C2:

C1) t=**T**/3



C2) t=2**T**/3

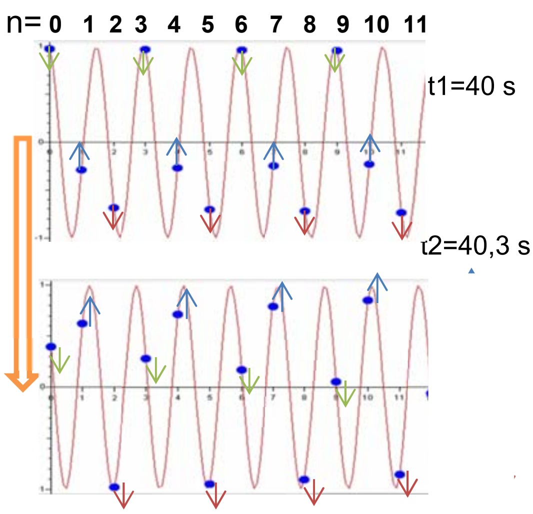


Los péndulos ocupan las mismas posiciones en C1) y C2), tienen la misma onda "visual" de longitud de onda 3d, pero se invierten los movimientos. Las bolas que suben o bajan en C1, bajan o suben en C2.

La longitud de esta onda "real" en C2 es λ_r=3d/2.

Se pueden ver en C2 ondas similares a las de C1:

- En t1=40 s. La 1ª está en Y=1, la 2ª se acerca a Y=0 y la 3ª se acerca a Y=-1.
- En t2=40,3 s. La 1ª se acerca a Y=0, la 2ª a Y=1 y la 3ª se acerca a Y=-1.



III.2.5 Resumen de las simetrías estudiadas

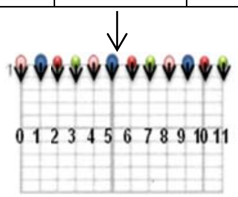
A1) Inicio de la danza | A2) Final

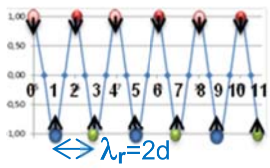
B1) Un cuarto | B2) Tres cuartos

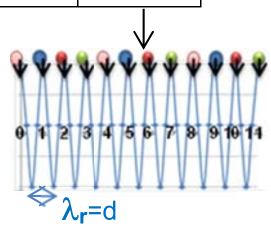
C1) Un tercio | C2) Dos tercios

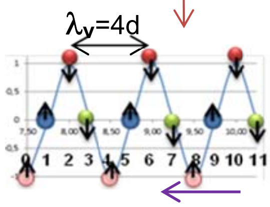
Mitad

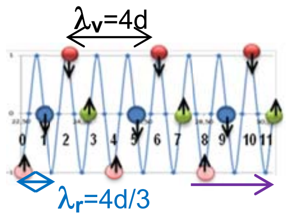
	A1)	B1)	C1)	D)	C2)	B2)	A2)
t(T) (s)	0	T/4 15	T/3 20	T/2 30	2T/3 40	3T/4 45	T 60
λ	∞	4d	3d	2d	3d	4d	∞
	Oscilaciones realizadas						
	0	(N+n)/4	(N+n)/3	(N+n)/2	2(N+n)/3	3(N+n)/4	N+n
n=0	0	7,5	10	15	20	22,5	30
n=1	0	7,75	10,33	15,5	20,66	23,25	31
n=2	0	8	10,66	16	21,33	24	32
…							
N=11	0	10,25	13,66	20,5	27,33	30,75	41

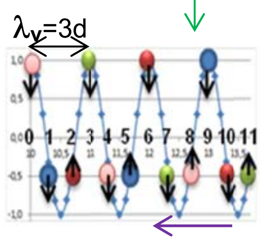


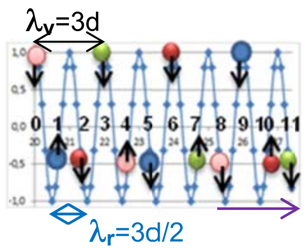






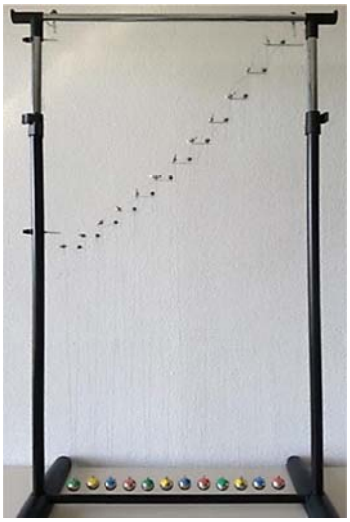
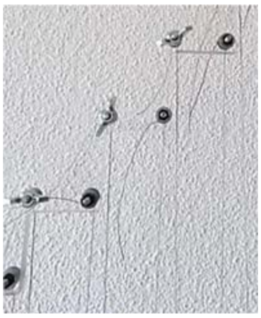






III.2.6 Construcción

Este primer aparato fue construido en un panel triangular de metacrilato con agujeros a distintas alturas, para que todos los péndulos llegaran a la misma horizontal. El panel se sujetó a un perchero. Uno de los tornillos de cada péndulo tiene una palomilla para facilitar el ajuste de la longitud del hilo. Se pusieron pegatinas con 4 colores a bolas de acero de 2,5 cm de diámetro. Todo ello se puede observar en las fotos siguientes.


El **vídeo 3** muestra un ciclo de la danza con el aparato completo. Se puede parar y observar las simetrías descritas. El **video 4** muestra dos ciclos de la danza, viendo sólo las esferas. Se dan algunas explicaciones para observar las ondas que se forman: al comienzo, 1/3, ½, 2/3 y final del primer ciclo, y a 1+¼ y 1+¾ y final del segundo ciclo. Esto permite observar con facilidad las simetrías descritas.

III.3 Simetrías en un segundo ejemplo

Se utilizan 18 péndulos con N=51, T=60 s, d=3,5 cm.

Los datos de interés en tres de estos péndulos son:

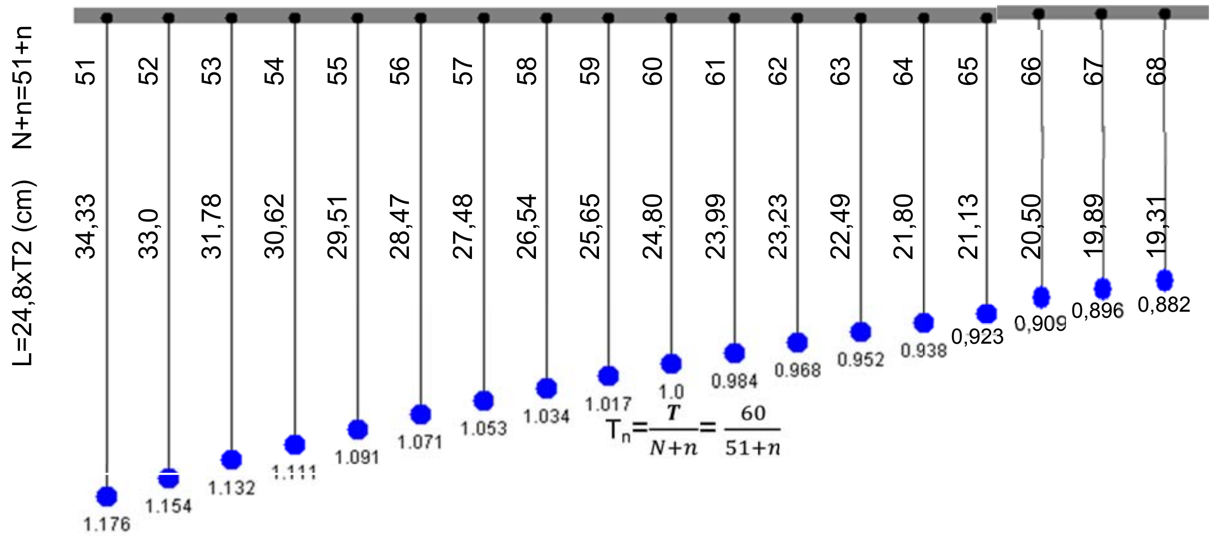
El 1º, n=0, hace N+n=51 oscilaciones en **T**=60 s, su periodo es $T_0=\mathbf{T}/N=60/51=1{,}176$ s, está situado en $x_0=n.d=0$ cm y es el más largo $L_0(m)=0{,}248T_0^2=0{,}3433$ m=34,33 cm.

El 2º, n=1, hace N+n=52 oscilaciones en T=60 s, su periodo es $T_1=\mathbf{T}/(N+n)=60/52=1{,}154$ s, está situado en $x_1=n.d=1x3{,}5=3{,}5$ cm y $L_1(m)=0{,}248T_1^2=0{,}330$ m=33,0 cm.

El 18º, n=17, hace N+n=68 osc. en T=60 s, su periodo es $T_{17}=T/(N+n)=60/68=0{,}88235$ s, está situado en $x_{17}=n.d=17x3{,}5=59{,}5$ cm y es el más corto $L_{17}(m)=0{,}248T_{17}^2=0{,}1931$ m=19,31 cm.

En el esquema siguiente se resumen los datos de cada péndulo

(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
(x_n=n.d)	0	3,5	7	10,5	14	17,5	21	24,5	28	31,5	35	38,5	42	45,5	49	52,5	56	59,5



Las **simetrías** que se obtienen son las mismas que en el primer ejemplo. Lo único que varía es el número de oscilaciones realizadas, éstas aumentan respecto al primer ejemplo como se indica a continuación:

t(T)	0	T/4=15 s	T/3=20 s	T/2=30 s	2T/3=40 s	3T/4=45 s	T=60 s
Oscilaciones realizadas							
	0	(N+n)/4	(N+n)/3	(N+n)/2	2(N+n)/3	3(N+n)/4	N+n
n=0	0	12,75	17	25,5	34	38,25	51
n=1	0	13	17,33	26	34,66	39	52
n=2	0	13,25	17,66	26,5	35,33	39,75	53
…							
N=17	0	17	22,66	34	45,33	51	68

Este segundo aparato se hizo colocando unas clavijas de guitarra sobre una barra de madera y ésta se sujetó con unos soportes. Así, los péndulos llegan a distintas alturas.

El $\boxed{\text{vídeo 5}}$ muestra un ciclo de la danza con tres vistas: de frente, desde arriba y desde el costado donde está el péndulo más largo.

III.4 Simetrías en un tercer ejemplo

Se analiza un tercer ejemplo con los siguientes datos: N=16, **T**=16 s, d=3 cm.

Se utilizan 8 péndulos. Los datos de interés en tres de estos péndulos son:

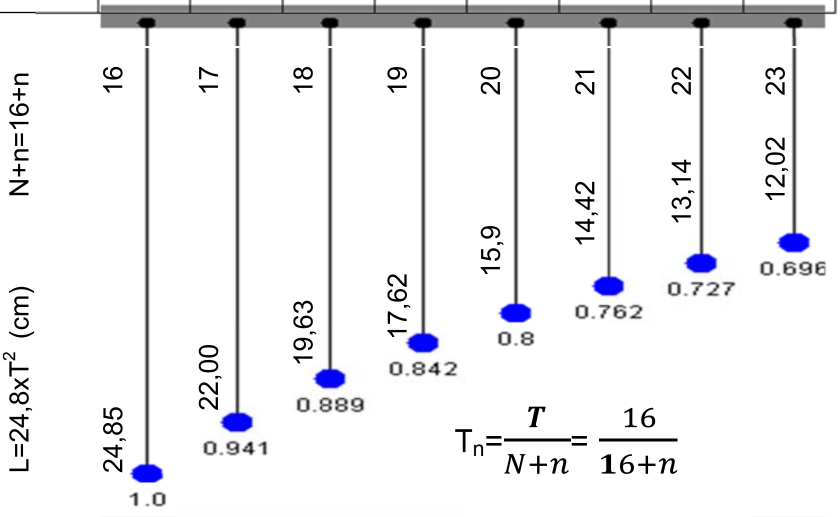
El 1º, n=0, hace N+n=16 oscilaciones en **T**=16 s, su periodo es T_0=**T**/N=16/16=1 s, está situado en x_0=n.d=0 cm y es el más largo L_0(m)=$0,248T_0^2$ =0,2485 m=24,85 cm.

El 2º, n=1, hace N+n=17 oscilaciones en **T**=16 s, su periodo es T_1=**T**/(N+n)=16/17=0,94 s, está situado en x_1=n.d=1x3=3 cm y L_1(m)=$0,248T_1^2$ =0,22 m=22 cm.

El 8º, n=7, hace N+n=23 osc. en **T**=16 s, su periodo es T_7=**T**/(N+n)=16/23=0,696 s, está situado en x_7=n.d=7x3=21 cm y es el más corto L_7(m)=$0,248T_7^2$ =0,1202 m=12,02 cm.

En el esquema siguiente se resumen los datos de cada péndulo

Nombre (n)	0	1	2	3	4	5	6	7
Posición en cm (x_n=n.d)	0	3	6	9	12	15	18	21



Ahora el periodo del péndulo más largo es de 1 s, la mitad que en el primer ejemplo.

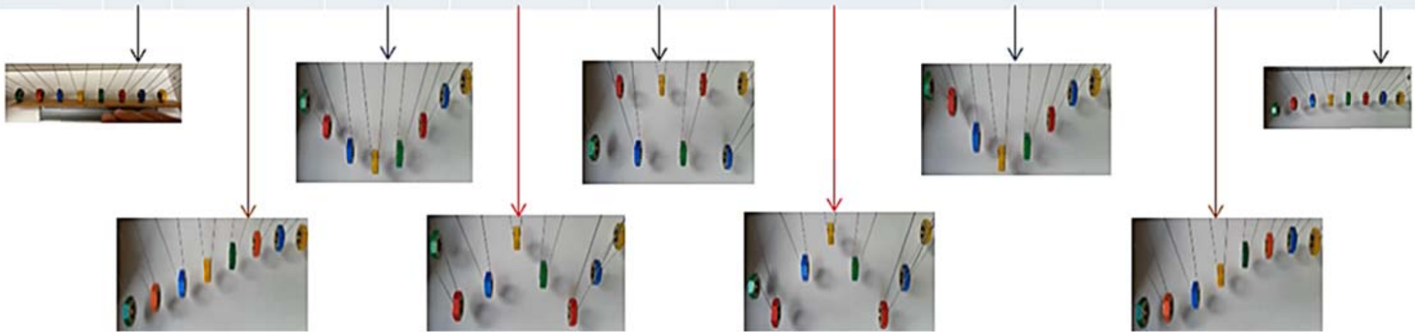
Cuando ha pasado 1 s (F1) se ha realizado 1/16 de la danza y forma una onda simétrica a cuando han pasado 15 s (F2).

A los 2 s (E1) se ha realizado 1/8 de la danza y forma una onda simétrica a cuando han pasado 14 s (E2).

A los 4 s (B1) se ha realizado 1/4 de la danza y forma una onda simétrica a cuando han pasado 12 s (B2), casos estudiados en los ejemplos anteriores.

A continuación se muestran las simetrías estudiadas:

t (T)	A1) 0	F1) T/16	E1) T/8	B1) T/4	D) T/2	B2) 3T/4	E2) 7T/8	F2) 15T/16	A2) T
t(s)	0 s	1 s	2 s	4 s	8 s	12 s	14 s	15 s	16 s
λ	∞	16d	8d	4d	2d	4d	8d	16d	∞
Oscilaciones realizadas									
1º n=0	0	16/16=1	16/8=2	16/4=4	16/2=8	16x3/4=12	16x7/8=14	16*15/16=15	16
2º n=1	0	17/16=1+1/16	17/8=2+1/8	17/4=4+1/4	17/2=8,5	17x3/4=12+3/4	17/8=14+7/8	17*15/16=15+15/16	17
3º n=2	0	18/16=1+2/16	18/8=2+2/8	18/4=4+2/4	18/2=9	18x3/4=12+6/4	18/8=14+2*7/8	18*15/16=15+2*15/16	18
...									
8º n=7	0	23/16=1+7/16	23/8=2+7/8	23/4=4+7/4	23/2=21,5	23x3/4=12+7*3/4	23/8=14+7*7/8	23/16=15+7*15/16	23



En las fotos se observa:

- Para las simetrías en B1) t=**T**/4 y B2) t=1-**T**/4, como en los ejemplos anteriores, la longitud de onda es λ=4d, hay 5 péndulos entre cresta y cresta, y se forman 4 ondas independientes con los péndulos que estén en la misma fase, que en este caso son del mismo color.
- Para las simetrías en E1) t=**T**/8 y E2) t=1-**T**/8 λ=8d, se necesitan 9 péndulos entre cresta y cresta, y se forman 8 ondas independientes (imposibles de observar en este ejemplo).
- Para las simetrías en F1) t=**T**/16 y F2) t=1-**T**/16 λ=16d, se necesitan **1**7 péndulos entre cresta y cresta, y se forman 16 ondas (imposibles de observar en este ejemplo).

Este tercer aparato se construye sobre un tablero recortado para que las tuercas (péndulos) lleguen a la misma horizontal. Se muestra una foto de la parte de delante y otra con un detalle de la parte de atrás.

El **vídeo 6** muestra un ciclo de la danza con explicaciones y paradas a 1, 2, 4, 8, 12, 14 y 16 s para ver las simetrías que se forman, coincidiendo con las fotos de la página anterior.
El **vídeo 7** muestra tres ciclos para observar la repetición consecutiva de la danza. Si no hubiera amortiguación, la danza se repetiría indefinidamente.

III.6 Generalizaciones para cualquier modelo

A través del desarrollo realizado, se comprueba que para cualquier tiempo t1=**T**/z:

- Cada péndulo hace (N+n)/z oscilaciones, por lo que se desplaza 1/z de oscilación respecto de la posición del péndulo anterior.
- La longitud de onda de las ondas lineales que se forman es λ=zd, con z+1 péndulos entre cresta y cresta.
- Se forman z ondas independientes con los péndulos que están en fase, es decir, separados por λ=zd.
- Se produce simetría en la forma de las ondas para el tiempo t2=**T**-t1, donde la onda avanza en sentido inverso al de t1=**T**/z.

IV. CONCLUSION

Lo descrito en este artículo muestra por qué aparece tanta belleza en este experimento y permite acercar el estudio de las oscilaciones y las ondas a un amplio público con un conocimiento elemental de física. Se ha puesto de manifiesto que el modelo es general, se forman diferentes ondas simétricas para los tiempos, t1=**T**/z y t2=**T**-t1. Siendo **T** el periodo de la danza y z un número arbitrario.

REFERENCIAS

[1] J. A. Flaten and K. A. Parendo, “Pendulum waves: A lesson in aliasing”.
American Journal of Physics, 69(7), 2001 pp. 778–782.
http://www.physics.iitm.ac.in/~arul/PH1010/AJP000778PendulumWaves2.pdf

[2] Física con ordenador Curso Interactivo de Ángel Franco García
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica

[3] Arbor Scientific. Pendulum wave seems like magic but its physics
http://www.arborsci.com/cool/pendulum-wave-seems-like-magic-but-its-physics

[4] Wolfram Demonstrations Proyect. Pendulum Waves
http://demonstrations.wolfram.com/PendulumWaves/

ANEXO. Vídeos utilizados en el artículo:

(Hacer clic sobre los recuadros para ver los vídeos)

Vídeo 1 F04 1 Danza de péndulos. Introducción. (pg. 2 del texto)

Vídeo 2 F04 2 Efecto estroboscópico. (pg. 2 del texto)

Ejemplo 1º:

Vídeo 3 F04 3 Ej. 1º Un ciclo N=30 T=60. (pg. 14 del texto)

Muestra un ciclo de la danza con el aparato completo. Se puede parar y observar las simetrías descritas en el texto.

Video 4 F04 4 Ej. 1º Dos ciclos N=30 T=60. (pg. 14 del texto)

Muestra dos ciclos de la danza, viendo sólo las esferas. Se dan algunas explicaciones para observar las ondas que se forman: al comienzo, 1/3, ½, 2/3 y final del primer ciclo, y a 1+¼ y 1+¾ y final del segundo ciclo. Esto permite observar con facilidad las simetrías descritas en el texto.

Ejemplo 2º:

Vídeo 5 F04 5 Ej. 2º Un ciclo N=51 T=60. (pg. 15 del texto)

Muestra un ciclo de la danza con tres vistas: de frente, desde arriba y desde el costado donde está el péndulo más largo.

Ejemplo 3º:

Vídeo 6 F04 6 Ej. 3º Un ciclo N=16 T=16. (pg. 18 del texto)

Muestra un ciclo de la danza con explicaciones y paradas a 1, 2, 4, 8, 12, 14 y 16 s para ver las simetrías descritas en el texto.

Vídeo 7 F04 7 Ej. 3º Tres ciclos N=16 T=16. (pg. 18 del texto)

Muestra tres ciclos para observar la repetición consecutiva de la danza. Si no hubiera amortiguación, la danza se repetiría indefinidamente.