

Análisis de cuestionarios con escala imprecisa

FUZZY RATING SCALES IN QUESTIONNAIRES

María Ángeles Gil



Universidad de Oviedo



Pamplona, 7 junio 2023

Motivación del Análisis de Datos 'Imprecisos'



¿Por qué Análisis de Datos 'Imprecisos'?
(motivación del mundo real)

▷ **SUPOSICIÓN MUY FRECUENTE**

Los datos disponibles a partir de la realización de experimentos aleatorios **se pueden expresar en escala numérica**



¿Por qué Análisis de Datos 'Imprecisos'? (definiciones usuales de la Estadística)

Merriam-Webster SINCE 1828

GAMES & QUIZZES | THESAURUS | WORD OF THE DAY | FEATURES

statistics X Q

Dictionary Thesaurus

statistics noun, plural in form but singular or plural in construction

Save Word

sta-tis-tics | \ sta-'ti-stiks

Definition of *statistics*

1 : a branch of mathematics dealing with the collection, analysis, interpretation, and presentation of masses of **numerical data**

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA

Diccionario de la lengua española Edición del Tricentenario Actualización 2020

Consulta posible gracias al compromiso con la cultura de la Fundación "la Caixa"

por palabras Escribe aquí la palabra Consultar

estadística +

La forma *f.*, del al. *Statistik*, y este der. del it. *statista* 'hombre de Estado'.

S. f. Rama de la matemática que utiliza grandes conjuntos de **datos numéricos** para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades.



¿Por qué Análisis de Datos 'Imprecisos'?

(motivación del mundo real)

▷ SUPOSICIÓN MUY FRECUENTE

Los datos disponibles a partir de la realización de experimentos aleatorios **se pueden expresar en escala numérica**

▷ SITUACIÓN BASTANTE FRECUENTE

Los datos a partir de experimentos aleatorios que involucran *valoraciones humanas* que se asocian con magnitudes intrínsecamente imprecisas (opiniones/percepciones/juicios...), **no suelen ser expresables en escala numérica**

Ejemplo de magnitud aleatoria intrínsecamente imprecisa



Fotos tomadas hace
ALGUNOS años en una
reforestación que se llevó a cabo
en el Valle del Huerna

Magnitud

‘calidad percibida’ de los árboles

▷ *aleatoriedad*

la ‘calidad percibida’ varía de unos árboles a otros

▷ *imprecisión intrínseca*

la ‘calidad percibida’ es esencialmente imprecisa

Ejemplo de magnitud aleatoria intrínsecamente imprecisa



Fotos tomadas hace
ALGUNOS años en una
reforestación que se llevó a cabo
en el Valle del Huerna

Magnitud

‘calidad percibida’ de los árboles

▷ *aleatoriedad*

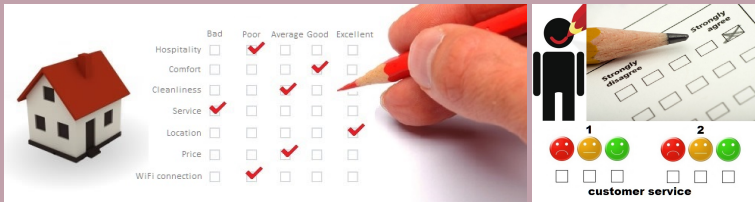
la ‘calidad percibida’ varía de unos árboles a otros

▷ *imprecisión intrínseca*

la ‘calidad percibida’ es esencialmente imprecisa

Escala de medida más usual para magnitudes imprecisas

- Escalas tipo Likert (u otras escalas categóricas)






- Las valoraciones basadas en escala tipo Likert permiten a quien valora elegir el que mejor representa su 'puntuación' de una lista de 'valores lingüísticos' que etiquetan distintos grados de acuerdo/satisfacción/etc.,

Escala de medida más usual para magnitudes imprecisas



Pros DEL EMPLEO DE ESCALAS TIPO LIKERT

-  Facilidad de valoración, independientemente del marco
-  No necesita un 'entrenamiento' especial
-  El uso de etiquetas lingüísticas parece bastante 'coherente' con la imprecisión intrínseca a estas magnitudes

Escala de medida más usual para magnitudes imprecisas



Contras DEL EMPLEO DE ESCALAS TIPO LIKERT



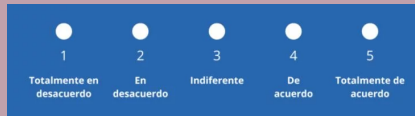
Las diferencias individuales apenas quedan reflejadas



La elección de la etiqueta que represente mejor la 'puntuación' a menudo es una tarea compleja



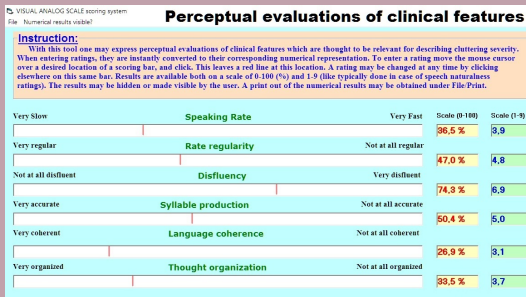
Hay pocas técnicas estadísticas para analizar estos datos. Habitualmente se basan en su posición de acuerdo con cierta ordenación (es decir, se aplica una CODIFICACIÓN NUMÉRICA POSTERIOR)



⇒ suele perderse información estadísticamente relevante

Otra escala de medida para ciertas magnitudes imprecisas

- Escalas visuales analógicas



- Las valoraciones basadas en una escala visual analógica (EVA) permiten a quien valora elegir libremente el punto en un intervalo (habitualmente con extremos etiquetados) que mejor representa su 'puntuación'

Otra escala de medida para ciertas magnitudes imprecisas

- Escalas visuales analógicas



- ▷ Como referencia, las EVA aparecen a veces combinadas con escalas tipo Likert

Otra escala de medida para ciertas magnitudes imprecisas






Pros DEL EMPLEO DE ESCALAS VISUALES ANALÓGICAS

- 👍 La elección se realiza dentro de un continuo; en consecuencia, está garantizada la captura de la variabilidad, la subjetividad y la diversidad
- 👍 Los datos que están basados en las EVA pueden analizarse estadísticamente mediante las técnicas tradicionales y no se pierde información relevante

Otra escala de medida para ciertas magnitudes imprecisas



Contras DE LAS ESCALAS VISUALES ANALÓGICAS

-  La elección del punto que mejor representa la puntuación de quien valora no suele ser ni fácil ni natural. Demandar una precisión absoluta en un contexto intrínsecamente impreciso resulta muy poco realista
-  Ocasionalmente, se ha observado en la literatura que surgen problemas con la capacidad de quien asigna la puntuación para asimilar conceptualmente el método de valoración, lo que obliga a menudo a cierto entrenamiento
-  Los cuestionarios y las encuestas que involucran EVA no pueden administrarse en cualquier marco; necesariamente debe recurrirse a un formulario para cumplimentar en papel o, preferiblemente, en ordenador.



¿Por qué no usar escalas *fuzzy* para 'medir' magnitudes imprecisas?

Algunas citas de motivación

*One should consider a rich and expressive scale in which
« ... something can be meaningful
although we cannot name it »*

(Ghneim, 2013, *Encyclopedia of Psychometrics*, Wikipedia)

*« Paradoxically, one of the principal contributions
of fuzzy logic,... , is its high power
of 'precisiation' of what is imprecise »*

(Zadeh, 2008, *Inform. Sci.*)



¿Por qué no usar escalas *fuzzy* para 'medir' magnitudes imprecisas?

Algunas citas de motivación

*One should consider a rich and expressive scale in which
« ... something can be meaningful
although we cannot name it »*

(📖 Ghneim, 2013, *Encyclopedia of Psychometrics*, Wikipedia)

*« Paradoxically, one of the principal contributions
of fuzzy logic,... , is its high power
of 'precisiation' of what is imprecise »*

(📖 Zadeh, 2008, *Inform. Sci.*)



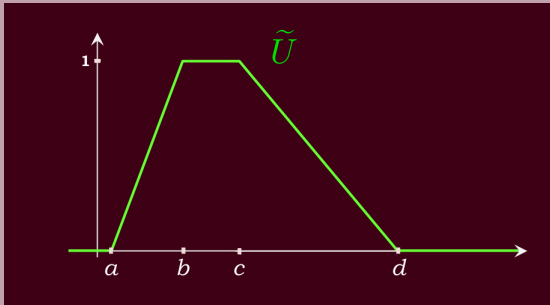
Lotfi A. Zadeh (1921-2017), padre de la Lógica *Fuzzy*



L.A. Zadeh, 1965, *Inform. Contr.* 8 (3), 338–353

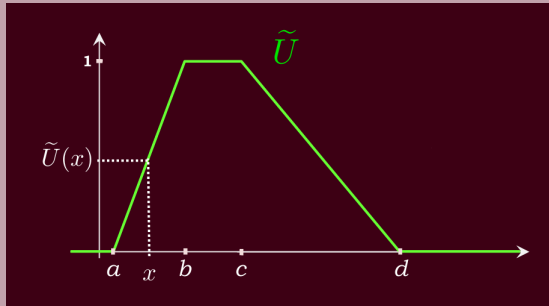
Modelo para datos imprecisos: número *fuzzy* (📖 Zadeh, 1975)

Cantidad imprecisa formalizada por una función $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$



Modelo para datos imprecisos: número *fuzzy* (📖 Zadeh, 1975)

Cantidad imprecisa formalizada por una función $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

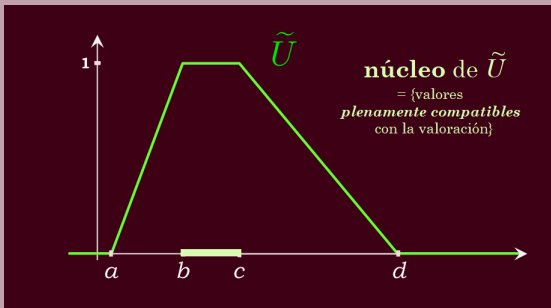


▷ Interpretación: Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{U}(x) = \text{'grado de compatibilidad' de } x \text{ con } \tilde{U}$$

Modelo para datos imprecisos: número *fuzzy* (📖 Zadeh, 1975)

Cantidad imprecisa formalizada por una función \tilde{U}

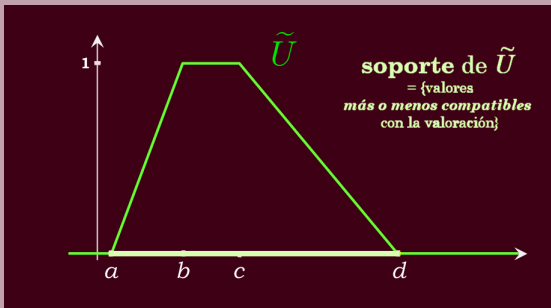


▷ Interpretación: Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{U}(x) = \text{'grado de compatibilidad' de } x \text{ con } \tilde{U}$$

Modelo para datos imprecisos: número *fuzzy* (📖 Zadeh, 1975)

Cantidad imprecisa formalizada por una función \tilde{U}



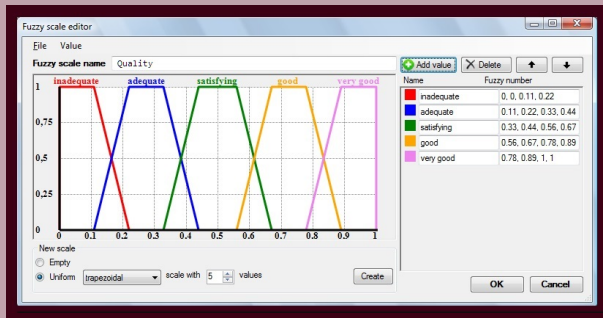
▷ Interpretación: Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{U}(x) = \text{'grado de compatibilidad' de } x \text{ con } \tilde{U}$$

Análisis de Datos *Fuzzy*: Escalas *fuzzy*

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [I]

- Escalas lingüísticas *fuzzy*



- Puede entenderse como una CODIFICACIÓN FUZZY de una escala tipo Likert

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [I]



Pros DEL EMPLEO DE ESCALAS LINGÜÍSTICAS FUZZY



Los de las tipo Likert, ya que la codificación *fuzzy* posterior suelen realizarla expertos



Contras DEL EMPLEO DE ESCALAS LINGÜÍSTICAS FUZZY



Los de las tipo Likert

Deben desarrollarse métodos estadísticos para el análisis de datos *fuzzy*

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [I]



Pros DEL EMPLEO DE ESCALAS LINGÜÍSTICAS FUZZY



Los de las tipo Likert, ya que la codificación *fuzzy* posterior suelen realizarla expertos



Contras DEL EMPLEO DE ESCALAS LINGÜÍSTICAS FUZZY



Los de las tipo Likert




Deben desarrollarse métodos estadísticos para el análisis de datos *fuzzy*



A finales de los 80 del siglo XX,
Tom y Beryl Hesketh, introdujeron las *escalas de valoración fuzzy libre*,
(*fuzzy rating scales*, FRS) en el marco de cuestionarios de opinión

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [II]

- Escalas de valoración *fuzzy* libre (*fuzzy rating scales*)

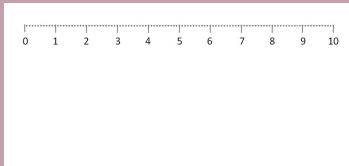
- ▶ Las valoraciones basadas en FRS ( Hesketh *et al.*, 1988) permiten a quien valora dibujar el número *fuzzy* que mejor representa su 'puntuación'

- ✓ se considera un intervalo acotado de referencia (con extremos a menudo etiquetados)
- ✓ se especifica el *núcleo*
- ✓ se especifica el *soporte*
- ✓ se eleva el núcleo una unidad y se unen mediante segmentos los extremos inferiores y superiores

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [II]

- Escalas de valoración *fuzzy* libre (fuzzy rating scales)

- ▶ Las valoraciones basadas en FRS (📖 Hesketh *et al.*, 1988) permiten a quien valora dibujar el número *fuzzy* que mejor representa su 'puntuación'

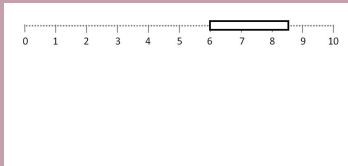


- ✓ se considera un intervalo acotado de referencia (con extremos a menudo etiquetados)
- ✓ se especifica el *núcleo*
- ✓ se especifica el *soporte*
- ✓ se eleva el núcleo una unidad y se unen mediante segmentos los extremos inferiores y superiores

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [II]

- Escalas de valoración *fuzzy* libre (fuzzy rating scales)

- ▶ Las valoraciones basadas en FRS (📖 Hesketh *et al.*, 1988) permiten a quien valora dibujar el número *fuzzy* que mejor representa su 'puntuación'

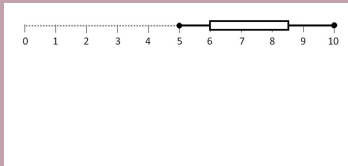


- ✓ se considera un intervalo acotado de referencia (con extremos a menudo etiquetados)
- ✓ se especifica el *núcleo*
- ✓ se especifica el *soporte*
- ✓ se eleva el núcleo una unidad y se unen mediante segmentos los extremos inferiores y superiores

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [II]

- Escalas de valoración *fuzzy* libre (fuzzy rating scales)

- ▶ Las valoraciones basadas en FRS (📖 Hesketh *et al.*, 1988) permiten a quien valora dibujar el número *fuzzy* que mejor representa su 'puntuación'

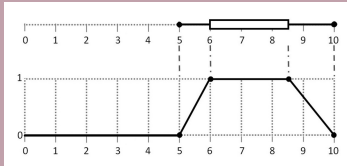


- ✓ se considera un intervalo acotado de referencia (con extremos a menudo etiquetados)
- ✓ se especifica el *núcleo*
- ✓ se especifica el *soporte*
- ✓ se eleva el núcleo una unidad y se unen mediante segmentos los extremos inferiores y superiores

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [II]

● Escalas de valoración *fuzzy* libre (fuzzy rating scales)

- ▶ Las valoraciones basadas en FRS (📖 Hesketh *et al.*, 1988) permiten a quien valora dibujar el número *fuzzy* que mejor representa su 'puntuación'



- ✓ se considera un intervalo acotado de referencia (con extremos a menudo etiquetados)
- ✓ se especifica el *núcleo*
- ✓ se especifica el *soporte*
- ✓ se eleva el núcleo una unidad y se unen mediante segmentos los extremos inferiores y superiores

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [II]



Pros DEL EMPLEO DE LAS FRS

- 👍 Una FRS es doblemente continua (vertical y horizontalmente)
⇒ los valores en una FRS reflejan la 'localización' y captan la imprecisión intrínseca a la valoración
- 👍 Los valores en las FRS admiten un buen manejo computacional
- 👍 La FRS permite captar las diferencias individuales entre quienes establecen las valoraciones; no se pierde información relevante
(...*precisiation of what is imprecise...*)



Las FRS son más ricas y expresivas que cualquier escala basada en lenguaje natural (inevitablemente finito) o en su codificación
(...*something can be meaningful although we cannot name it...*)

Ejemplo del 'power of precision' de una FRS vs una tipo Likert

TIMSS-PIRLS = estudio internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) y en el Progreso de la Comprensión Lectora (PIRLS), que evalúa las tendencias en el nivel de aprendizaje de los estudiantes de cuarto de Primaria (niños de 9 años). Se realiza cada cuatro años en más de sesenta países y muchos de los ítems se responden según una escala Likert de 4 puntos

TIMSS 2011

**Student
Questionnaire**

Mathematics in school

MS1 _____

How much do you agree with these statements about learning mathematics?

Fill one circle for each line.

Disagree a lot	Disagree a little	Agree a little	Agree a lot
↓	↓	↓	↓

e) My teacher is easy to understand -- ○ ——— ○ ——— ○ ——— ○

Ejemplo del 'power of precision' de una FRS vs una tipo Likert

Ítem que involucra escala tipo Likert y FRS

- 'Adaptación' a doble respuesta

Mathematics in school

Mathematics
How much do you agree with these statements about learning mathematics?

M.2 . My teacher is easy to understand

	Disagree a lot	Disagree a little	Agree a little	Agree a lot
1.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

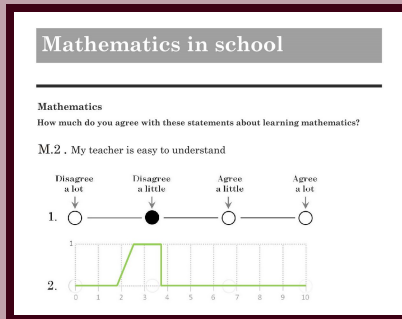
2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ejemplo del 'power of precision' de una FRS vs una tipo Likert

Ítem que involucra escala tipo Likert y FRS



Respuestas diferentes según la FRS que compartieron
la misma respuesta Likert

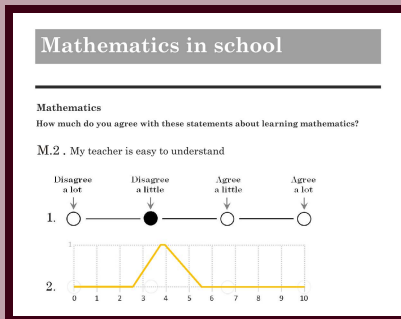


Ejemplo del 'power of precision' de una FRS vs una tipo Likert

Ítem que involucra escala tipo Likert y FRS



Respuestas diferentes según la FRS que compartieron
la misma respuesta Likert

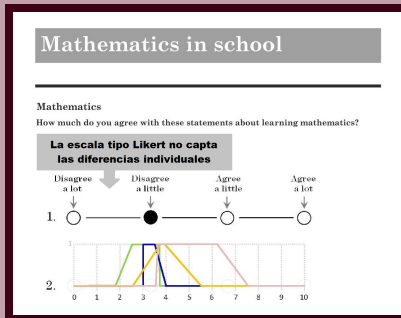


Ejemplo del 'power of precision' de una FRS vs una tipo Likert

Ítem que involucra escala tipo Likert y FRS



Respuestas diferentes según la FRS que compartieron
la misma respuesta Likert

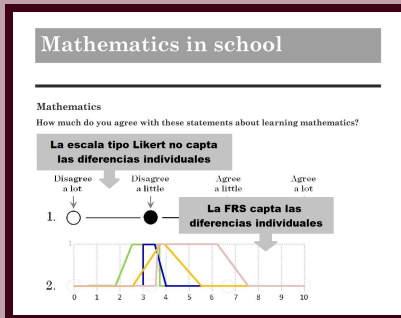


Ejemplo del 'power of precision' de una FRS vs una tipo Likert

Ítem que involucra escala tipo Likert y FRS



Respuestas diferentes según la FRS que compartieron
la misma respuesta Likert



Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [II]



Pros DEL EMPLEO DE LAS FRS

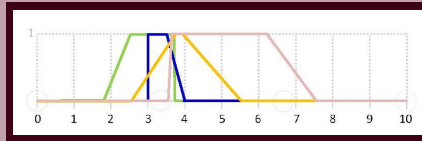
- 👍 Una FRS es doblemente continua (vertical y horizontalmente)
⇒ los valores en una FRS reflejan la 'localización' y captan la imprecisión intrínseca a la valoración
- 👍 Los valores en las FRS admiten un buen manejo computacional
- 👍 La FRS permite captar las diferencias individuales entre quienes establecen las valoraciones; no se pierde información relevante
(...*precisiation of what is imprecise...*)
- 👍 Las FRS son más ricas y expresivas que cualquier escala basada en lenguaje natural (inevitablemente finito) o en su codificación
(...*something can be meaningful although we cannot name it...*)

Ejemplo de la expresividad limitada de las escalas tipo Likert

Ítem que involucra escala tipo Likert y FRS



¿Cómo 'traducir' estas respuestas?



En un lenguaje natural no disponemos de suficientes palabras para traducir cada una de esas respuestas, pero interpretamos lo que significan

Escalas *fuzzy* para medir magnitudes imprecisas [II]



Contras DEL EMPLEO DE LAS FRS



Las valoraciones que involucran FRS no pueden llevarse a cabo en cualquier marco



Quienes valoren, necesitan disponer de formación apropiada o recibir cierto 'entrenamiento' previo



Hay que desarrollar métodos estadísticos y *software* para analizar datos *fuzzy*

"... We are yet to see easily adapted packages that allow for researchers to use the fuzzy concept and then to apply appropriate statistical and other analyses to these in order to both test hypotheses and ensure that meaning is captured"



Hesketh et al., 2011)

- ▷▷ En los últimos años se está desarrollando una metodología para analizar datos basados en escalas *fuzzy*



HERRAMIENTAS BÁSICAS DE LA METODOLOGÍA



Aritmética de números *fuzzy*
+ distancia entre números *fuzzy*

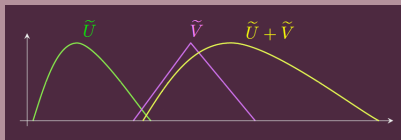


Números *fuzzy* aleatorios

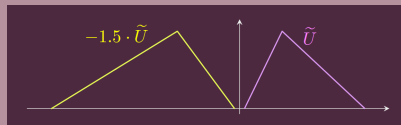
- ▷ Estas herramientas matemáticas permiten formalizar el análisis de datos *fuzzy* de manera que tenga sentido referirse a la 'probabilidad de error', el 'nivel de confianza', etc. de las conclusiones estadísticas

Aritmética de números *fuzzy* (📖 Zadeh, 1975)

Suma de números *fuzzy*



Producto de números *fuzzy* por números reales



Aritmética de números *fuzzy* ( Zadeh, 1975):
No linealidad del espacio de números *fuzzy* la aritmética de Zadeh



⇒ No puede establecerse un **‘operador diferencia’** tal que

– siempre esté bien definido

– y $\tilde{U} + (\tilde{V} - \tilde{U}) = \tilde{V}$ cualesquiera que sean \tilde{U} y \tilde{V}

Distancia entre números *fuzzy* (Diamond y Kloeden, 1990, Bertoluzza *et al.*, 1995, Trutschnig *et al.*, 2009)

- ▶ Métrica tipo L^2 que, junto con la aritmética anterior, permite 'identificar' los datos *fuzzy* con datos funcionales (elementos de un cono convexo de un espacio de Hilbert de funciones)
- ▶ Ayuda a soslayar problemas asociados a la no linealidad
- ▶ Permite
 - extender conceptos y métodos de la Estadística de datos numéricos (e.g., medidas de dispersión/escala, enfoque de mínimos cuadrados, clasificación de datos, etc.)
 - particularizar conceptos y métodos de la Estadística de datos funcionales

Distancia entre números *fuzzy* (Diamond y Kloeden, 1990, Bertoluzza *et al.*, 1995, Trutschnig *et al.*, 2009)

- ▶ Métrica tipo L^2 que, junto con la aritmética anterior, permite 'identificar' los datos *fuzzy* con datos funcionales (elementos de un cono convexo de un espacio de Hilbert de funciones)
- ▶ Ayuda a soslayar problemas asociados a la no linealidad
- ▶ Permite
 - extender conceptos y métodos de la Estadística de datos numéricos (e.g., medidas de dispersión/escala, enfoque de mínimos cuadrados, clasificación de datos, etc.)
 - particularizar conceptos y métodos de la Estadística de datos funcionales

Distancia entre números *fuzzy* ( Diamond y Kloeden, 1990,
 Bertoluzza *et al.*, 1995,  Trutschnig *et al.*, 2009)

- ▶ Métrica tipo L^2 que, junto con la aritmética anterior, permite 'identificar' los datos *fuzzy* con datos funcionales (elementos de un cono convexo de un espacio de Hilbert de funciones)
- ▶ Ayuda a soslayar problemas asociados a la no linealidad
- ▶ Permite
 - extender conceptos y métodos de la Estadística de datos numéricos (e.g., medidas de dispersión/escala, enfoque de mínimos cuadrados, clasificación de datos, etc.)
 - particularizar conceptos y métodos de la Estadística de datos funcionales

Análisis de Datos *Fuzzy*: Números *fuzzy* aleatorios



¿Por qué los números *fuzzy* aleatorios son una herramienta básica en este contexto?

el mecanismo aleatorio que genera datos *fuzzy*

Se adaptan a muchas situaciones reales
y permiten el desarrollo de métodos rigurosos
para extraer conclusiones objetivas

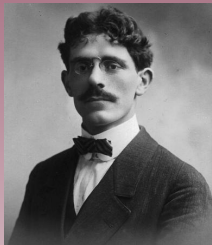
Análisis de Datos *Fuzzy*: Números *fuzzy* aleatorios



¿Por qué los números *fuzzy* aleatorios son una herramienta básica en este contexto?

Son un modelo matemático en el marco probabilístico para el mecanismo aleatorio que genera datos *fuzzy*

Se adaptan a muchas situaciones reales y permiten el desarrollo de métodos rigurosos para extraer conclusiones objetivas

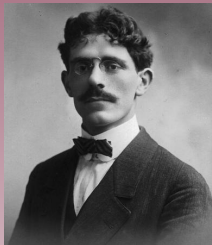


On étudiait les *nombres* aléatoires obtenus en choisissant au hasard une ville dans un pays donné et en notant un nombre relatif à cette ville, comme sa population (¹), le nombre de ses maisons, etc. Mais on peut aussi considérer des éléments attachés à une ville choisie au hasard et qui ne peuvent se décrire par l'intermédiaire d'une des notions mathématiques usuelles : nombre, fonction, courbe, etc. Par exemple, la moralité de sa population, son état d'esprit politique, l'impression de beauté qu'elle donne, etc. C'est une catégorie nouvelle d'éléments aléatoires.

(📖 M. Fréchet, 1948, *Ann. Inst. H. Poincaré* 10 (4), 215–310
“Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié”)

¿Anticipó los números fuzzy aleatorios?

En cierto modo, ya que sentó las bases para su formalización,
pero los números *fuzzy* aún no se habían introducido



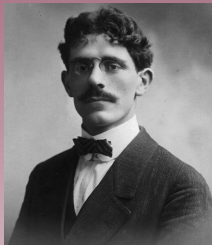
On étudiait les *nombres* aléatoires obtenus en choisissant au hasard une ville dans un pays donné et en notant un nombre relatif à cette ville, comme sa population (¹), le nombre de ses maisons, etc. Mais on peut aussi considérer des éléments attachés à une ville choisie au hasard et qui ne peuvent se décrire par l'intermédiaire d'une des notions mathématiques usuelles : nombre, fonction, courbe, etc. Par exemple, la moralité de sa population, son état d'esprit politique, l'impression de beauté qu'elle donne, etc. C'est une catégorie nouvelle d'éléments aléatoires.

(📖 M. Fréchet, 1948, *Ann. Inst. H. Poincaré* 10 (4), 215–310
“Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié”)



¿Anticipó los números fuzzy aleatorios?

En cierto modo, ya que sentó las bases para su formalización,
pero los números *fuzzy* aún no se habían introducido



On étudiait les *nombres* aléatoires obtenus en choisissant au hasard une ville dans un pays donné et en notant un nombre relatif à cette ville, comme sa population (¹), le nombre de ses maisons, etc. Mais on peut aussi considérer des éléments attachés à une ville choisie au hasard et qui ne peuvent se décrire par l'intermédiaire d'une des notions mathématiques usuelles : nombre, fonction, courbe, etc. Par exemple, la moralité de sa population, son état d'esprit politique, l'impression de beauté qu'elle donne, etc. C'est une catégorie nouvelle d'éléments aléatoires.

(📖 M. Fréchet, 1948, *Ann. Inst. H. Poincaré* 10 (4), 215–310
“Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié”)



¿Anticipó los números fuzzy aleatorios?

En cierto modo, ya que sentó las bases para su formalización,
pero los números *fuzzy* aún no se habían introducido

A principios de los 70 del siglo XX,
Féron adoptó y adaptó el enfoque de Fréchet para datos *fuzzy*

A finales de los 70 y comienzos de los 80,
Puri y Ralescu 'redondearon' el modelo matemático
de los números *fuzzy* aleatorios

A principios de los 70 del siglo XX,
Féron adoptó y adaptó el enfoque de Fréchet para datos *fuzzy*

A finales de los 70 y comienzos de los 80,
Puri y Ralescu 'redondearon' el modelo matemático
de los números *fuzzy* aleatorios

Números *fuzzy* aleatorios (NFA) como modelo del mecanismo aleatorio que genera datos *fuzzy*

Los NFA permiten:

- conservar/adaptar la mayoría de las ideas, conceptos y fundamentos del análisis de datos numéricos
 - ▷ Se ha conservado la mayoría de nociones probabilísticas
 - distribución de un NFA
 - independencia de NFA
 - media y varianza de un NFA y covarianza de dos NFA
 - mediana y otras medidas resumen robustas...
- y extender/adaptar muchos métodos de ese análisis para tratar datos *fuzzy*
 - ▷ Se ha extendido un buen número de métodos del análisis de datos numéricos

Números *fuzzy* aleatorios (NFA) como modelo del mecanismo aleatorio que genera datos *fuzzy*

Los NFA permiten:

- conservar/adaptar la mayoría de las ideas, conceptos y fundamentos del análisis de datos numéricos
 - ▷ Se ha conservado la mayoría de nociones probabilísticas
 - distribución de un NFA
 - independencia de NFA
 - media y varianza de un NFA y covarianza de dos NFA
 - mediana y otras medidas resumen robustas...
- y extender/adaptar muchos métodos de ese análisis para tratar datos *fuzzy*
 - ▷ Se ha extendido un buen número de métodos del análisis de datos numéricos

Objetivos del Análisis de Datos *Fuzzy*

Describir distribuciones de datos muestrales *fuzzy*
e *inferir conclusiones* acerca de la distribución poblacional
de los NFA sobre la base de esos datos

Rasgos diferenciales del Análisis de Datos *Fuzzy*

A diferencia del análisis de datos numéricos hay que destacar

- ✦ La **falta de linealidad** en el espacio de números *fuzzy*
- ✦ La **falta de orden completo aceptable** entre números *fuzzy*
- ✦ La **falta de modelos realistas para distribuciones de NFA**
- ✦ Algunos resultados límite relevantes para realizar inferencias **no llevan necesariamente a NFA**

Ventajas del empleo de las herramientas básicas



Pueden particularizarse muchos métodos existentes o por desarrollarse del **Análisis de Datos Funcionales** para analizar datos *fuzzy*



Debe tenerse cuidado para que los resultados particulares no salgan del marco de los datos *fuzzy*

¿Qué hacer si falla esa particularización?

Habrá que desarrollar técnicas *ad hoc*

Ventajas del empleo de las herramientas básicas



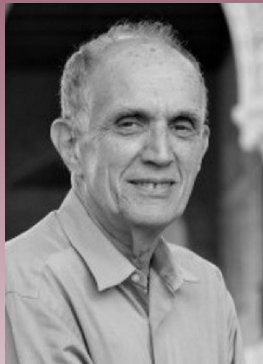
Pueden particularizarse muchos métodos existentes o por desarrollarse del **Análisis de Datos Funcionales** para analizar datos *fuzzy*



Debe tenerse cuidado para que los resultados particulares no salgan del marco de los datos *fuzzy*

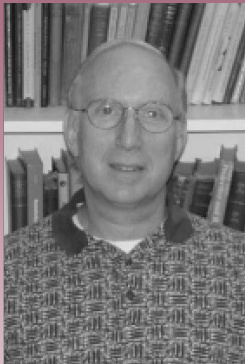
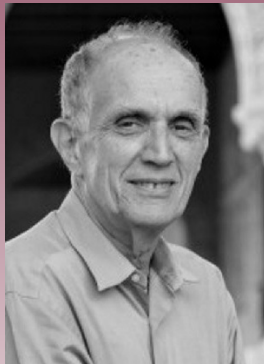
¿Qué hacer si falla esa particularización?

Habrá que desarrollar técnicas *ad hoc*



A finales de los 70 del siglo XX, Efron desarrolló el *bootstrap* para aproximar la distribución de algunos elementos aleatorios cuando algunas suposiciones no son válidas

A principios de los 90, Giné y Zinn desarrollaron una aproximación *bootstrap* del TLC para elementos aleatorios generalizados



A finales de los 70 del siglo XX, Efron desarrolló el *bootstrap* para aproximar la distribución de algunos elementos aleatorios cuando algunas suposiciones no son válidas

A principios de los 90, Giné y Zinn desarrollaron una aproximación *bootstrap* del TLC para elementos aleatorios generalizados

Metodología existente



Algunos estudios para el Análisis de Datos *Fuzzy* basados en NFA (desarrollados desde finales de los 90)



Estudios teóricos y basados en simulación (métodos, algoritmos, *software*, etc.)

<http://bellman.ciencias.uniovi.es/smile+codire>



INFERENCIAS SOBRE MEDIAS/VARIANZAS DE NFA



ESTADÍSTICA ROBUSTA CON DATOS FUZZY



ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA 'FORMA' DE LOS DATOS FUZZY



ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE DISTINTAS ESCALAS DE MEDIDA



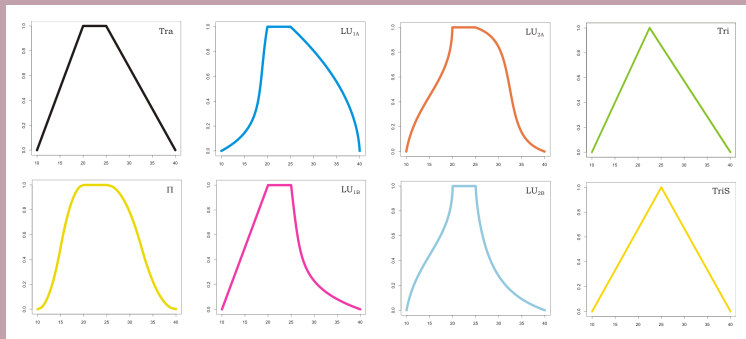
...



EJEMPLO DE ESTUDIO BASADO EN SIMULACIÓN

Sensibilidad respecto de la forma de los datos *fuzzy*

Idea directriz: Estudios de simulación *ad hoc* + test de igualdad de medias tipo Aumann para comparar conclusiones con datos trapezoidales y datos con forma *LU* (Lubiano *et al.*, 2017)





EJEMPLO DE ESTUDIO BASADO EN SIMULACIÓN

Sensibilidad respecto de la forma de los datos *fuzzy*

p -valores de los contrastes bimestrales
para datos trapezoidales vs frente a datos *fuzzy* tipo *LU*

	Tra vs II	Tra vs LU_{1A}	Tra vs LU_{1B}	Tra vs LU_{2A}	Tra vs LU_{2B}	Tra vs Tri	Tra vs TriS
SAMPLE 1	0.946	0.788	0.823	0.904	0.759	0.583	0.557
SAMPLE 2	0.957	0.791	0.831	0.926	0.770	0.654	0.661
SAMPLE 3	0.955	0.810	0.832	0.931	0.748	0.594	0.589
SAMPLE 4	0.959	0.838	0.844	0.935	0.779	0.620	0.600
SAMPLE 5	0.926	0.752	0.787	0.878	0.692	0.613	0.615
SAMPLE 6	0.966	0.835	0.862	0.944	0.799	0.610	0.601
SAMPLE 7	0.954	0.804	0.809	0.904	0.766	0.721	0.696
SAMPLE 8	0.955	0.834	0.812	0.908	0.761	0.643	0.634
SAMPLE 9	0.960	0.825	0.809	0.911	0.741	0.626	0.632
.....

⇒ las diferencias entre las medias *fuzzy* no son significativas
para la mayoría de los niveles de significación
(apoyo al empleo de trapezoidales)

▷ Se extraerían conclusiones similares al contrastar la igualdad de varianzas



EJEMPLO DE ESTUDIO BASADO EN SIMULACIÓN

Sensibilidad respecto de la escala de medida

p -valores *bootstrap* de los contrastes de igualdad de medias de dos muestras ligadas entre respuestas simuladas con datos *fuzzy* (FRS) vs respuestas según escala tipo Likert de 5 puntos (con la codificación numérica usual)

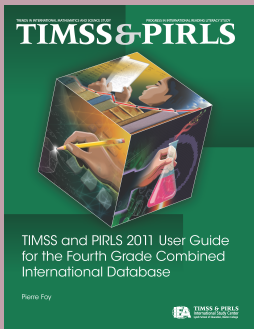
	$n = 10$	$n = 30$	$n = 100$
MUESTRA 1	0.076	0.000	0.000
MUESTRA 2	0.019	0.000	0.000
MUESTRA 3	0.004	0.009	0.000
MUESTRA 4	0.018	0.001	0.000
MUESTRA 5	0.007	0.000	0.000
.....

⇒ las diferencias entre las medias de las dos escalas (*fuzzy* y Likert) son significativas para la mayoría de los niveles de significación
(las conclusiones estadísticas difieren mucho según la escala)

Ejemplos (real y sintético)

Ejemplo de análisis de datos *fuzzy* del mundo real

Ejemplo ilustrativo del mundo real: análisis de las respuestas de un cuestionario con ítems basados en escala Likert y en FRS



Ejemplo ilustrativo del mundo real: análisis de las respuestas de un cuestionario con ítems basados en escala Likert y en FRS

Son cuestionarios estándar en lo que concierne a los ítems, muchos de ellos con respuestas basadas en una escala tipo Likert de 4 puntos

TIMSS 2011

**Student
Questionnaire**

Mathematics in school

MS1 _____

How much do you agree with these statements about learning mathematics?

Fill one circle for each line.

Disagree a lot	Disagree a little	Agree a little	Agree a lot
↓	↓	↓	↓

c) My teacher is easy to understand -- ○ ——— ○ ——— ○ ——— ○

Ejemplo ilustrativo del mundo real: análisis de las respuestas de un cuestionario con ítems basados en escala Likert y en FRS

Se han adaptado 9 ítems del Cuestionario del Estudiante TIMSS/PIRLS-2011 combinando respuestas Likert + FRS

	ITEMS	
READING	R.1	I like to read things that make me think
	R.2	I learn a lot from reading
	R.3	Reading is harder for me than any other subject
MATH	M.1	I like math
	M.2	My teacher is easy to understand
	M.3	Math is harder for me than any other subject
SCIENCE	S.1	My teacher taught me to discover science in daily life
	S.2	I read about science in my spare time
	S.3	Science is harder for me than any other subject

Ejemplo ilustrativo del mundo real: análisis de las respuestas de un cuestionario con ítems basados en escala Likert y en FRS

Se han adaptado 9 ítems del Cuestionario del Estudiante TIMSS/PIRLS-2011 combinando respuestas Likert + FRS

		ITEMS	
READING	R.1	I like to read things that make me think	
	R.2	I learn a lot from reading	
	R.3	Reading is harder for me than any other subject	
MATH	M.1	I like math	
	M.2	My teacher is easy to understand	
	M.3	Math is harder for me than any other subject	
SCIENCE	S.1	My teacher taught me to discover science in daily life	
	S.2	I read about science in my spare time	
	S.3	Science is harder for me than any other subject	

Ejemplo ilustrativo del mundo real: análisis de las respuestas de un cuestionario con ítems basados en escala Likert y en FRS

Se han adaptado 9 ítems del Cuestionario del Estudiante TIMSS/PIRLS-2011 combinando respuestas Likert + FRS

formato ordenador →

formato papel

↓

Mathematics in school

Items about mathematics

Item 11:

How much do you agree with this statement:
I like mathematics.

Answer:

Mathematics

How much do you agree with these statements about learning mathematics?

M.2. My teacher is easy to understand

1. Disagree a lot Disagree a little Agree a little Agree a lot

2. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

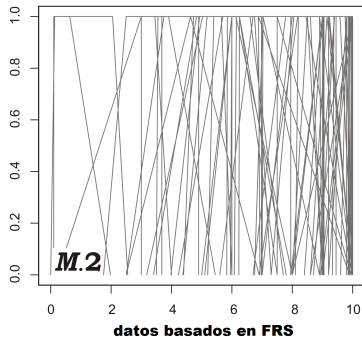
Ejemplo ilustrativo del mundo real: análisis de las respuestas de un cuestionario con ítems basados en escala Likert y en FRS

El cuestionario se ha llevado a cabo sobre 60 alumnos de cuarto de Primaria (niños de 9 años) del Colegio San Ignacio de Oviedo

M.2

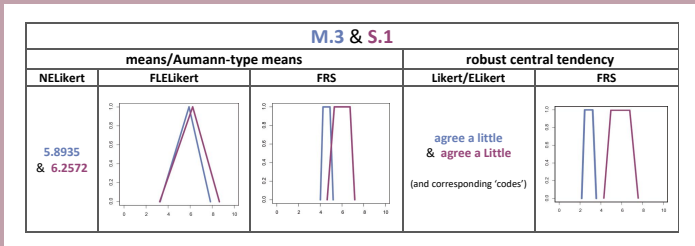
Likert resp.	abs. freq.
disagree a lot	2
disagree a little	4
agree a little	19
agree a lot	41

datos basados en escala Likert



Comparación DESCRIPTIVA de las respuestas a M.3 y S.1

comparación de medias y comparación de medianas



✓ DIFERENCIA ENTRE LAS RESPUESTAS 'CENTRALES'

Con las escalas tipo Likert y lingüística *fuzzy* las medias de las respuestas a M.3 y S.1 están muy cercanas y las medianas coinciden, mientras que con la FRS las respuestas media y mediana están más separadas (especialmente para la mediana)

Ejemplo sintético









Ejemplo basado en simulaciones: comparación de escalas mediante el índice α de Cronbach ($k = \#$ ítems, $n = \#$ respondientes)

porcentajes	$n = 30$			$n = 50$			$n = 100$			$n = 300$		
	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$
$\alpha_{FRS} > \alpha_{VAS}$	97.5	99.6	99.7	99.3	99.9	100	99.9	100	100	100	100	100
$\alpha_{VAS} > \alpha_{NEL}$	85.5	95.4	98.3	89.8	98.0	99.5	96.0	99.8	99.9	99.1	100	100
$\alpha_{NEL} > \alpha_{FLS}$	79.8	89.5	93.4	86.2	94.3	97.8	91.5	98.0	99.6	97.9	99.9	100

Ejemplo sintético

Ejemplo basado en simulaciones: comparación de escalas mediante el índice α de Cronbach ($k = \#$ ítems, $n = \#$ respondientes)

porcentajes	$n = 30$			$n = 50$			$n = 100$			$n = 300$		
	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$
$\alpha_{FRS} > \alpha_{VAS}$	97.5	99.6	99.7	99.3	99.9	100	99.9	100	100	100	100	100
$\alpha_{VAS} > \alpha_{NEL}$	85.5	95.4	98.3	89.8	98.0	99.5	96.0	99.8	99.9	99.1	100	100
$\alpha_{NEL} > \alpha_{FLS}$	79.8	89.5	93.4	86.2	94.3	97.8	91.5	98.0	99.6	97.9	99.9	100














ESCALA DE MEDIDA	marco de valoración	ejemplo de respuesta	capta imprecisión intrínseca	capta diferencias individuales	tendencia mayoritaria de α
FLEL			parcialmente	NO ✗	^
NEL			NO ✗	NO ✗	^
EVA/VAS			NO ✗	Sí ✓	^
FRS			Sí ✓	Sí ✓	^

CONCLUSIONES FINALES

- Una FRS es una escala doblemente continua (vertical y horizontalmente) ⇒ los valores en una FRS reflejan la 'localización' y captan la imprecisión intrínseca a la valoración
- Las FRS permiten captar las diferencias individuales entre quienes establecen las valoraciones; no se pierde información estadística relevante (“... *precisiation of what is imprecise...*”)
- Las FRS son más ricas y expresivas que cualquier escala basada en lenguaje natural (inevitablemente finito) o en su codificación (“... *something can be meaningful although we cannot name it...*”)
- Los valores en las FRS admiten un buen manejo computacional
- El empleo de los NFA como generador de datos de magnitudes imprecisas permite conservar la mayoría de las nociones clave del razonamiento probabilístico/estadístico
- Recomendable el empleo de FRS+NFA para analizar datos imprecisos, cuando las implicaciones sean trascendentes
- Software: Los paquetes en R *SAFD* (Statistical Analysis of Fuzzy Data) y *FuzzyStatTra* (Statistical Methods for Trapezoidal Fuzzy Numbers) implementan casi todos los cálculos asociados a la metodología



REFERENCIAS

-  Bertoluzza C, Corral N, Salas A (1995) On a new class of distances between fuzzy numbers. *Math & Soft Comput.* **2**: 71–84
-  Efron B (1979) Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Ann. Statist.* **7**: 1–26
-  Féron R (1976) Ensembles aléatoires flous. *CRAS, Ser A* **282**: 903–906
-  Giné E, Zinn J (1990) Bootstrapping general empirical measures. *Ann. Probab.* **18**: 851–869
-  González-Rodríguez G, Colubi A, Gil MA (2012) Fuzzy data treated as functional data. A one-way ANOVA test approach. *Comp. Stat. Data Anal.* **56**(4): 943–955
-  Lubiano MA, Montenegro M, Sinova B, De la Rosa de Súa S, Gil MA (2016) Hypothesis testing for means in connection with fuzzy rating scale-based data: algorithms and applications. *Eur. J. Oper. Res.* **251**: 918–929
-  Lubiano MA, Salas A, Carleos C, De la Rosa de Súa S, Gil MA (2017) Hypothesis testing-based comparative analysis between rating scales for intrinsically imprecise data. *Int. J. Appr. Reas.* **88**: 128–147
-  Lubiano MA, Salas A, Gil MA (2017) A hypothesis testing-based discussion on the sensitivity of means of fuzzy data with respect to data shape. *Fuzzy Sets Syst.* **328**: 54–69
-  Puri ML, Ralescu DA (1985) The concept of normality for fuzzy random variables. *Ann. Probab.* **13**: 1373–1379
-  Puri ML, Ralescu DA (1986) Fuzzy random variables. *J. Math. Anal. Appl.* **114**: 409–422
-  Trutschnig W, Lubiano MA (2015-last update) SAFD: Statistical Analysis of Fuzzy Data (<https://CRAN.R-project.org/package=SAFD>)
-  Zadeh LA (1975) The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part 1. *Inform. Sci.* **8**: 199–249; Part 2. *Inform. Sci.* **8**: 301–353; Part 3. *Inform. Sci.* **9**: 43–80
-  Zadeh LA (2008) Is there a need for fuzzy logic? *Inform. Sci.* **178**: 2751–2779



Universidad
de Navarra

INSTITUTO DE CIENCIA DE LOS DATOS E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

JEDE 6

VI Congreso Científico de Jóvenes
en Diseño de Experimentos y Ciencia de Datos