

# Dinámica de un medio granular agitado verticalmente

José Martín Pastor Gutiérrez  
Departamento de Física y Matemática Aplicada  
Universidad de Navarra

Diciembre, 2005



**D. Ángel Garcimartín y D. Diego M. Maza**, Doctores en Ciencias Físicas del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra

**CERTIFICAN:** que el presente Trabajo de Investigación, “Dinámica de un medio granular agitado verticalmente” ha sido realizado bajo nuestra dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, por D. José Martín Pastor Gutiérrez.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos la presente certificación en Pamplona, el cinco de diciembre de dos mil cinco.

Fdo.: Ángel Garcimartín

Fdo.: Diego M. Maza



## Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a Diego Maza y Ángel Garcimartín la ayuda que me han prestado para la elaboración de este trabajo y toda la paciencia que han tenido conmigo. Durante todo este tiempo, no solo me han ayudado en el trabajo diario con sus consejos y sugerencias, también me han tratado con inmenso cariño y comprensión. De Iker Zuriguel tampoco me puedo olvidar, él estuvo conmigo los primeros días enseñándome a dar los primeros gateos y más tarde prestándome toda su experiencia. A mis compañeros “granulares” les quiero agradecer no sólo la ayuda que me han dado, sino también su amistad. Sin ellos no lo hubiese podido hacer.

Quiero agradecer a todos los miembros del departamento la acogida que tuvieron conmigo durante mis primeros meses de estancia en Pamplona, y toda la atención e interés que diariamente muestran conmigo: Héctor Mancini, Pilar Ayucar, Roberto Arévalo, Ángela Bernardini, Sergio Ardanza, Jean Bragard, Javier Burguete, María Jesús Chasco, Emilio Díaz, Pedro Elizalde, Jorge Elorza, Maxi Giuliani, Wenceslao González, Álvaro Janda, Manu Mancini, Cristian Mankoc, Iván Martínez, Montserrat Miranda, Carmen Palacios, Antonio Peláez, Alberto de la Torre, Gerard Vidal, Cecilia Wolluscheck y María Yoldi. También quiero agradecer a Paulina Cuello y a Cristina Arcos todo el apoyo que me han dado. Quiero hacer una mención muy especial a Carlos Pérez que ya no está con nosotros pero que nos cuida desde el cielo.

A la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra agradezco las becas que me han concedido durante los cursos 2003-2004, 2004-2005 y durante el presente 2005-2006.

Finalmente quiero agradecer a mi familia todo lo que he recibido de ellos:

a mi tío Dioni, a mi tío Rafa y mi tía Ceci, a mis primos Rafita y Noelia, al Panata y a Montse, que es más que una hermana. Una mención muy especial se merecen también mis amigos, sobretodo Alfonso, que siempre están ahí.

Por último le quiero dedicar este trabajo a mi padre por darlo todo por mí, a mi tía Paca que me ha mimado tanto y a madre que siempre la tengo presente.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Reseña histórica . . . . .	1
1.2. Características de un medio granular . . . . .	2
1.2.1. Disipación de energía . . . . .	3
1.2.2. Cadenas de fuerza . . . . .	3
1.3. Convección granular . . . . .	4
1.4. Explicaciones para la convección granular . . . . .	6
1.4.1. Influencia de las paredes en el movimiento convectivo . . . . .	6
1.4.2. Influencia de aire en el movimiento convectivo . . . . .	8
1.4.3. Convección térmica. . . . .	9
1.5. Inestabilidades espaciales y temporales . . . . .	10
1.5.1. Inestabilidades temporales. Modelo de la bola inelástica . . . . .	10
1.5.2. Diagrama de bifurcaciones en el IBBM . . . . .	13
<b>2. Sistema Experimental</b>	<b>17</b>
2.1. Medio granular . . . . .	17
2.2. Sistema mecánico y vibrador . . . . .	18
2.3. Sistema de medida . . . . .	19
2.4. Medida del tiempo de vuelo . . . . .	20
2.4.1. Adquisición de datos . . . . .	21
2.4.2. Análisis de los datos . . . . .	22
2.5. Medida de la posición de los granos cerca de las paredes laterales . . . . .	23
2.5.1. <i>Particle tracking</i> . . . . .	24
<b>3. Resultados</b>	<b>27</b>
3.1. Tiempo de vuelo . . . . .	27
3.1.1. Influencia del espesor de la capa . . . . .	29
3.1.2. Influencia de la interacción entre partículas . . . . .	30
3.1.3. Influencia del gas intersticial . . . . .	31
3.2. Comparación con el IBBM . . . . .	32
3.2.1. Existencia del gas intersticial . . . . .	34

---

3.2.2.	Presencia de los efectos de fricción . . . . .	37
3.2.3.	Duración finita de la colisión . . . . .	38
3.2.4.	Efectos combinados . . . . .	43
3.3.	Trayectorias resueltas en el tiempo . . . . .	44
3.3.1.	Movimiento en un ciclo . . . . .	45
<b>4.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
4.1.	Tiempos de vuelo . . . . .	51
4.2.	Modelización de los tiempos de vuelo . . . . .	52
4.3.	Movimiento resuelto en el tiempo . . . . .	53
4.4.	Futuras investigaciones . . . . .	54
	<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Existen muchas definiciones distintas para un medio granular, ya que en función del problema que nos ocupe, podremos definir a este tipo de medio de una u otra forma. Sin embargo, todas estas definiciones tienen en común que consideran a los medios granulares como medios divididos, cuyas divisiones están lo suficientemente próximas como para que puedan interactuar entre sí.

A pesar de esta aparente sencillez, los medios granulares participan en multitud de fenómenos que no se entienden todavía de forma completa. Ejemplos no nos faltan: ¿por qué necesitamos agitar el salero para salar nuestra comida? ¿Por qué las llaves están siempre en el fondo de la mochila? ¿Por qué se forman atascos de tráfico en las vías de acceso de las grandes ciudades? Quizás, el principal motivo de que, tras años de investigación, existan todavía lagunas en el conocimiento de los medios granulares, se debe al elevado número de partículas que forman el medio y la compleja interacción entre ellas.

A continuación vamos a hacer un breve resumen de la evolución histórica de la física de los medios granulares. Posteriormente describiremos algunas propiedades útiles de este tipo de medios para entender el problema que nos ocupa: la convección granular.

### 1.1. Reseña histórica

Una de las primeras observaciones de la física de los medios granulares que nos ha llegado de la antigüedad se debe al filósofo y poeta Lucrecio, quien hacia el año 55 a.C., asemejaba el flujo de semillas de adormidera al de un líquido. Posteriormente, en pleno renacimiento italiano, Leonardo da Vinci diseñó un experimento basado en arena para estudiar la fricción entre

los cuerpos. Pero no fue hasta finales del siglo XVIII cuando C.A. Coulomb cimentó la física de los medios divididos con un estudio de la estabilidad de estructuras arquitectónicas que resulta de la fricción entre las piedras [1]. Ya en el siglo XIX tanto E. Chladni, como C. Öersted, de manera independiente, estudiaron el diferente comportamiento de distintos polvos sobre la superficie de un violín en función del tamaño y densidad de las partículas, estableciendo una clasificación que perdura hasta hoy día: los patrones de Chladni. También, M. Faraday [2] reportó las inestabilidades hidrodinámicas que aparecen en un medio granular al que se le somete a vibración, y O. Reynolds [3] describió cómo al dilatarse un medio granular aumenta el espacio libre entre los granos. Este fenómeno se conoce como dilatación de Reynolds y es la responsable de que al caminar en una playa húmeda nuestras pisadas hagan que la arena se seque en torno al pie. En los últimos años del siglo XIX, H.A. Janssen [4] propuso un modelo para la redistribución de la presión dentro de un medio granular confinado por paredes. Ya en el siglo XX, son de destacar los trabajos tanto R.A. Bagnold [5] (formación de dunas de arena) como los R. L. Brown & J.C. Richards [6] (flujos en la descarga de silo) cuyas publicaciones se han convertido en obras de referencia.

Ya en la década de los ochenta del siglo pasado ocurre una revolución en la física de los medios granulares. Por sugerencia del premio Nobel P.G. de Gennes, numerosos laboratorios franceses comienzan el estudio sistemático de los medios granulares. Tras ellos otros tantos en todo el mundo comienzan a trabajar en el campo de los medios divididos. Como resultado el número de publicaciones en el campo de los medios granulares sufrió un drástico incremento.

En estos últimos años se han estudiados diversos fenómenos que aparecen en la dinámica y estática de un medio granular. Pero estos trabajos se han encontrado con la misma dificultad: el elevado número de partículas que constituye un medio granular y que hasta el momento hace que no exista un marco teórico único aplicable a todos los fenómenos observados, como ocurre, por ejemplo, en la física de los fluidos. Cada problema en particular es abordado de manera distinta y con distintas analogías a problemas ya conocidos en otros campos de la física.

## 1.2. Características de un medio granular

A continuación vamos a describir algunas características de los medios granulares que serán de utilidad en los siguientes capítulos.

### 1.2.1. Disipación de energía

Un medio granular es por naturaleza un medio altamente disipativo. Imaginemos el siguiente experimento<sup>1</sup>: dejamos caer una pelota de tenis desde cualquier altura,  $h_{inicial}$ . Tras rebotar con el suelo medimos la altura máxima que alcanza tras el bote,  $h_{final}$ . Por conservación de la energía mecánica, la altura desde la que lanzamos la pelota es proporcional a la energía cinética antes del choque,  $E_{inicial}$ , y la que alcanza después lo es a la energía inmediatamente después del choque,  $E_{final}$ . Llamaremos *coeficiente de restitución* al siguiente cociente.

$$\epsilon = \frac{E_{final}}{E_{inicial}} = \frac{h_{final}}{h_{inicial}}, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1$$

El coeficiente de restitución da idea de cuánta energía pierde un cuerpo en una colisión, es decir; cuando  $\epsilon = 1$  la colisión es completamente elástica y cuando  $\epsilon = 0$  es completamente inelástica. Pues bien, continuemos con el experimento y lancemos dentro de una bolsa cerrada dos pelotas considerándolas como un solo objeto. Ahora el coeficiente de restitución que medimos es menor porque las pelotas han chocado entre ellas perdiendo energía en los choques. Finalmente lancemos una bolsa con 50 pelotas. Podremos comprobar que la altura que alcanza esta bolsa es muy pequeña comparada con la altura que alcanza una sola pelota.

$$\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_\infty \approx 0$$

Por muy grande que sea el coeficiente de restitución de una sola partícula, son tantas las colisiones entre los constituyentes de un medio granular que podemos suponer que este tipo de medios son fuertemente disipativos y el choque con otro cuerpo puede considerarse inelástico.

### 1.2.2. Cadenas de fuerza

Cuando decimos de un medio granular que es denso o diluido nos referimos a la proporción del volumen total del medio ocupado por granos, que es la llamada *fracción de compactación*,  $\phi$ .

$$\phi = \frac{V_{granos}}{V_{total}}$$

La máxima compactación que se puede encontrar en la naturaleza para granos del mismo tamaño corresponde al empaquetamiento hexagonal compacto, con  $\phi = 0,74$ . Para empaquetamiento al azar, como se da en la mayoría

<sup>1</sup>Consideramos despreciable la disipación de energía por rozamiento con el aire

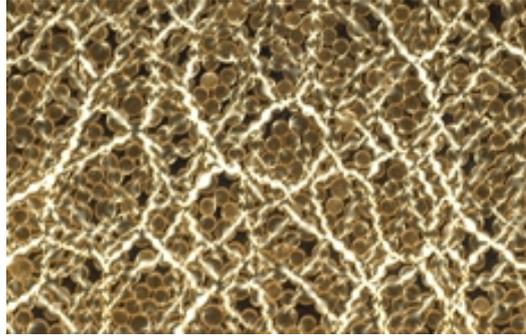


Figura 1.1: Al colocar un medio granular entre dos polarizadores con sus respectivos ejes cruzados y al ser iluminado por un costado, por el otro observamos iluminados los granos en los que se acumula el esfuerzo debida birrefringencia inducida por la presión, siendo esta observación una imagen de las cadenas de fuerza. Imagen cedida por I. Zuriguel.

de los medios granulares, la máxima fracción de compactación corresponde al “*random close packing*” o empaquetamiento denso al azar, con  $\phi = 0,64$  [7]. La fracción de compactación dependerá de la distribución espacial de los granos.

Se puede definir una cadena de fuerza como la distribución de contactos entre granos que permite que el peso de un grano de la cadena se transmita exclusivamente a los granos de la misma cadena (ver figura 1.1) estando los demás granos del medio (que no pertenezcan a cualquier otra cadena) libres de esfuerzos.

Por esta razón, la presión ejercida por el propio peso de un medio granular se redistribuye hacia las paredes del contenedor. El conocido efecto Janssen [8] se puede explicar debido a que la distribución espacial de cadenas de fuerza no tienen una componente vertical privilegiada por lo que parte de la presión se dirige hacia las paredes. Son, pues, éstas las que soportan parte del peso del medio granular.

### 1.3. Convección granular

El fenómeno objeto del presente estudio es la llamada convección granular. Cuando un medio granular es agitado puede presentar un movimiento colectivo y ordenado de las partículas que lo constituyen. El caso paradigmático corresponde a una geometría cilíndrica del recipiente en el que reposa el medio granular, y una vibración sinusoidal en la dirección de la gravedad. En este caso el movimiento que presentan los granos es similar al movimiento

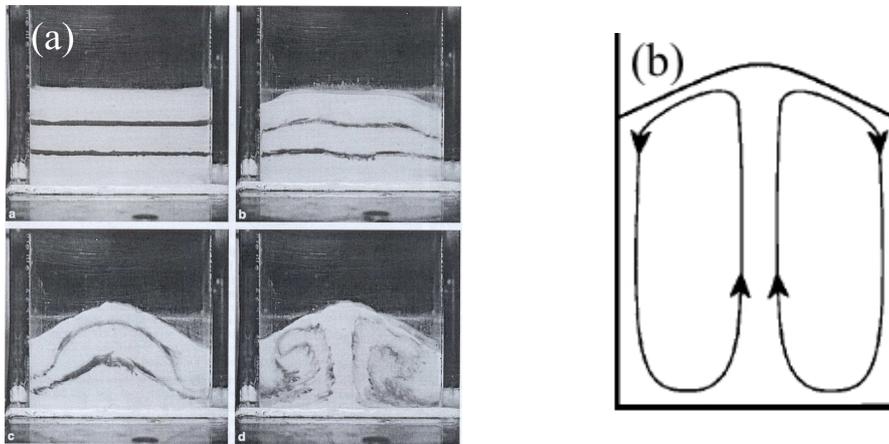


Figura 1.2: **(a)** Secuencia de imágenes en las que se aprecia la evolución temporal de un medio granular, inicialmente estratificado, sometido a una vibración sinusoidal de frecuencia 50 Hz. (a)  $t = 0$  s (b)  $t = 6$  s (c)  $t = 10$  s (d)  $t = 14$  s [9]. **(b)** En este esquema se puede apreciar como los granos ascienden por el centro de la celda y descienden cerca de las paredes deformando la superficie libre del medio.

convectivo que presenta un fluido calentado desde abajo en un recipiente de similares características. Fue M. Faraday el primero que reportó este fenómeno [2]. Observó cómo al agitar un montón de polvo, los granos ascendían por el centro y caían por los lados del talud que se formaba (ver figura 1.2).

Para que exista un movimiento convectivo en el seno de un medio granular, es necesario que éste se encuentre “fluidizado”. El estado fluidizado no es el mismo en todos los sistemas que estudia la física de los medios granulares. Por ejemplo, no es el mismo estado fluidizado el que aparece en un medio granular que está fluyendo a través del orificio de descarga de un silo [10], donde los granos próximos al orificio se mueven a una velocidad mucho mayor que el resto, que la fluidización de una capa delgada que al ser agitada vigorosamente presenta patrones superficiales [11] (ver sección 1.5), donde son únicamente los granos de la superficie los que se mueven respecto del resto de la capa. En el caso del movimiento convectivo hablamos de fluidización cuando está permitido el movimiento relativo de un grano respecto de otro. Para fluidizar el medio se suelen utilizar dos tipos de excitaciones: “tapping” y vibración.

Los “*taps*” consisten en pulsos breves y bruscos de la posición del contenedor del medio granular. El tiempo entre excitaciones consecutivas suele ser mayor que el tiempo de relajación (tiempo tras el cual las posiciones relativas de los granos no cambian). Sin embargo, en la vibración las oscilaciones del

contenedor corresponden a una función sinusoidal y la excitación es continua en el tiempo

$$z(t) = A \sin(\omega t)$$

donde  $A$  es la amplitud de la oscilación, y  $\omega = 2\pi f$  siendo  $f$  la frecuencia.

De todas las posibles variables que intervienen en el problema convectivo, se ha observado, tanto experimental como numéricamente, que el parámetro de control es la aceleración adimensional,  $\Gamma$ , que se calcula como el cociente entre la aceleración máxima que proporciona la excitación y la aceleración de la gravedad. Cuando la excitación es sinusoidal,

$$\Gamma = \frac{|a_{max}|}{g} = \frac{A\omega^2}{g} \quad (1.1)$$

Existe un valor crítico para el parámetro de control [12] a partir del cual aparece convección en el medio granular: cuando la aceleración de la oscilación forzante supera la gravedad, es decir,  $\Gamma_c^0 = 1$ . Por encima de este valor crítico, la energía suministrada por la excitación es suficiente como para que algunas zonas del medio granular estén fluidizadas y se organice un movimiento colectivo de los granos que es capaz de deformar la superficie libre del medio (ver figura 1.2 (b)).

## 1.4. Explicaciones para la convección granular

A continuación describiremos cuáles pueden ser los posibles orígenes de la convección en un medio granular. A pesar de la gran cantidad de trabajos y de los esfuerzos que se han dedicado a comprender este movimiento colectivo, no existe un acuerdo sobre la causa que lo origina. Este es un problema centenario aún sin resolver.

### 1.4.1. Influencia de las paredes en el movimiento convectivo

Los primeros indicios sobre el origen del movimiento convectivo en un medio agitado verticalmente vinieron de la mano de P. Evesque y J. Rajchenbach en 1989. Estos autores, estudiando la formación de taludes de arena [13], propusieron que en un ciclo de excitación se podían diferenciar dos regímenes:

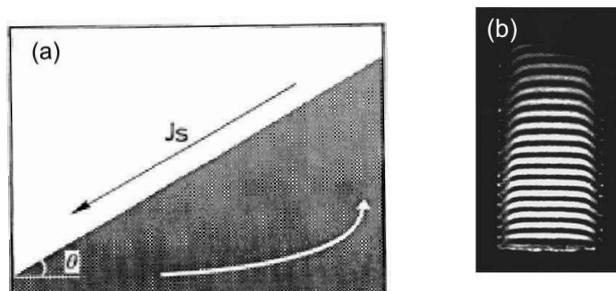


Figura 1.3: **(a)** Un talud se forma porque los granos ascienden por las paredes cerca de las paredes del contenedor y descienden en avalanchas por la superficie inclinada [13] **(b)** Perfiles de velocidad deformados por las paredes en un medio granular en convección. Esta imagen ha sido tomada con técnicas de resonancia magnética nuclear cuando el medio es excitado con “taps” [14].

**Régimen pasivo** Cuando la celda se mueve hacia arriba, el medio granular está compactado siendo imposible el movimiento relativo entre las partículas. Este comportamiento nos permite considerar el medio como un sólido.

**Régimen activo** Cuando la celda se mueve hacia abajo con una aceleración  $\gamma$  mayor  $g$ , la compactación es menor, por lo que el movimiento relativo entre los granos está permitido. El sistema en este caso se considera fluidizado. La aceleración que sienten los granos cerca de las paredes laterales del contenedor no es la de la gravedad, sino una gravedad aparente,  $g_a$ , que es la aceleración del contenedor menos la aceleración de la gravedad.

$$g_a \sim \gamma - g$$

Esta aceleración aparente tiene sentido contrario a la gravedad en el régimen activo proporcionando una fuerza que hace que los granos suban cerca de las paredes y caigan en avalanchas por el talud que se forma (ver figura 1.3 (a)).

El conocido como “grupo de Chicago” publicó en 1995 [14] resultados experimentales utilizando técnicas de resonancia magnética nuclear que demostraban que era la existencia de paredes laterales las que provocaban el movimiento convectivo (ver figura 1.3 (b)). Otros trabajos como el de H.J. Herrmann [15] demuestran numéricamente que incluso para granos ideales sin fricción se encuentran patrones convectivos en un medio granular vibrado verticalmente (ver figura 1.4).

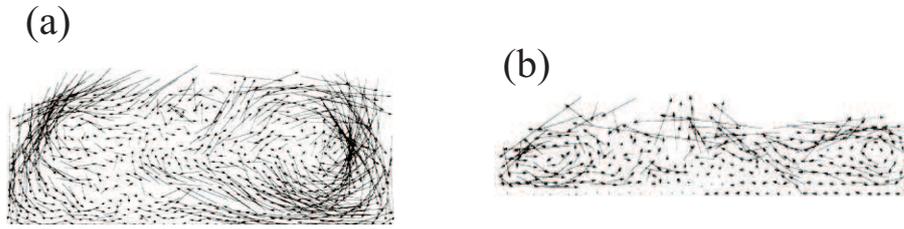


Figura 1.4: Campo de velocidades de un medio granular bidimensional vibrado verticalmente. **(a)** Cuando los granos tienen rozamiento. **(b)** Cuando no tienen rozamiento [15]. Se puede observar que el tamaño de las estructuras convectivas es menor en el caso sin rozamiento.

### 1.4.2. Influencia de aire en el movimiento convectivo

C. Laroche y sus colaboradores estudiaron la deformación de la superficie libre al vibrar sinusoidalmente un medio granular [16]. Además observaron que a presiones del orden de  $10^{-5}$  Torr desaparecía dicha deformación. Este hecho señala indirectamente a la presencia de un gas ambiente residual como causante del movimiento convectivo. Para estos autores la fricción de los granos próximos a la pared hace que cambie la fracción de compactación en esta región. Consecuentemente la porosidad del medio granular (facilidad con la que el aire puede permear a través de él, ver sección 3.2.1) cerca de la pared es mayor que en regiones alejadas de la pared. Cuando  $\Gamma \geq 1$  la capa granular puede comenzar un vuelo libre. Durante la porción del ciclo de vibración en la que el medio se aleja de la base los granos próximos a la pared son arrastrados por rozamiento formando un “gap” entre la capa de granos y la base. Éste se llena del gas atmosférico a través de la región cercana a la pared lateral, en la que la porosidad es mayor. El flujo del gas entrante arrastra además los granos hacia abajo.

Cuando el estrato granular comienza a caer, son los granos próximos a la pared los que primero lo hacen, ya que han sido arrastrados hacia abajo anteriormente, formando un región sólida (no fluidizada). Esta región avanza dentro del medio como un frente de compactación que obliga a desviar la trayectoria de los granos de la región fluidizada hacia el centro de la capa granular (ver figura 1.5). La forma del “gap” es inhomogénea, ya que su espesor es menor cerca de las paredes laterales y mayor en el centro de la capa. Además, el gas atmosférico encerrado tiende a salir por el centro de la capa por estar esta zona todavía fluidizada (la porosidad es mayor que en la región sólida) arrastrando los granos hacia arriba.

Después de un ciclo de excitación los granos cerca de las paredes han sido arrastrados hacia abajo y los que están en el centro de la capa granular hacia

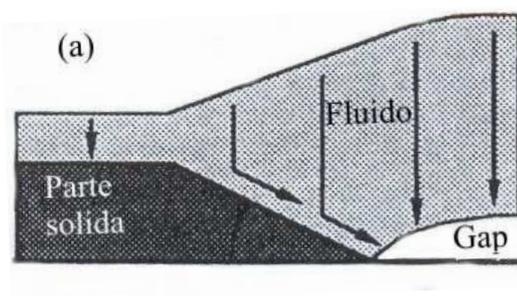


Figura 1.5: La parte sólida avanza en el medio granular como un frente de compactación formando un talud sólido que desvía el flujo de partículas de la zona fluidizada hacia el centro de la capa [16].

arriba, formando así un rollo convectivo (ver figura 1.2).

### 1.4.3. Convección térmica.

Mediante analogías con sistemas hidrodinámicos, muchos autores han intentado construir un marco formal donde interpretar los comportamientos a gran escala de los medios granulares. Se han desarrollado distintos modelos en torno a al concepto de la *temperatura granular*.

Esta se suele definir a partir de la energía cinética de los granos en la capa granular, al igual que se hace en la teoría cinética de gases [17]. En este tipo de modelos la manera en se que suministra energía a las partículas es mediante una pared térmica, la cual aumenta la velocidad de un grano cuando choca con ella. La energía se difunde en el medio mediante choques entre granos generándose así un gradiente de temperatura granular desde la pared térmica hacia el interior del medio.

Este tipo de teorías se suelen utilizar en el estudio numérico y teórico de medios granulares diluidos, en los que existen pocas partículas, prediciendo cualitativamente bien cuál va a ser el comportamiento del medio granular [18].

En el problema convectivo es necesario que aparezca en el medio un gradiente negativo de temperatura granular y variaciones en la fracción de compactación, de manera similar a lo que ocurre con la temperatura y la densidad en la convección de fluidos. R.D Wildman *et al.* utilizando técnicas de emisión de positrones [19], midió el campo de velocidades y la fracción de compactación (ver figura 1.6) en un medio granular, confirmando las hipótesis teóricas que fundamentan los modelos hidrodinámicos.

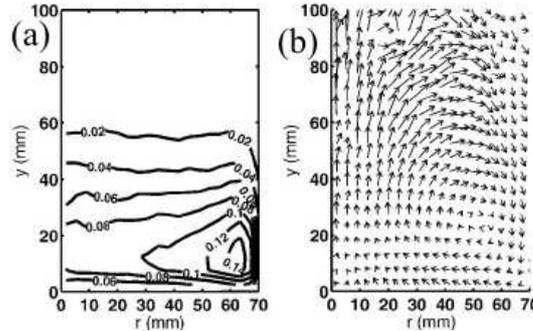


Figura 1.6: (a) Perfil de la compactación y (b) campo de velocidades para un cilindro en tres dimensiones promediando en el ángulo azimutal utilizando técnicas de emisión de positrones [19].

## 1.5. Inestabilidades espaciales y temporales

Al excitar un material granular, ya sea mediante “*taps*” o vibración sinusoidal, el sistema puede sufrir una rica variedad de inestabilidades más allá del umbral convectivo. En 1989 S. Douady *et al.* mostraron experimentalmente que a partir de un cierto valor crítico de la aceleración adimensional,  $\Gamma_c$ , el sistema sufre una bifurcación por duplicación de periodo, esencialmente igual a la que sufre un cuerpo sólido sometido a vibración [20]. Las propiedades de disipación de un medio granular lo convierten en un cuerpo perfectamente inelástico (ver sección 1.2.1). Un modelo sencillo, conocido como modelo de la bola inelástica ha sido utilizado tanto para estudiar la dinámica temporal de capas granulares delgadas, que no presentan convección aunque sí formación de estructuras en su superficie [11], como la dilatación de una capa gruesa de material granular [21].

Además, como el sistema se encuentra espacialmente extendido también puede presentar inestabilidades espaciales asociadas a ruptura de simetría traslacional entre diferentes regiones, cuya frontera se conoce como un “*kink*” [11].

### 1.5.1. Inestabilidades temporales. Modelo de la bola inelástica

Como hemos dicho anteriormente, las inestabilidades temporales que aparecen en un medio granular vibrado verticalmente se pueden describir con el modelo de la bola inelástica (en adelante lo llamaremos IBBM de las siglas en inglés *Inelastic Bouncing Ball Model*). Este modelo fue usado por primera vez por E. Fermi en un contexto completamente distinto al de los medios

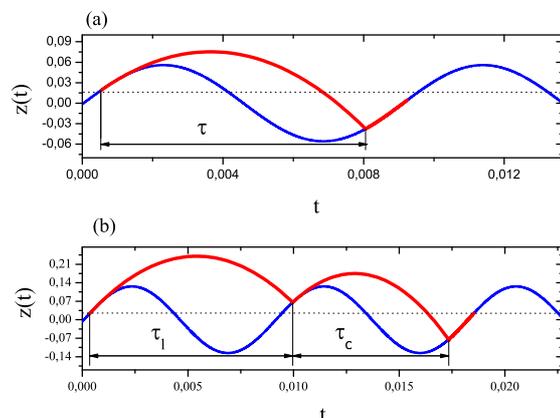


Figura 1.7: Esquema del IBBM. En azul está representada la posición de la base y en rojo la de la bola inelástica. La línea discontinua representa la amplitud a la cual la base tiene una aceleración igual a  $-g$ . **(a)** La bola realiza un vuelo parabólico durante un tiempo  $\tau$ . Choca contra la base inelásticamente permaneciendo en reposo sobre ésta. **(b)** En este caso tras un primer vuelo de duración  $\tau_1$  la bola choca inelásticamente contra la base en un instante que la aceleración de la base es menor que  $-g$ , iniciando un segundo vuelo cuya duración es  $\tau_c$ . Tras un segundo choque inelástico la bola se queda pegada a la base.

granulares (para estudiar el origen de la radiación cósmica [22]), siendo ampliamente estudiado dentro del contexto de la dinámica no lineal y el caos (ver referencias [23], [24] [25] y [26]) en el último cuarto del siglo pasado.

El modelo consiste en una bola inelástica colocada sobre una base que vibra sinusoidalmente. Cuando la aceleración de la base es igual a la gravedad<sup>2</sup>,  $-g$ , la bola se despega iniciando un vuelo parabólico. Finalmente la bola termina el vuelo en una colisión completamente inelástica con la base. Tras la colisión la bola puede quedar de nuevo pegada a la base (ver figura 1.7 (a)) si la aceleración de ésta en la colisión es mayor que la gravedad o iniciar otro vuelo parabólico (ver figura 1.7 (b)) en caso contrario.

A continuación vamos a describir detalladamente la secuencia temporal de la dinámica de la bola completamente inelástica.

<sup>2</sup>Hacemos notar que hemos elegido la gravedad con sentido negativo, siendo la aceleración de la gravedad  $-9.81 \text{ ms}^{-2}$

### Despegue

En el instante,  $t_0$ , en el que la aceleración de la base vibrante es igual a la gravedad,  $-g$ , la bola se puede despegar de la base.

$$z(t) = A \sin(\omega t) \quad ; \quad \begin{cases} v(t) = \dot{z}(t) = A\omega \cos(\omega t) \\ a(t) = \ddot{z}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (1.2)$$

$$a(t_0) = -g \quad \Rightarrow \quad -g = -A\omega^2 \sin(\omega t_0) \quad (1.3)$$

A partir de la definición de la aceleración adimensional en el caso de vibración sinusoidal (1.3), el instante en el que la bola inicia el vuelo es

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin(\Gamma^{-1}) \quad (1.4)$$

### Vuelo parabólico

El movimiento que inicia la bola tras despegar de la base es un vuelo parabólico ya que se encuentra sometida a la gravedad.

$$z(t - t_0) = z_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (1.5)$$

Siendo  $z_0$  y  $v_0$  la posición y velocidad inicial de la base en  $t_0$ .

$$\begin{cases} z_0 = A \sin(\omega t_0) = A\Gamma^{-1} = \frac{g}{\omega^2} \\ v_0 = A\omega \cos(\arcsin(\Gamma^{-1})) \end{cases} \quad (1.6)$$

Si ahora sustituimos (1.6) en (1.5) obtenemos la ecuación para la posición de la bola durante el vuelo en función de los parámetros de la vibración.

$$z(t - t_0) = \frac{g}{\omega^2} + A\omega \cos(\arcsin(\Gamma^{-1}))(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (1.7)$$

Reescribiendo (1.7) términos de la fase de vibración,  $\phi = \omega t$ .

$$z(\phi - \phi_0) = \frac{g}{\omega^2} [1 + \Gamma \cos(\arcsin(\Gamma^{-1}))(\phi - \phi_0) - \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^2] \quad (1.8)$$

### Colisión con la base

Podemos calcular<sup>3</sup> la fase en la que la bola cae sobre la base,  $\phi^*$ , igualando las expresiones para la posición de la base (1.2) y la de la bola (1.8).

$$\Gamma \sin(\phi^*) = 1 + \Gamma \cos(\arcsin(\Gamma^{-1}))(\phi^* - \phi_0) - \frac{1}{2}(\phi^* - \phi_0)^2 \quad (1.9)$$

<sup>3</sup>Hacemos notar que (1.9) es una ecuación trascendente. Para resolverla hemos utilizado métodos numéricos.

Tras la colisión inelástica, la bola pierde toda su energía y queda pegada a la base. En función de la aceleración de la base,  $a(\phi^*)$ , puede ocurrir:

$\mathbf{a}(\phi^*) > -\mathbf{g}$  Permanece pegada a la base hasta que de nuevo la aceleración de ésta sea mayor que la de la gravedad iniciando otro vuelo parabólico (ver figura 1.7(a)). El tiempo de vuelo,  $\tau$ , en este caso es

$$\tau = \frac{1}{\omega}(\phi^* - \phi_0) \quad (1.10)$$

$\mathbf{a}(\phi^*) \leq -\mathbf{g}$  La bola puede, inmediatamente tras la colisión, iniciar un nuevo vuelo con posición y velocidad inicial igual a la posición de la base en el golpe,  $\phi_0^*$  (ver figura 1.7(b)).

$$\begin{cases} z_0 = \frac{\Gamma g}{\omega^2} \sin(\phi_0^*) \\ v_0 = \frac{\Gamma g}{\omega} \cos(\phi_0^*) \end{cases} \quad (1.11)$$

Sustituyendo (1.11) en (1.5) e igualando a la posición de la base, obtenemos la fase de esta segunda colisión,  $\phi^*$ .

$$\sin(\phi^*) = \sin(\phi_0^*) + \cos(\phi_0^*)(\phi^* - \phi_0^*) - \frac{1}{2\Gamma}(\phi^* - \phi_0^*)^2 \quad (1.12)$$

Siendo ahora  $\tau$

$$\tau = \frac{1}{\omega}(\phi^* - \phi_0^*) \quad (1.13)$$

### 1.5.2. Diagrama de bifurcaciones en el IBBM

Hemos calculado el tiempo de vuelo,  $\tau$ , de la bola inelástica en función del parámetro de control,  $\Gamma$ . El resultado de este cálculo lo hemos representado en la figura 1.8. Se puede observar que al aumentar  $\Gamma$  aparece una bifurcación de tipo “*saddle node*” cuando  $\tau$  es igual al periodo de vibración,  $T$ . De todas las trayectorias accesibles, el sistema elige la más estable, que en este caso corresponde a un vuelo de duración igual a un periodo. Si aumentamos aún más  $\Gamma$ , aparece una nueva bifurcación por duplicación de periodo dando lugar a una rama de vuelos largos y otra de vuelos cortos. La bola, tras realizar un vuelo de duración mayor que  $T$ , colisiona con la base vibrante en un instante en que su aceleración es menor que  $-g$ , iniciando inmediatamente después otro vuelo de duración inferior a  $T$ .

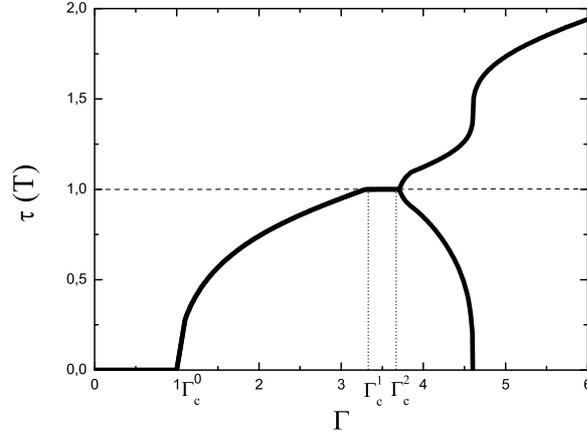


Figura 1.8: Tiempo de vuelo en unidades del periodo de vibración de una bola completamente inelástica en función del parámetro de control  $\Gamma$  tras cincuenta oscilaciones.

Llegados a este punto debemos hacer una matización: no es equivalente variar la amplitud de oscilación,  $A$ , o la frecuencia,  $\omega$ , para variar el parámetro de control,  $\Gamma = \frac{A\omega^2}{g}$ . En las expresiones para la posición y velocidad inicial del vuelo parabólico (ver ecuaciones (1.6) y (1.11)) aparece una doble dependencia en los parámetros  $\omega$  y  $\Gamma$ . Hemos elegido mantener constante  $\omega$  y variar  $A$  para calcular el tiempo de vuelo en función del parámetro de control  $\Gamma$ .

A continuación vamos a analizar en detalle el diagrama de bifurcaciones de la figura 1.8 en función de  $\Gamma$ .

$$0 \leq \Gamma < \Gamma_c^0$$

Para estos valores del parámetro de control la bola no puede despegar de la base iniciando un vuelo libre porque en ningún instante la aceleración de la base es menor que  $-g$ . Por tanto el tiempo de vuelo,  $\tau$ , es cero.

$$\Gamma_c^0 \leq \Gamma < \Gamma_c^1$$

En este caso el tiempo de vuelo es único puesto que  $a(\phi^*) > -g$  para todos los valores de  $\Gamma$ .

Cuando  $\Gamma = \Gamma_c^1$  el tiempo de vuelo es igual a un periodo.  $\Gamma_c^1$  corresponde

a la primera región de estabilidad [25] cuyo valor es

$$\Gamma_c^1 = \pi \sqrt{n^2 + \frac{1}{\pi^2}} \Big|_{n=1} = 3,2969 \quad (1.14)$$

$$\Gamma_c^1 \leq \Gamma \leq \Gamma_c^2$$

Por encima de  $\Gamma_c^1$  el sistema sufre una bifurcación de tipo “*saddle node*” donde la rama estable corresponde a  $\tau = T$ . El sistema evoluciona hasta alcanzar esta rama ajustando la fase en la que empieza,  $\phi_0$ , y termina el vuelo,  $\phi^*$ . De tal manera, que el tiempo de vuelo después de muchos ciclos de vibración tiende a  $T$  para todos los valores de  $\Gamma$  en esta región.

$\Gamma_c^2$  corresponde al primer punto fijo del modelo [27] cuyo valor es

$$\Gamma_c^2 = \pi \sqrt{n^2 + \frac{4}{\pi^2}} \Big|_{n=1} = 3,7242 \quad (1.15)$$

$$\Gamma_c^2 < \Gamma$$

Para estos valores del parámetro de control, la bola, tras despegar en  $\phi_0$  realiza un vuelo largo porque su duración,  $\tau_l$ , es mayor que un periodo. Cuando choca con la base en  $\phi_l^*$ , su aceleración satisface

$$a(\phi_l^*) < -g \quad (1.16)$$

pudiendo iniciar inmediatamente otro vuelo corto de duración,  $\tau_c$ , esta vez inferior al periodo. Aparece entonces una bifurcación en el tiempo de vuelo por duplicación de periodo.

Puesto que el vuelo corto empieza inmediatamente después de terminar el largo (para no inducir a error con la notación) utilizaremos  $\phi_c = \phi_l^*$  para denotar la fase inicial donde empieza el vuelo corto y  $\phi_l = \phi_0$  para la fase inicial del vuelo largo.

La bifurcación por duplicación de periodo se debe a que la velocidad inicial del vuelo largo,  $v_l = v(\phi_l)$ , es mayor que la velocidad inicial del vuelo corto,  $v_c = v(\phi_c)$ . Esta afirmación es sencilla de demostrar puesto que  $\tau_l > T$ , entonces

$$\phi_c = \phi_l^* = \phi_0 + \omega\tau_l = \phi_l + \omega\tau_l \Rightarrow \phi_c \pmod{2\pi} > \phi_l \pmod{2\pi} \quad (1.17)$$

Es conocido que cuando la función seno es creciente, la función coseno es decreciente y viceversa. A partir de la figura 1.7 sabemos que

$$\frac{d}{d\phi} \sin(\phi) \Big|_{\phi_l, \phi_c} > 0 \Rightarrow \cos \phi_l > \cos \phi_c \quad (1.18)$$

usando entonces la ecuación 1.11, se deduce

$$v_l > v_c \quad (1.19)$$

Por tanto, la altura máxima que alcanza la bola en el vuelo parabólico, relativa a la posición inicial, es mayor en el primer vuelo largo,  $h_l^{max}$ , que en el segundo corto,  $h_c^{max}$ ,

$$h^{max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad h_l^{max} > h_c^{max} \quad (1.20)$$

y por tanto

$$\tau_l > \tau_c \quad (1.21)$$

Al aumentar más el parámetro de control,  $\Gamma$ ,  $\tau_l$  crece y  $\tau_c$  disminuye simultáneamente. De esta manera la rama inferior de la bifurcación (la de los vuelos cortos) se hace cero, quedando sólo la rama superior (la de los vuelos largos). Para valores todavía mayores de  $\Gamma$  aparecen nuevas bifurcaciones cuando  $\tau = 2T$  (no están representadas en la figura 1.8).

En el siguiente capítulo vamos explicar el método experimental que hemos utilizado para medir el tiempo de vuelo de una capa granular vibrada verticalmente. Este experimento no es el único que hemos realizado, puesto que hemos obtenido la trayectoria resuelta en el tiempo de los granos próximo a las paredes para intentar dilucidar el origen del movimiento convectivo.

# Capítulo 2

## Sistema Experimental

El experimento que hemos realizado consiste en someter un medio granular a una vibración vertical. El medio granular utilizado son bolas de vidrio en un recipiente cilíndrico (ver figura 2.1) que hemos agitado con un vibrador electromagnético. En este sistema hemos realizado dos tipos de mediciones (ver esquema del experimento en la figura 2.2). La primera consiste en hallar el tiempo de vuelo de una capa granular a partir de la de aceleración medida en la base del recipiente. En la segunda obtenemos la posición resuelta en el tiempo de los granos cerca de las paredes usando la técnica de *particle tracking* con secuencias de imágenes grabadas mediante una cámara rápida.

### 2.1. Medio granular

Como medio granular hemos utilizado del orden de  $10^4$  bolas de vidrio de aproximadamente 0.5 mm de diámetro. Es necesario utilizar tan elevado número de partículas en el experimento para que se manifieste un movimiento colectivo del medio granular.

Para asegurarnos cierta uniformidad en el tamaño de las bolas, las hemos cribado entre dos tamices cuyas luces de malla son  $400\ \mu\text{m}$  y  $560\ \mu\text{m}$ , tomando la precaución de realizar este proceso con la suficiente antelación a cualquier experimento para evitar la electricidad estática generada en el tamizado. A partir de medidas de su tamaño hechas con una lupa binocular obtenemos un diámetro de  $0,43 \pm 0,06$  mm siendo entonces la polidispersidad en tamaños del 14 %.

La forma de las bolas es más parecida a un elipsoide de revolución que a una esfera. Sin embargo, medidas similares a las de nuestros experimento hechas con arena han proporcionado los mismos resultados. Por tanto la polidispersidad en forma y tamaño no parece que sean parámetros relevantes

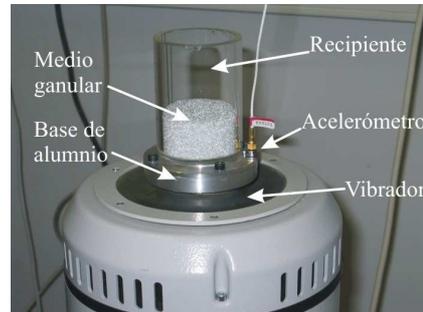


Figura 2.1: Imagen del recipiente, con una capa de medio granular, unido al vibrador . A la derecha se puede observar el acelerómetro.

en el experimento.

La geometría de la capa de material granular la caracterizaremos por la altura de la capa,  $h$ , normaliza al diámetro de una bola,  $d$ ,

$$N = h/d$$

El rango explorado va desde  $N = 20$ , que corresponde a 30 g de material granular, hasta  $N = 100$ , que corresponde a 150 g.

## 2.2. Sistema mecánico y vibrador

Como recipiente hemos utilizado un cilindro de vidrio (borosilicato) para reducir la carga electrostática generada por el rozamiento de las bolas con el contenedor. El diámetro exterior es de 60.0 mm, el interior de 51.6 mm y la pared tiene un espesor de 4.2 mm. La base es un disco del mismo material y tiene un espesor de 3 mm. La altura del contenedor cilíndrico la variamos en función de la altura de la capa de granos para reducir resonancias inducidas por la vibración en el sistema. Hemos utilizado un altura máxima de 80 mm y una mínima de 30 mm (ver figura 2.1). Con la intención de reducir la carga electrostática generada hemos rociado con un spray antiestático el contenedor.

La base del contenedor y la pared cilíndrica están pegadas entre sí utilizando un pegamento de cianocrilato. A su vez, base y pared están pegadas a una placa de aluminio que se sujeta al vibrador mediante tornillos. Es muy importante que el contenedor de vidrio y la base de aluminio estén bien centrados para evitar resonancias al ser vibrados.

Una vez preparada la celda de convección la agitamos verticalmente con un vibrador electromagnético (Tira Vib 52110,  $V$  en el esquema de la figura

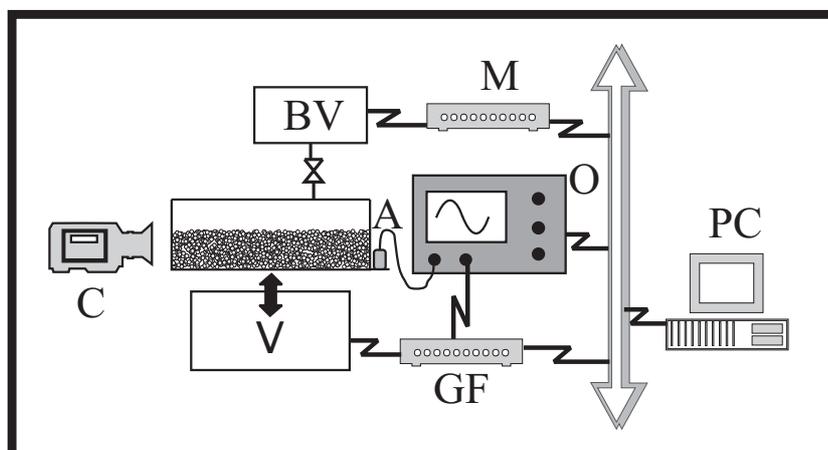


Figura 2.2: Esquema del montaje experimental

2.2). Este instrumento es capaz de suministrar una aceleración de quince veces la aceleración de la gravedad a una masa de 1 kg con una distorsión menor del 1 % y una aceleración transversal residual de menos de 0.05  $g$ . Para asegurarnos que el sistema está alineado con la dirección de la gravedad, lo nivelamos con una precisión de  $\pm 0,2^\circ$ .

El vibrador se comanda con un generador de funciones (Stanford Research DS345,  $GF$  en el esquema de la figura 2.2) mediante una señal sinusoidal de frecuencia 110 Hz y amplitud variable. Hemos seleccionado este valor de frecuencia para evitar ruidos introducidos por la red eléctrica (múltiplos de 50 Hz) y la aparición de otras inestabilidades como la formación de patrones en la superficie del material. Experimentos previos [28] han demostrado que en el rango de frecuencias entre 80 Hz y 300 Hz el comportamiento de la capa granular es cualitativamente similar.

Disponemos de un equipo para realizar vacío dentro de la celda de convección, a la que añadimos un tapa perforada (no aparece en la figura 2.1). El equipo está compuesto por una bomba rotatoria (Edwards ED50) que alcanza un valor mínimo de  $10^{-2}$  Torr y un Piranni (Edwards M7B C024-17-000) para medir la presión dentro del sistema ( $BV$  en la figura 2.2).

### 2.3. Sistema de medida

Para medir la amplitud que suministra el vibrador hemos utilizado un acelerómetro (Endevco 256-100,  $A$  en el esquema de la figura 2.2), con sensibilidad nominal de 100  $mV/g$ .

El acelerómetro lo fijamos con cianocrilato a la base de sobre la que

está pegada la celda de borosilicato (ver figura 2.1). Hemos elegido el cianocrilato por ser un pegamento muy rígido que no distorsiona la medida de la aceleración.

Registramos la señal de aceleración conectando el acelerómetro (previa etapa de amplificación que no mostramos en el esquema de la figura 2.2) a un osciloscopio digital (Hewlett-Packard HP54510, *O* en el esquema de la figura 2.2). Con este instrumento también registramos la señal sinusoidal que produce el generador de funciones para alimentar el vibrador.

El nivel de vacío lo medimos a partir de la señal eléctrica que devuelve el Pirani. Para ello usamos un multímetro (Hewlett-Packard HP 3478A, *M* en el esquema de la figura 2.2). Esta señal va desde 0 *mV* cuando  $P = 760$  Torr hasta 500 *mV* cuando  $P = 10^{-2}$  Torr.

El generador de funciones, el osciloscopio y el multímetro están conectados mediante un bus GPIB a un ordenador (*PC* en el esquema de la figura 2.2). De esta manera podemos adquirir datos y controlar todos los instrumentos.

Gracias a la colaboración con Jean-François Boudet, Hamid Kellay y Yacine Amorouchene en el CPMOH de la Universidad de Burdeos, realizada en el marco de una Acción Integrada, tuvimos a nuestra disposición una cámara alta de velocidad (Motionscope Redlake, *C* en el esquema de la figura 2.2). Utilizando un macro pudimos grabar la posición de los granos próximos a la pared lateral de la celda a 1000, 2000 y 4000 imágenes por segundo.

## 2.4. Medida del tiempo de vuelo

Tal como se indicó en el capítulo de introducción, una capa granular suficientemente gruesa se puede considerar un medio completamente inelástico. Cuando la aceleración adimensional de la excitación,  $\Gamma$ , es mayor que uno, la capa puede realizar un vuelo parabólico durante un tiempo  $\tau$ . Nuestro objetivo es medir experimentalmente este tiempo de vuelo.

Observaciones experimentales demuestran que la señal de la aceleración en la base de la celda medida con el acelerómetro, cuando  $\Gamma < 1$  es perfectamente sinusoidal. Pero al incrementar el parámetro de control aparece un pequeño pico para  $\Gamma \geq 1$  (ver figura 2.3). Este pico es debido a la colisión entre la capa y la base de la celda cuando la capa aterriza al terminar el vuelo. Midiendo la fase en la que se produce la señal del impacto, podremos conocer el tiempo de vuelo.

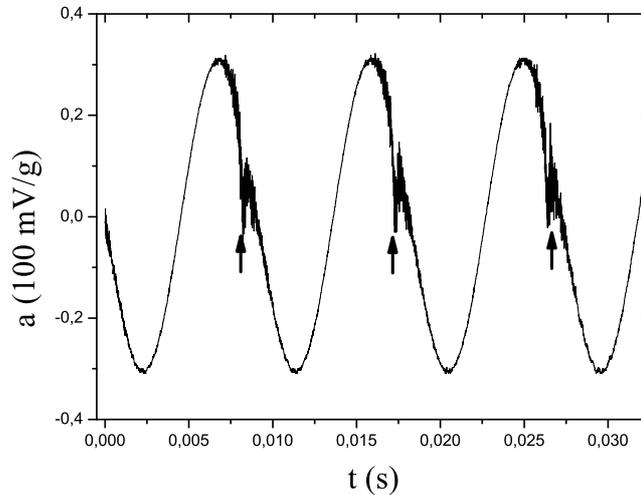


Figura 2.3: Aceleración medida en la base del contenedor. El medio granular tiene una altura de  $N = 33$  ( $m = 50g$ ) y  $\Gamma = 3,31$ . Las flechas señalan el instante donde aparece el pico causado por la colisión.

### 2.4.1. Adquisición de datos

Para medir la fase del impacto registraremos la señal de aceleración que medimos con el acelerómetro. El proceso de adquisición es el siguiente:

- Con el generador de funciones introducimos en el vibrador una señal sinusoidal con frecuencia  $110 \text{ Hz}$  y una cierta amplitud que determina el valor de  $\Gamma$ .
- Esperamos aproximadamente quince minutos a que el sistema se estabilice.
- Utilizando el osciloscopio, registramos la señal del acelerómetro durante un tiempo que abarca más de tres periodos de oscilación (ver figura 2.3).

Al estar tanto el osciloscopio como el generador de funciones conectados a un ordenador, hemos elaborado un programa de control y adquisición de datos que automatiza el proceso de medida. De esta manera podemos ir barriendo automáticamente la amplitud de la oscilación y registrar la aceleración de la manera indicada.

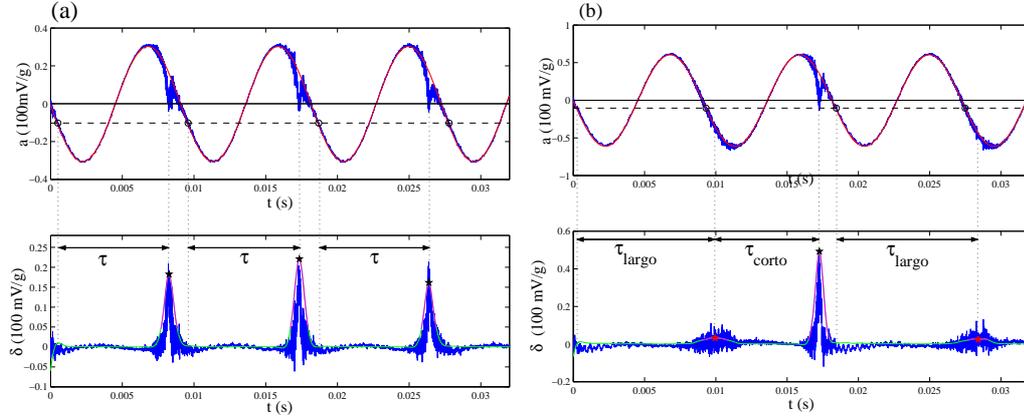


Figura 2.4: Señal de la aceleración medida en la base de la celda antes (a) y después (b) de la duplicación de periodo. Arriba está representada la señal medida,  $a(t)$ , en azul y el ajuste,  $a^*(t)$  en rojo. La línea discontinua horizontal representa  $-g$  y los círculos marcan el momento donde la señal de la aceleración es  $-g$ . Abajo en azul está representada la diferencia entre la señal medida y el ajuste,  $\delta(t)$ . En verde aparece la señal filtrada que queda por debajo del umbral y en magenta la que queda por encima. Las estrellas señalan el instante donde se produce la colisión.

### 2.4.2. Análisis de los datos

Hemos analizado las señales de la aceleración registradas en la base de la celda. El análisis lo hacemos con el siguiente procedimiento (ver figura (2.4)):

- Para obtener una medida precisa de la amplitud,  $A$ , y la frecuencia de oscilación,  $f$ , que nos permita conocer con exactitud el valor de la aceleración adimensional,  $\Gamma$ , es necesario reconstruir la señal de aceleración que suministra el vibrador al medio granular.

Para ello ajustamos los puntos de la señal medida (en azul en las gráficas superiores de la figura 2.4), excluyendo a los picos debido al impacto de la capa con la base del contenedor, a la siguiente función,

$$a^*(t) = A_0 + A \sin(2\pi ft + \phi_0) \quad (2.1)$$

donde  $a^*(t)$  es la señal reconstruida (rojo en las gráficas superiores de la figura 2.4),  $A_0$  es cualquier *offset* que pudieran tener los instrumentos,  $A$  la amplitud de la oscilación,  $f$  la frecuencia de oscilación y  $\phi_0$  el desfase que pueda tener la señal. En el ajuste todos estos parámetros son libres.

- Con los parámetros que hemos obtenido en el ajuste,  $A_0$ ,  $A$ ,  $f$  y  $\phi_0$ , calculamos la diferencia,  $\delta(t)$ , entre la aceleración instantánea,  $a(t)$ , y el ajuste,  $a^*(t)$ .

$$\delta(t) = a(t) - a^*(t) = a(t) - (A_0 + A \sin(2\pi ft + \phi_0)) \quad (2.2)$$

Esta diferencia la hemos representado en azul en las gráficas inferiores de la figura 2.4.

- Suavizamos  $\|\delta(t)\|$  aplicando un filtro *Butterworth* de tercer orden que representamos en las gráficas inferiores de la figura 2.4 en verde y magenta. La parte magenta representa la señal de impacto y se ha seleccionado eligiendo los puntos del filtrado que han superado cierto umbral.
- Calculando el promedio de la señal de impacto, podemos determinar con una precisión del 3% el instante,  $t_c$ , donde ha ocurrido la colisión entre la capa y la base. Hemos representado con estrellas en las gráficas inferiores de la figura 2.4 el instante donde se produce la colisión.
- A partir de los datos experimentales determinamos en qué instante,  $t_0$ , la aceleración de la base alcanza el valor  $-g$ , que es el momento en que la capa despega, iniciando el vuelo. También podemos obtener  $t_0$  a partir de los parámetros obtenidos en el ajuste,  $A_0$ ,  $A$ ,  $f$ , y  $\phi_0$ , imponiendo la condición  $a^*(t_0) = -g$ . Hemos representado con círculos en las gráficas superiores de la figura 2.4 el instante en el que la capa despega.
- El tiempo de vuelo,  $\tau$ , lo calculamos restando ambos tiempos,

$$\tau = t_c - t_0$$

antes de la bifurcación de periodo, y como

$$\begin{cases} \tau_{largo} = t_c - t_0 \\ \tau_{corto} = t_c - t_{largo} \end{cases}$$

tras la bifurcación de periodo.

## 2.5. Medida de la posición de los granos cerca de las paredes laterales

Nuestro objetivo en este experimento es obtener el movimiento resuelto en el tiempo de los granos que están próximos a las paredes laterales de la

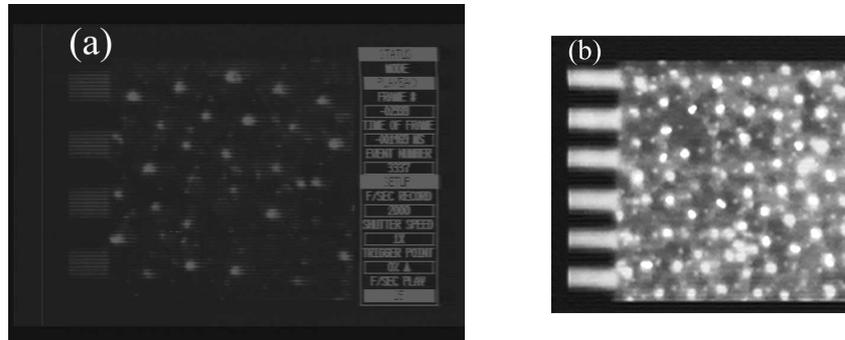


Figura 2.5: Imágenes de los granos en la pared. A la izquierda aparece una escala graduada para la conversión pixels-distancia. **(a)** Imagen que obtenemos directamente del proceso de grabación. **(b)** Una imagen filtrada y ecualizada.

celda cuando en el medio aparece un movimiento convectivo. Para ello hemos utilizado técnicas de análisis de imagen.

Por la propia naturaleza de los granos, al ser iluminados con un haz rasante, los que están próximos a las paredes laterales producen puntos brillantes. Con la cámara rápida, a la que hemos añadido un macro, grabamos la posición de los granos próximos a la pared (ver figura 2.5) a distintas velocidades (1000, 2000 ó 4000 imágenes por segundo) en un grabador de vídeo comercial.

Utilizamos el mismo montaje experimental que hemos usado para medir el tiempo de vuelo (ver sección 2.4) con el fin de monitorizar la amplitud de oscilación.

### 2.5.1. *Particle tracking*

La técnica que hemos utilizado para obtener la posición de los granos resuelta en el tiempo a partir de las secuencias de imágenes se conoce como “*particle tracking*”. Este tipo de técnicas de análisis están diseñadas para seguir objetos en movimiento que aparecen a lo largo de una secuencia de imágenes; en nuestro caso la posición de los granos próximos a las paredes laterales de la celda cuando se encuentran en movimiento convectivo.

Hemos utilizado una variante específicamente pensada para medios que están poco sembrados (aparecen pocas partículas en las imágenes) y el tiempo de adquisición entre imágenes (inversa de la tasa de adquisición) es pequeño.

Previamente, es necesario digitalizar los vídeos. Utilizamos una tarjeta digitalizadora de imágenes para obtener una película en formato AVI. Posteriormente hemos extraído de la película cada una de sus imágenes en formato JPG, utilizando un software libre (VirtualDub).

Luego, en cada imagen seleccionamos la región de interés. Esa región la fil-

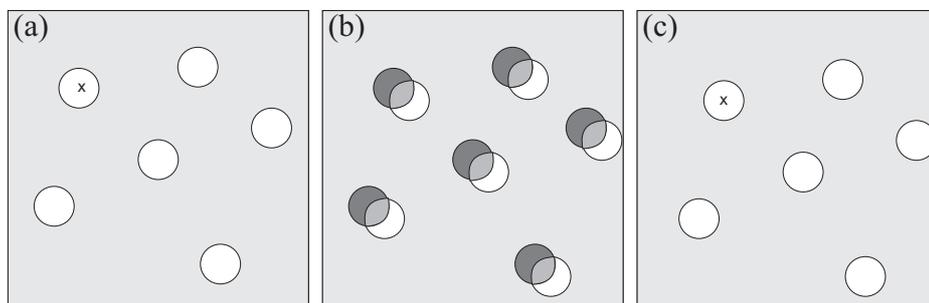


Figura 2.6: Esquema del proceso de *particle tracking*. **(a)** Imagen en la que seleccionamos un punto brillante. Aparece marcado con  $x$ . **(b)** Superponemos dos imágenes consecutivas. Los puntos brillantes de la primera imagen se dibujan oscuros y los de la nueva imagen claros. La zona donde se superponen aparece gris. **(c)** Seleccionamos el punto brillante que se superpone con el etiquetado en la imagen anterior y de nuevo calculamos su centroide.

tramos utilizando transformada de Fourier en dos dimensiones para eliminar el ruido de alta frecuencia y ecualizarla (ver figura 2.5).

Utilizando las herramientas del Image Processing Toolbox de MATLAB hemos elaborado un programa para implementar esta técnica específica de “*particle tracking*” A continuación explicaremos brevemente en qué consiste este proceso.

- Una vez que ya tenemos la secuencia de imágenes, etiquetamos en la primera imagen de la secuencia uno de los puntos brillantes que corresponden a un grano y calculamos su centroide (ver figura 2.6 (a)).
- Como la tasa de sembrado y la de adquisición son pequeñas, una bolita se ha movido, de imagen a imagen, una distancia menor que su diámetro. Por tanto los puntos brillantes en estas dos imágenes consecutivas están superpuestos. Así podremos calcular el centroide del punto brillante que se superpone con el etiquetado en la imagen en la imagen anterior (ver figura 2.6 (b)).
- Realizando este proceso entre pares de imágenes consecutivas, obtenemos la posición del centroide del punto brillante que etiquetamos en la primera imagen a lo largo de toda la secuencia (ver figura 2.6 (c)).

De esta manera conseguimos medir la trayectoria resuelta en el tiempo de de las bolas que están próximas a las paredes laterales con una precisión del 5% del tamaño del grano (ver figura 2.7).

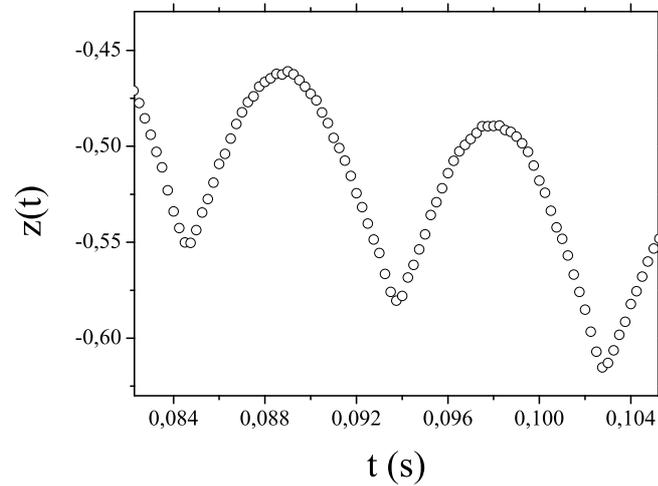


Figura 2.7: Coordenada vertical de la posición de una bola próxima a la pared lateral. Se puede apreciar que los granos presentan un movimiento descendente cerca de la pared.

En resumen,

1. A partir de la señal de aceleración en la base del contenedor medida con un acelerómetro, hemos obtenido el tiempo de vuelo de una capa granular sometida a vibración para valores del parámetro de control,  $\Gamma$ , mayores que uno. La estimación del error cometido en estas medidas es menor del 5 %.
2. Mediante una cámara rápida hemos grabado el movimiento de los granos próximos a las paredes laterales. Utilizando una técnica de *particle tracking* hemos obtenido la posición de estos granos resuelta en el tiempo. La estimación del error cometido en estas medidas es aproximadamente el 10 % para una tasa de adquisición de 2000 imágenes/segundo del 5 % para 4000 imágenes/segundo.

# Capítulo 3

## Resultados

En este capítulo vamos a explicar los resultados que hemos obtenido al tratar la capa granular como un sólido. En este marco estudiaremos el tiempo de vuelo de la capa vibrada verticalmente y qué parámetros experimentales influyen en éste. Posteriormente compararemos nuestros resultados experimentales con los obtenidos mediante el IBBM. Cuando tratemos la capa como un medio discreto, analizaremos el movimiento resuelto en el tiempo de los granos. Las medidas de las trayectorias de los granos resueltas en el tiempo proporcionan el movimiento de un grano en un ciclo.

El tiempo de vuelo  $\tau$  lo expresaremos normalizado con la duración de un periodo  $T$ .

### 3.1. Tiempo de vuelo

El experimento consiste en vibrar sinusoidalmente un medio granular compuesto por al menos  $10^4$  partículas. Como ya explicamos en los capítulos anteriores, cuando  $\Gamma > 1$  el medio granular se despega de la base del contenedor e inicia un vuelo parabólico. El vuelo termina cuando la capa colisiona con la base, perdiendo toda su energía en la colisión, por lo que podemos suponer el medio como un cuerpo inelástico.

Para explorar el comportamiento del tiempo de vuelo en función del parámetro de control variamos la amplitud, manteniendo la frecuencia de 110 Hz constante. Con el fin de averiguar si existe histéresis en el fenómeno, primero aumentamos la amplitud y después la disminuimos.

Como se puede apreciar en la figura 3.1 el tiempo de vuelo,  $\tau$ , es cero para valores de  $\Gamma < 1$ . Al aumentar el parámetro de control el tiempo de vuelo también aumenta monotonamente hasta que para  $\Gamma = 4,8 \pm 0,1$  aparece una bifurcación por duplicación de periodo cuando el tiempo de vuelo es igual

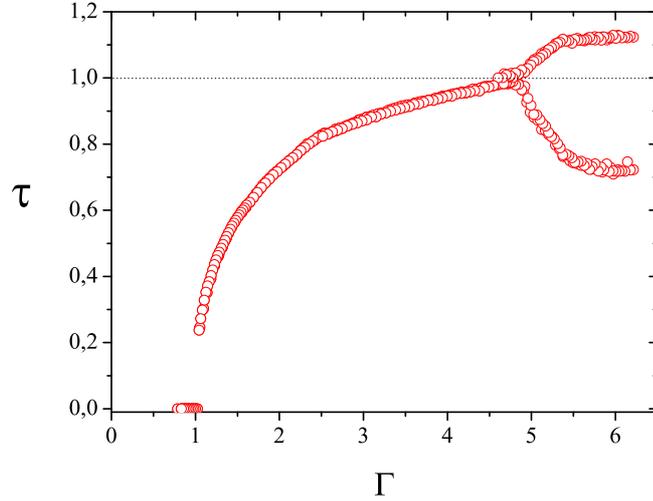


Figura 3.1: Tiempo de vuelo de una capa granular de altura  $N = 20$ . Las barras de error son del tamaño de los puntos.

al periodo de vibración. A partir de este valor existen dos tiempos de vuelo distintos para cada  $\Gamma$ . La capa se despegar cuando la aceleración de la base es  $-g$ , realizando un vuelo que es más largo que un periodo de vibración; al terminarlo la aceleración de la base es menor que  $-g$ , de tal manera que la capa despegar nada más chocar con el contenedor, realizando un segundo vuelo, esta vez más corto que un periodo. Que el segundo vuelo sea más corto que el primero se debe a que la velocidad con la que la capa se despegar de la base tras la colisión es menor que cuando inicia el primer vuelo. Al aumentar  $\Gamma$  aun más, la rama superior de la bifurcación -la que corresponde a los vuelos largos- se satura, al igual que la rama inferior (vuelos cortos). Se puede apreciar también que a pesar de que hemos explorado los valores de  $\tau$  aumentando y disminuyendo la amplitud de vibración no aparece histéresis en el tiempo de vuelo.

Los mayores valores del parámetro de control que hemos explorado corresponden a  $\Gamma \approx 6,5$ . Cuando el parámetro de control es mayor que este límite eventualmente puede aparecer una bifurcación de tipo espacial, desarrollando dos rollos convectivos longitudinales en lugar de uno toroidal [28]. El movimiento de cada rollo está en oposición de fase, es decir, mientras que un rollo está haciendo un vuelo largo el otro hace uno corto, y viceversa. Por esta razón la información del instante en que cada rollo colisiona con la base aparece mezclada, siendo imposible obtener medidas del tiempo de vuelo de

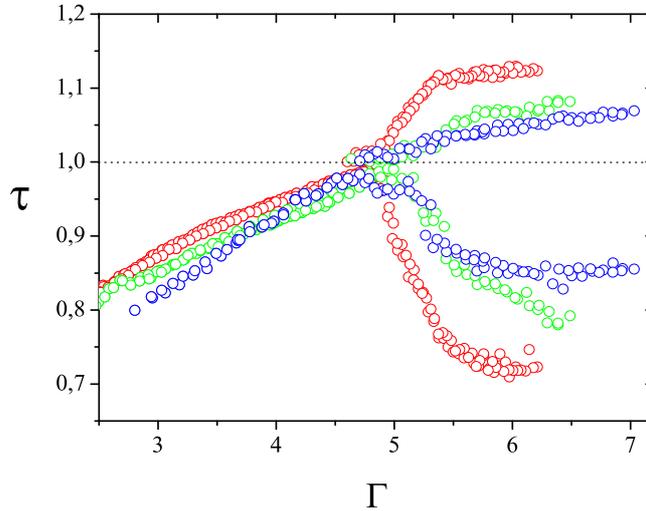


Figura 3.2: Tiempo de vuelo para distintas alturas de la capa granular: rojo  $N = 20$ , verde  $N = 33$ , y azul  $N = 100$ . Las barras de error son del tamaño de los puntos.

cada rollo a partir las señales de aceleración de la base.

### 3.1.1. Influencia del espesor de la capa

Hemos realizado una serie de experimentos variando el espesor de la capa. Las alturas analizadas han sido  $N = 20$  ( $m = 30$  g),  $N = 33$  ( $m = 50$  g) y  $N = 100$  ( $m = 150$  g). El procedimiento que hemos seguido para obtener los datos experimentales es idéntico al del apartado anterior.

Como se puede apreciar en la figura 3.2, el comportamiento cualitativo del tiempo de vuelo en función del parámetro de control es el mismo para los tres espesores estudiados: el tiempo de vuelo aumenta al aumentar el parámetro de control y aparece una bifurcación por duplicación período en  $\Gamma \simeq 5$ , dando lugar a una rama de vuelos largos y otra de vuelos cortos que tienden a saturarse. En ninguno de los tres casos hemos observado efectos de histéresis al variar la amplitud de vibración.

Cuando la capa es suficientemente alta ( $N = 100$ ) hemos conseguido aumentar  $\Gamma$  más allá del valor  $\Gamma = 6,5$ , sin que observáramos para esta altura la bifurcación espacial.

Resulta claro de la figura, que a pesar de que el punto de bifurcación

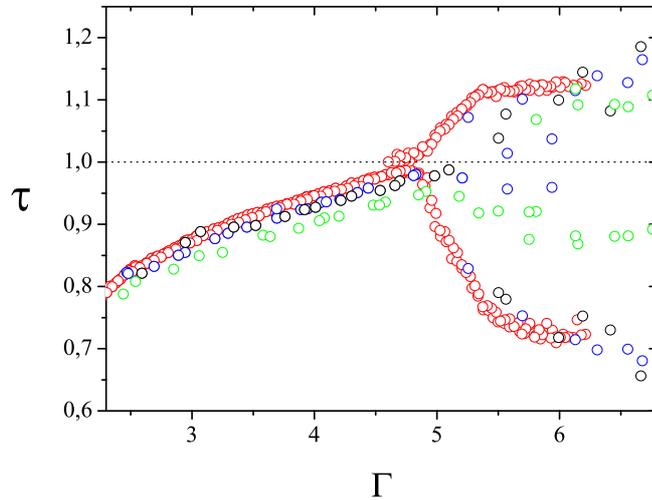


Figura 3.3: Tiempo de vuelo para distintas condiciones de fricción entre las paredes y los granos: rojo, celda de vidrio; verde, celda de acero con granos pegados; azul, celda de acero pulido; y negro, granos con grafito. Las barras de error son del tamaño de los puntos.

sea esencialmente el mismo los tiempos de vuelo dependen de la altura de la capa a uno y otro lado de la bifurcación. Este comportamiento sugiere que la altura de la capa modifica las condiciones en las que se realiza el vuelo, aunque resulta desconcertante que estas diferencias desaparezcan en el punto de bifurcación.

### 3.1.2. Influencia de la interacción entre partículas

Para estudiar la influencia de la interacción de las partículas entre sí y con las paredes (denominaremos genéricamente a este efecto “rozamiento”) introduciremos algunas modificaciones sobre el material granular y el contenedor:

- Con la intención de disminuir el rozamiento entre las bolas y las paredes, añadimos un 0,1 % en peso de polvo de grafito ( $30 \mu\text{m}$ ) a las bolas como lubricante. Antes de realizar cualquier medida vibramos durante 50 horas los granos con el grafito para que el polvo se adhiriera a los granos y a las paredes de la celda.

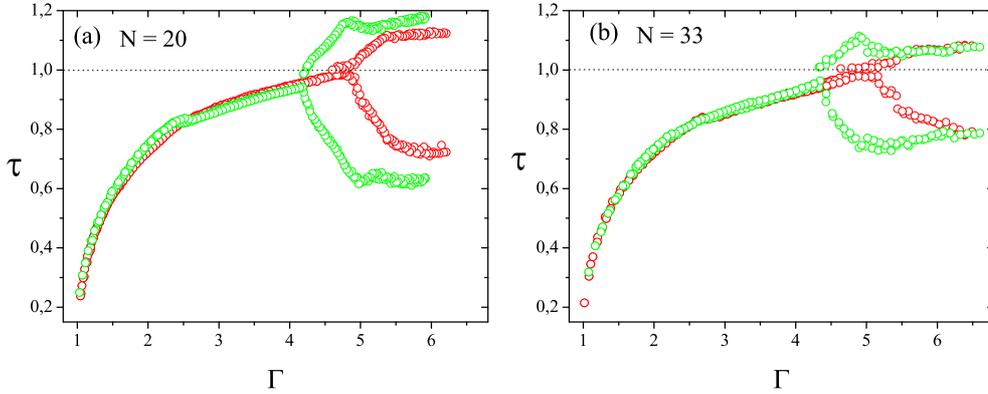


Figura 3.4: Tiempo de vuelo (en unidades del periodo) en presencia de aire (puntos rojos) y en vacío (puntos verdes). (a)  $N = 20$ . (b)  $N = 33$ . Las barras de error son del tamaño de los puntos.

- Para aumentar el rozamiento entre las paredes y los granos hemos utilizado una celda cilíndrica construida en acero inoxidable. El diámetro de la celda es de 51 mm y la altura de la capa  $N = 20$ . Primeramente pegamos a las paredes del contenedor bolas de vidrio idénticas a las del medio granular y rayamos la base para aumentar su rugosidad. Posteriormente, disminuimos el rozamiento rectificando y puliendo tanto la base como la parte interior del cilindro.

En la figura 3.3 nos hemos centrado en el punto de la bifurcación. El comportamiento cualitativo del tiempo de vuelo en esta región sigue siendo similar en todos los casos. Se puede observar un pequeño retraso en los tiempos de vuelo donde se ha aumentado la fricción, retraso que se hace más evidente para puntos posteriores a la bifurcación. Al igual que antes no hemos encontrado efectos de histéresis.

### 3.1.3. Influencia del gas intersticial

Para estudiar la influencia del gas intersticial en el medio granular realizamos medidas del tiempo de vuelo haciendo vacío en el interior de la celda. Previo a cualquier medición practicamos el vacío durante 50 horas hasta alcanzar un valor de aproximadamente  $10^{-2}$  Torr; durante el resto del tiempo que dura el experimento mantenemos este nivel de vacío.

Los datos experimentales del tiempo de vuelo para capas de alturas  $N = 20$  ( $m = 30$  g) y  $N = 33$  ( $m = 50$  g) los hemos representado en la figura 3.4.

Como se puede apreciar el comportamiento cualitativo es ligeramente distinto en presencia, o no, de aire. La observación cuidadosa de los tiempos de vuelo para  $\Gamma > 1$  muestra, que para el caso de vacío, los tiempos son *mayores* que los correspondientes al caso en el que existe aire hasta valores del parámetro de control del orden de  $\Gamma \approx 2,6$ . Sorprendentemente, por encima de este valor los tiempos de vuelo son levemente *menores* en presencia de aire hasta que se produce la bifurcación. Más allá de ella, la rama superior crece hasta un cierto valor y después decrece hasta saturarse. También, al evacuar el contenedor, la duplicación de periodo aparece de manera brusca (como una discontinuidad) en  $\Gamma \simeq 4$ , mientras que en presencia de gas ambiente lo hace en  $\Gamma \simeq 5$ . En vacío tampoco aparece histéresis.

A la vista de los resultados experimentales se puede observar que tanto la altura de la capa granular como la fricción afecta muy poco al tiempo de vuelo del medio considerado como un sólido. Sin embargo, la presencia, o no, de aire modifica el punto donde aparece la duplicación de periodo, y afecta de forma importante a las ramas de la bifurcación.

### 3.2. Comparación con el IBBM

Consideraremos en esta sección al medio como un todo, independientemente de su naturaleza granular. Compararemos, entonces los datos del tiempo de vuelo experimentales para la capa vibrada con aquellos obtenidos a partir del modelo de la bola inelástica.

Los tiempos de vuelo los hemos calculado resolviendo numéricamente las ecuaciones (1.9) y (1.12), e imponiendo las condiciones de vuelo largo o corto según explicamos en la sección 1.5.1. Este procedimiento lo hacemos iterando cincuenta ciclos de vibración las ecuaciones antes mencionadas con el objeto de desprestigiar cualquier fenómeno de tipo transitorio que pudiera existir. Sólo representaremos entonces los dos últimos valores del tiempo de vuelo para cada valor de  $\Gamma$ . Después aumentamos el parámetro de control y repetimos el proceso.

Como se puede apreciar en la figura 3.5, existen varias diferencias entre las predicciones del modelo y los datos experimentales que hemos medido.

1. Hasta  $\Gamma \simeq 2,5$  los datos experimentales ajustan muy bien con los predichos por el modelo. Sin embargo, a partir de este valor los datos del tiempo de vuelo medidos son menores que los calculados por el modelo.
2. El tiempo de vuelo medido crece monótonamente justo hasta el punto donde se produce la bifurcación. No observamos en ninguno de los casos estudiados una saturación en el tiempo de vuelo para una región

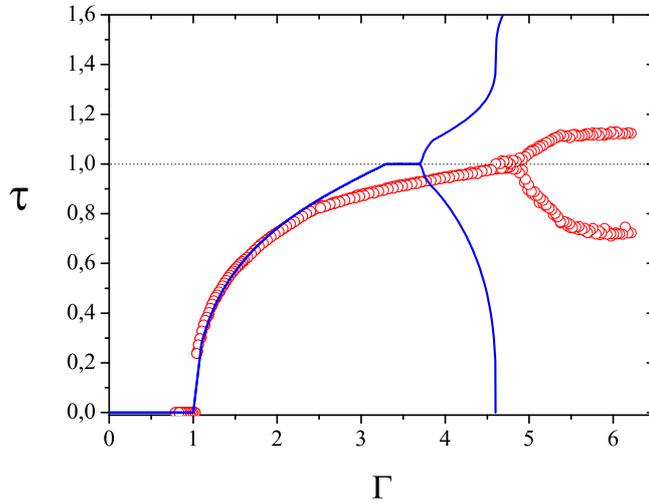


Figura 3.5: Tiempo de vuelo para una capa de altura  $N = 20$  (rojo) y para el IBBM (azul).

finita del parámetro de control. En síntesis, en nuestro experimento no aparece la bifurcación “*saddle node*” predicha por la teoría (ver sección 1.5.2).

3. El punto donde aparece la bifurcación por duplicación de periodo en los datos experimentales,  $\Gamma_{exp} \simeq 5$ , es sistemáticamente superior al predicho por el IBBM,  $\Gamma_{IBBM} = 3,7242$ .
4. Las ramas de los vuelos largos y cortos se saturan, mientras que en el modelo la que corresponde a los vuelo largos crece y la de los vuelos cortos se hace cero. No tenemos acceso experimental a los tiempos de vuelo para  $\Gamma > 7$  por aparecer una segunda bifurcación espacial.

Intentaremos a continuación modificar el IBBM introduciendo algunas mejoras que permitan ajustar los datos con mayor exactitud. Las modificaciones están inspiradas tanto en las propiedades que tiene el material granular (de las que carece el IBBM al suponer al medio como puntual) como de la interacción del medio con las condiciones de contorno. Consideraremos entonces:

1. Existencia de gas intersticial.

2. Presencia de los efectos de fricción.
3. Duración finita de la colisión capa-contenedor.

### 3.2.1. Existencia del gas intersticial

La primera modificación será añadir una fuerza de frenado debida a la existencia de gas intersticial en el medio.

Para ello vamos a modelizar el medio granular como un pistón poroso utilizando el modelo un modelo introducido por Kroll [29]. Según este modelo al vibrar verticalmente un medio granular podemos hacer las siguientes hipótesis:

1. El medio se mueve como un pistón poroso.
2. La porosidad<sup>1</sup>,  $\varphi$ , es constante.
3. La colisión entre el pistón y la base es inelástica.
4. La fricción del pistón con las paredes laterales es despreciable.
5. El aire, que se considera incompresible<sup>2</sup>, puede permear a través del piston según la ley de Darcy:

$$u = \kappa \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

donde  $u$  es el flujo volumétrico de aire por unidad de área,  $\kappa$  la permeabilidad del pistón,  $P$  la presión del aire en el pistón, y  $z$  la coordenada vertical.

Eligiendo el laboratorio como sistema de referencia, la posición del pistón,  $z'$ , es

$$z' = x + b = x + A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (3.2)$$

donde  $x$  corresponde a la posición del pistón en un sistema de referencia centrado la base de la celda, y  $b = A \sin(\omega t + \phi_0)$  es la posición de la celda (ver figura 3.6).

<sup>1</sup>Relacionada con la fracción de compactación en un medio granular,  $\varphi = \frac{V_{vacio}}{V_{total}} = 1 - \phi$

<sup>2</sup>Este modelo se puede mejorar suponiendo el aire como un gas compresible [30], puesto que en el modelo de Kroll al terminar el vuelo del pistón la presión dentro de éste sufre una discontinuidad. No hemos utilizado el modelo de gas compresible por la gran dificultad computacional que supone implementarlo.

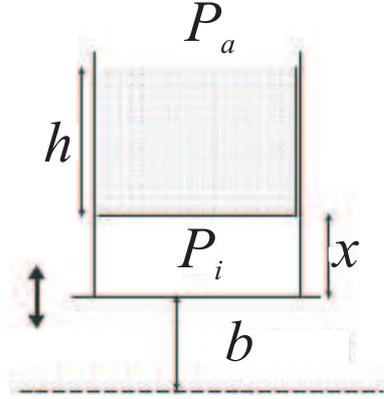


Figura 3.6: Esquema del movimiento de un pistón poroso:  $x$  es la posición del pistón en el sistema de referencia de la celda,  $b = A \sin(\omega t + \phi_0)$  es la posición de la celda,  $P_a$  es la presión atmosférica,  $P_i$  la presión en el interior del intersticio, y  $h$  la altura del pistón[31].

Cuando el pistón está en vuelo, las fuerzas a las que está sometido son la gravedad y la fuerza debida a la diferencia de presiones que soporta. De esta manera la *ecuación de movimiento para el pistón* se escribe [31]:

$$\ddot{x} + (P_a - P_i) \frac{A}{m} = -\ddot{b} - g \quad (3.3)$$

donde  $P_a$  es la presión atmosférica,  $P_i$  la presión en el interior del intersticio que se forma entre el pistón y la celda, y  $m$  la masa del pistón.

Como el aire se supone incompresible,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_a - P_i}{h} \quad (3.4)$$

donde  $h$  es la altura del pistón. Entonces podemos reescribir la ley de Darcy (3.1) como

$$\dot{x} = \kappa \left( \frac{P_a - P_i}{h} \right) \quad (3.5)$$

Introduciendo (3.5) en (3.3), obtenemos una nueva ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \frac{hA\mu}{m\kappa} \dot{x} = A\omega^2 \sin(\omega t + \phi_0) - g \quad (3.6)$$

Para deducir la permeabilidad,  $\kappa$ , de un medio granular formado por partículas esféricas de diámetro  $d_b$  utilizamos el siguiente argumento: mediante análisis dimensional, y suponiendo al aire como un gas incompresible,

el gradiente de presiones que aparece en la ley de Darcy (3.1) es proporcional a

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \gamma \frac{\mu u}{d_b^2} \quad (3.7)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del aire y  $\gamma$  la constante de proporcionalidad. Esta constante aparece deducida en los textos de mecánica de fluidos [32]

$$\gamma = 180 \frac{(1 - \varphi)^2}{\varphi^3} \quad (3.8)$$

siendo el factor 180 deducido empíricamente [33]. Por tanto, la permeabilidad del medio granular es

$$\kappa = \frac{d_b^2}{180\mu} \left( \frac{\varphi^3}{(1 - \varphi)^2} \right) \quad (3.9)$$

Finalmente la ecuación que representa la evolución temporal de la posición del pistón respecto de la base de la celda es

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} = f(t) \quad (3.10)$$

donde

$$\beta = \frac{180hA(1 - \varphi)^2\mu}{md_b^2\varphi^3} \quad ; \quad f(t) = \Gamma g \sin(\omega t + \phi_0) - g \quad (3.11)$$

La ecuación (3.10) representa el movimiento de un cuerpo sometido a la acción de un frenado viscoso. Esta ecuación la resolvemos numéricamente con las condiciones (3.12), encontrando la solución mostrada en la figura 3.7.

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 20 \times 10^{-3} \text{ m} \\ A = 2,1 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \varphi = 1 - \phi = 0,41 \\ \mu = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ m = 50 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ d_b = 0,43 \times 10^{-3} \text{ m} \end{array} \right. \Rightarrow \beta = 75,2 \text{ s}^{-1} \quad (3.12)$$

Como se puede apreciar en la figura 3.7, la presencia de gas intersticial retrasa el punto donde aparece la bifurcación, aunque este retraso no es suficiente para ajustar los datos obtenidos experimentalmente. Por otra parte no se observa una saturación de las ramas y además la región de saturación en el tiempo de vuelo *augmenta* respecto de la predicha por el IBBM.

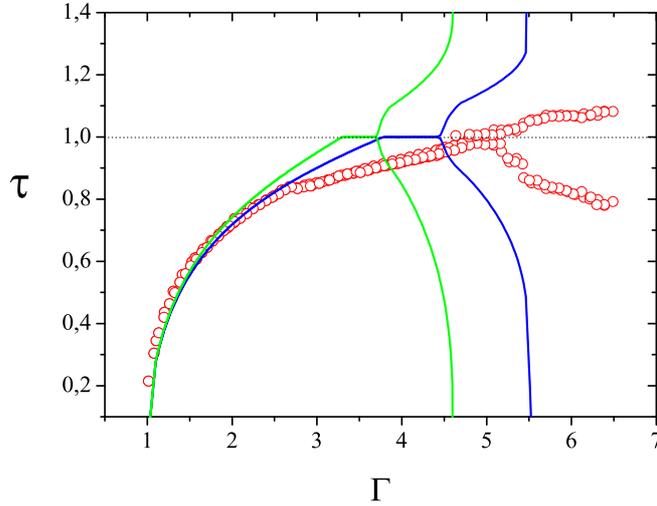


Figura 3.7: Tiempo de vuelo para una capa de altura  $N = 33$ . En verde el IBBM y en azul el IBBM modificado con la presencia de aire con  $\beta = 75,2 \text{ s}^{-1}$ .

### 3.2.2. Presencia de los efectos de fricción

Como ha sido demostrado en secciones anteriores, el tiempo de vuelo medido experimentalmente, con o sin aire en la celda, es menor que el predicho por el IBBM. Una manera de interpretar este retraso es considerar que sobre la partícula inelástica actúa una fuerza efectiva superior a la gravedad. Esta fuerza tendría su origen en la fricción de los granos con la pared de la celda, y en primera aproximación la consideraremos independiente de la velocidad relativa entre el medio y la celda. Hemos deducido empíricamente su valor suponiendo que los tiempos de vuelo medidos experimentalmente son función de un parámetro  $\Gamma_{efect} = \frac{A\omega^2}{g_{efect}}$ , donde  $g_{efect}$  da cuenta de la fuerza neta que actúa sobre el material. El valor empírico de esta gravedad efectiva lo hemos ajustado mediante la expresión:

$$g_{ef} = ge^{\alpha g(\Gamma-1)} \quad (3.13)$$

donde  $\alpha$  es la constante que utilizaremos para ajustar los tiempos de vuelo.

Esta fuerza neta da lugar a dos efectos:

1. La nueva condición para que la bola pueda despegar de la base es que la aceleración de ésta debe ser igual a la nueva gravedad efectiva  $-g_{efect}$ .

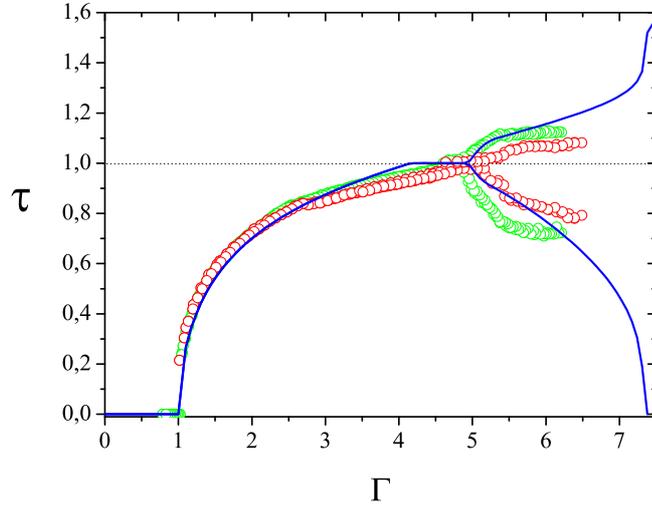


Figura 3.8: Tiempo de vuelo para unas capas de alturas  $N = 20$  (verde), y  $N = 33$  (rojo). En azul el IBBM modificado con una gravedad efectiva cuya constante  $\alpha = 7,5 \times 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ .

2. Durante el vuelo, la aceleración que sufre la bola no es la gravedad, sino  $-g_{\text{efect}}$ , aunque en cualquier caso el vuelo es de tipo parabólico.

En la figura 3.8 hemos representado los puntos experimentales (calculando<sup>3</sup> el instante  $t_0$  con  $g_{\text{efect}}$ , ver sección 2.4.1) del tiempo de vuelo para capas de altura  $N = 20$  y  $N = 33$  junto con los tiempos de vuelo calculados en el IBBM modificado con la gravedad efectiva. Hemos elegido el valor del parámetro  $\alpha = 7,5 \times 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$  forzando en nuestro ajuste la coincidencia en la abscisa del punto de bifurcación numérico y experimental. De la figura resulta claro que el ajuste se aproxima razonablemente a los puntos experimentales, en especial debido a que el crecimiento de las ramas se ve fuertemente amortiguado, aunque todavía se observa su divergencia, y permanece la zona de saturación.

### 3.2.3. Duración finita de la colisión

Si analizamos con detalle los datos de la aceleración (ver figuras 2.3 y 2.4) apreciamos que las colisiones de la capa granular tienen una duración finita.

<sup>3</sup>Utilizar  $-g_{\text{efect}}$  para detectar el instante donde la capa despega,  $t_0$ , apenas modifica el tiempo de vuelo.

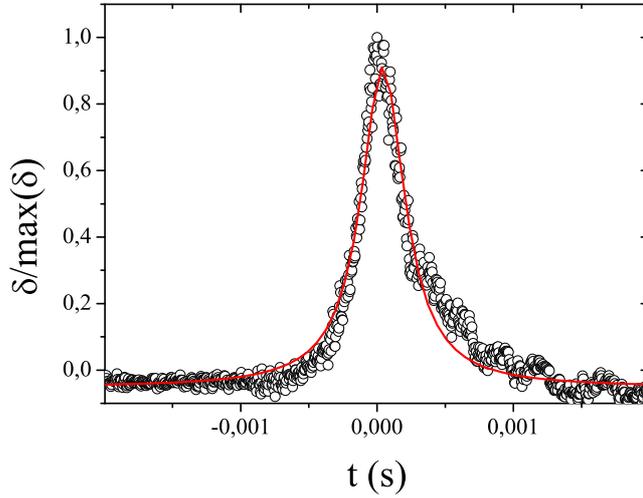


Figura 3.9: Pico producido en la señal de aceleración por una capa de  $N = 33$  y  $\Gamma = 3,31$ . La línea en rojo es el resultado del ajuste.

Podemos medir la anchura típica de estas colisiones ajustando los picos que aparecen en la señal de aceleración a una lorentziana

$$\delta(x) = \delta_0 + \frac{2A}{\pi} \frac{w}{4(t - t_c)^2 + w^2} \quad (3.14)$$

donde  $\delta_0$  es la altura mitad,  $A$  es el área bajo la curva,  $\delta_c$  es la coordenada del máximo de la curva, y  $w$  es la anchura a mitad de altura.

Hemos elegido una altura de capa ( $N = 33$ ) y una aceleración ( $\Gamma = 3,31$ ) que permitan apreciar nítidamente los picos producidos por la colisión. Estos datos los hemos centrado en el máximo del pico y normalizado con su altura. Finalmente los hemos ajustado a una lorentziana dejando todos los parámetros libres (ver figura 3.9).

Si consideramos la duración del choque,  $t_{choque}$ , como la anchura a mitad de altura de la lorentziana, a partir del ajuste obtenemos que  $t_{choque} = w = 4,5 \pm 0,4 \times 10^{-4}$  s. Con este dato podemos calcular el porcentaje del ciclo,  $\delta t_{choque}$ , durante el cual la capa está “chocando”:

$$\delta t_{choque} = \frac{t_{choque}}{T} = 0,049 \pm 0,004$$

Que la colisión entre la capa y la base se produzca de manera no instantánea ( $t_{choque} \neq 0$ ) podría alterar de forma significativa las predicciones

del IBBM. En particular, la duración finita del contacto tendrá como consecuencia inmediata una variación, respecto del modelo original, de la velocidad con que la partícula inicia su vuelo después del choque (a partir del momento en que el tiempo que el medio permanece en contacto con la base se haga del orden de  $t_{choque}$ ). Este efecto podría ser el responsable de que no se observe la región de saturación previa a la duplicación de periodo. Para que exista esta región es necesario que aparezca en los tiempos de vuelo un fenómeno del tipo “*critical slowing down*”, es decir una convergencia lenta del tiempo de vuelo a un periodo de oscilación.

El fenómeno de “*critical slowing down*” consiste en un ajuste de la fase donde empieza y termina un vuelo, de tal manera que al cabo de muchos ciclos de vibración el tiempo de vuelo tiende a un periodo de vibración,  $T$ . El mecanismo por el que la fase se ajusta es así. Para cualquier valor de  $\Gamma$  de la región de saturación, todos los vuelos que puede realizar una bola terminan en una fase en la que la aceleración es menor que  $-g$ . Consecuentemente, siempre que toma contacto la bola con la base puede iniciar inmediatamente un vuelo. La duración de estos vuelos será mayor o menor que un periodo según sea la velocidad de la base cuando se produce la colisión. Supongamos que se inicia un vuelo con cierta velocidad inicial, cuya duración sea mayor que  $T$ . El momento del aterrizaje (y del despegue que sigue inmediatamente) tiene lugar en una fase de la vibración en la que la velocidad (que es la velocidad inicial del siguiente vuelo) es menor que la del vuelo precedente; por tanto este vuelo tendrá una duración *menor* que  $T$ . Pero como el tiempo que dura este vuelo es menor que  $T$ , la velocidad inicial del siguiente vuelo será mayor que la del vuelo precedente y su duración será *mayor* que un periodo. A un vuelo largo le sucede uno corto y viceversa, de tal manera que los vuelos de duración mayor que un periodo cada vez son más cortos y los de duración menor que un periodo cada vez más largos. Así, la velocidad inicial de todos los vuelos converge a un único valor. Esto se traduce en que la fase donde termina un vuelo sea la misma que donde empieza (mód  $2\pi$ ) y por tanto la duración de un vuelo después de muchos ciclos sea igual a un periodo.

Si los choques entre la base y la bola no son instantáneos, el ajuste de fase no se puede producir porque las velocidades iniciales no convergen y por tanto la saturación producida por el fenómeno de “*critical slowing down*” no aparece. Para simular este resultado en el IBBM, vamos a sumar un ruido blanco positivo  $\delta\tau$  al tiempo de vuelo que calculamos. Este ruido está acotado por la duración del choque, de tal manera que  $\max(\delta\tau) \leq t_{choque}$ .

Con los nuevos tiempos de vuelo,  $\tau^* = \tau + \delta\tau$ , verificamos la condición de que se inicie un nuevo vuelo:

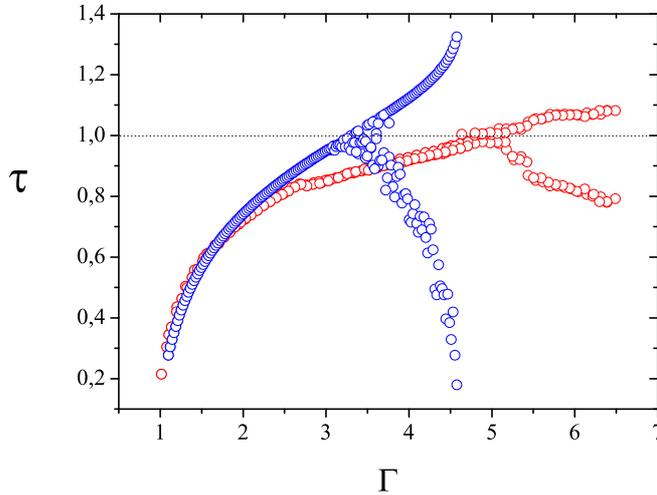


Figura 3.10: Tiempo de vuelo para una capa de altura  $N = 33$  (puntos rojos) y el IBBM modificado con un ruido blanco (puntos azules).

$$a(\tau^*) \leq -g$$

Si se satisface esta condición la bola puede iniciar un vuelo con una fase inicial  $\phi_0^* = \phi_0 + \omega\tau^*$ , y si no la bola queda solidaria con la base hasta que se verifique  $a(t_0) \leq -g$ .

Hemos elegido sumar un ruido y no una cantidad constante porque suponemos que la duración finita del choque se debe a que el medio granular no cae sobre la base de manera instantánea, sino que el choque tiene una duración finita debido al espesor de la capa; como el choque de los granos individuales es desordenado (en la figura 3.9 es posible observar que después de alcanzar el máximo, la curva converge de forma algo ruidosa a su valor final), para simularlo se toma un ruido blanco.

En la figura 3.10 hemos representado el efecto que produce esta modificación en los tiempos de vuelo. Se puede apreciar que la única diferencia con los calculados a partir del IBBM, sin modificar, es que no aparece la saturación debida a la bifurcación “*saddle node*”.

Finalmente, es importante destacar también la existencia de un cambio en la tendencia con la que crece el tiempo de vuelo al aumentar el parámetro de control. Como puede verse en la figura 3.11, para valores menores que  $\Gamma \approx 2,5$  la predicciones del IBBM coinciden prácticamente con las determinaciones

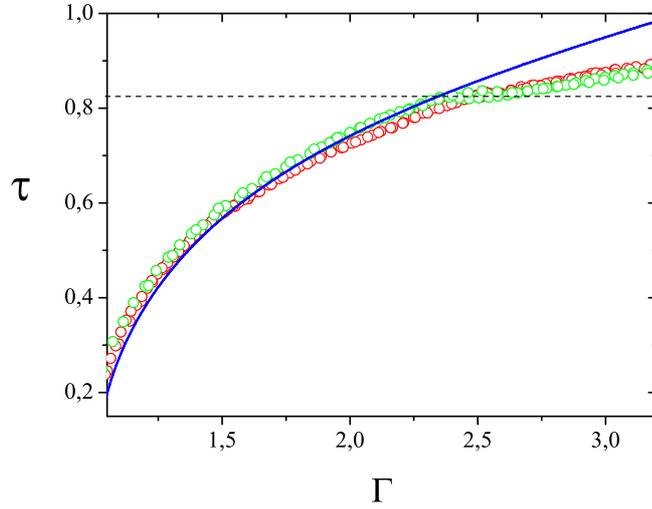


Figura 3.11: Tiempo de vuelo para una capa de altura  $N = 20$  en presencia de aire (puntos rojos), en vacío (puntos verdes), y para el IBBM (línea azul). La posición donde aparece el cambio de tendencia se marca con una línea discontinua.

experimentales. Sin embargo por encima de este valor comienza un retraso sistemático del tiempo de vuelo respecto del valor predicho por la teoría.

Este cambio se puede relacionar con el tiempo que dura la colisión, ya que la posición en la que aparece corresponde a  $T - 2t_{choque} \approx 0,9T$ . Podemos suponer que la colisión produce en el medio granular una onda de compactación, y que el tiempo que tarda la onda en propagarse desde la base del contenedor hasta la superficie libre es precisamente  $t_{choque}$ . La onda se refleja en la superficie libre recorriendo de nuevo el medio. Así, el cambio de tendencia coincide con el valor de  $\Gamma$  para el cual el tiempo que el material permanece sobre la base se hace del orden del necesario para que se establezca una onda estacionaria en el medio. La existencia de esta onda de compactación durante el vuelo podría cambiar suficientemente las propiedades del medio granular [34] como para que el IBBM no describa adecuadamente su dinámica. Dada la complejidad de este problema solo lo hemos mencionado aquí y será objeto de estudio futuro.

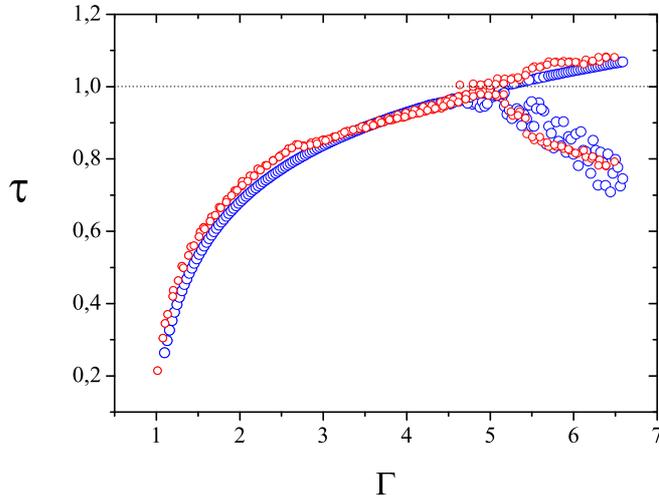


Figura 3.12: Tiempo de vuelo para una capa de altura  $N = 33$  (puntos rojos) y el IBBM modificado por la presencia de gas intersticial, gravedad efectiva y ruido en la fase de inicio (puntos azules).

### 3.2.4. Efectos combinados

Si introducimos simultáneamente en nuestras simulaciones numéricas todas las modificaciones que hemos expuesto anteriormente:

- Fuerza debida a la presencia de un gas intersticial.
- Gravedad efectiva debida a la fricción de los granos con las paredes ( $\alpha = 7,5 \times 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ ).
- Ruido en la fase de inicio debida a la duración finita de las colisiones.

podemos ajustar con razonable precisión los datos obtenidos en el experimento, como se puede apreciar en la figura 3.12, ya que los tiempos de vuelo, tanto antes como después de la bifurcación por duplicación de periodo, son aproximadamente iguales, y además el punto donde aparece esta bifurcación también coincide. Respecto a la saturación debida a la bifurcación de tipo “*saddle node*”, no aparece en los cálculos hechos en esta simulación.

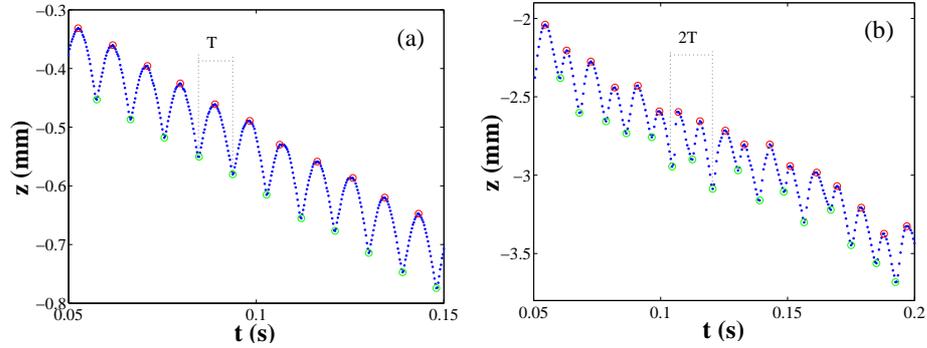


Figura 3.13: Coordenada vertical de la trayectoria resuelta en el tiempo de un grano próximo a la pared lateral de la celda. Los puntos azules representan la posición del grano, con círculos rojos están marcados los máximos relativos y con círculos verdes los mínimos relativos. **(a)** Tasa de muestreo 4000 imágenes por segundo y  $\Gamma = 2,59$ . **(b)** Tasa de muestreo 2000 imágenes por segundo y  $\Gamma = 5,49$

### 3.3. Trayectorias resueltas en el tiempo

En este apartado vamos a estudiar el movimiento de los granos individuales cuando el medio granular desarrolla un movimiento convectivo. Al vibrar el medio con una aceleración mayor que la gravedad, los granos bajan por las paredes laterales y ascienden por el centro de la celda. El procedimiento experimental que hemos seguido está descrito en la sección 2.5.

En la figura 3.13 aparece representada la trayectoria de un grano próximo a la pared lateral para distintas amplitudes de vibración. Se puede descomponer el movimiento en uno rápido, periódico, que tiene lugar en cada ciclo de oscilación, y otro lento, que es una deriva vertical de los granos.

**Movimiento rápido** El movimiento de los granos en cada ciclo de oscilación es similar al del medio cuando se comporta como un solo cuerpo, constando entonces de dos etapas. Desde que el grano aterriza en la base del contenedor (perdiendo toda su energía) hasta que la aceleración sea menor que  $-g$ , el movimiento del grano es solidario con la base. Cuando la aceleración alcanza el valor  $-g$ , el grano se despega e inicia la segunda etapa, que es un vuelo durante el cual sólo tiene contacto con las paredes del contenedor y las demás partículas, pero no con la base. Esta segunda etapa finaliza cuando el grano colisiona nuevamente con la base. Cuando la amplitud de vibración es tal que el sistema ha superado la bifurcación por duplicación de periodo, el grano realiza un nuevo vuelo (más corto que el anterior) inmediatamente después de la

colisión.

Debido a que la capa puede compactarse y descompactarse, podría existir un desfase entre el movimiento de los granos y el del contenedor, razón por la cual no se puede determinar con precisión el momento del despegue a partir de los datos experimentales, y de hecho puede diferir ligeramente del instante en el que la aceleración de la base es igual a  $-g$ .

**Movimiento lento** Como se ve en la figura 3.13, los granos cerca de las paredes tienen un movimiento neto descendente. Esta deriva se pone de manifiesto en forma de movimiento convectivo. La velocidad de deriva se puede obtener, por ejemplo, mediante un ajuste lineal de los puntos de la figura 3.13.

### 3.3.1. Movimiento en un ciclo

Para una capa de altura  $N = 33$  ( $m = 50$  g) vibrada a  $\Gamma = 2,59$  (antes de la duplicación de periodo) hemos reconstruido el movimiento de los granos durante un ciclo a partir de las mediciones de las posiciones de las partículas. Se describe a continuación el procedimiento empleado para el tratamiento de los datos.

1. Comenzamos por obtener el instante del choque. A fin de tener más precisión en la elección de este instante ajustamos parábolas a los puntos más próximos a izquierda y derecha de cada mínimo (líneas verdes en la figura 3.14). Tomamos como instante donde termina un vuelo,  $t_{fin}$ , el punto donde se cortan las parábolas (círculos verdes en la figura 3.14).
2. A partir del registro de la aceleración para una capa de altura  $N = 33$  obtenemos la fase,  $\phi^*$ , en la que la capa choca. Esta fase la asociamos al punto donde el grano termina el vuelo. Este instante nos sirve para dividir el ciclo en dos intervalos temporales: uno desde que la fase de la vibración del contenedor es cero hasta el instante del choque,  $\Delta t_1$ , y otro desde el instante del choque hasta que la fase del contenedor vuelve a ser cero,  $\Delta t_2$ .

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \phi^*/\omega \\ \Delta t_2 = T - \Delta t_1 \end{cases}$$

A la izquierda del mínimo, seleccionamos los puntos de la trayectoria de la partícula que están dentro del intervalo  $\Delta t_1$ , y a la derecha los

que están dentro del intervalo  $\Delta t_2$ . La trayectoria de las partículas la dividiremos en ciclos que van, pues, desde el momento en el que la fase de la vibración externa es cero hasta el siguiente paso por el cero. Es decir, desde que la fase es cero hasta el instante del choque transcurre un tiempo  $\Delta t_1$ , y desde el choque hasta que la fase pasa de nuevo por cero transcurre un tiempo  $\Delta t_2$ . Un ciclo así es el que se representa con puntos azules en la figura 3.14.

Además, como conocemos el tiempo de vuelo de la capa,  $\tau$ , de nuestros experimentos, podemos saber en qué puntos el grano está volando sin más que restar del instante del choque el tiempo de vuelo de la capa. Estos puntos se marcan con círculos rojos en la figura 3.14.

3. Una vez la trayectoria dividida en ciclos, los agrupamos todos de tal manera que coincidan los máximos de los vuelos (calculados a partir del ajuste a una parábola). Luego se ajusta para la posición del contenedor un seno de manera que coincida el momento en el que acaba el vuelo con la fase del choque medida en la señal de la aceleración. Esto se hace así porque de todas las maneras que hemos probado es la que da mejores resultados.

El resultado de estas operaciones se muestra en la figura 3.15. Se puede apreciar en ésta, que el criterio que hemos seguido para acomodar los datos a la posición del contenedor es bastante correcto ya que aparecen muy pocos puntos en los que los granos están volando (círculos en rojo) adelantados o retrasados respecto de la fase donde la capa granular inicia y termina el vuelo (estrellas negras).

Otra observación que podemos hacer es que los puntos experimentales están más dispersos al final del ciclo que al principio. Esto es debido a que los reacomodos que sufren los granos en el movimiento convectivo se ven reflejados en la parte final del ciclo.

En lo que se refiere al vuelo que realizan los granos, éste difiere bastante del que realiza una bola completamente inelástica cuando está sometida exclusivamente a la gravedad. Se puede observar que los puntos aparecen por debajo de la trayectoria predicha por el IBBM. Por esta razón, suponemos que los granos son arrastrados hacia abajo por las paredes.

Este arrastre causa el movimiento lento de deriva, descendente, que aparece como la diferencia de alturas  $\Delta h$  en la figura 3.15. Así, la fuerza que causa el movimiento convectivo es la que hace que los granos se muevan hacia abajo en las paredes laterales. Vamos a intentar encontrar el origen de esta fuerza de arrastre. Para ello, haremos dos ajustes con los puntos en los que suponemos que los granos están volando (círculos rojos en 3.15). El primero

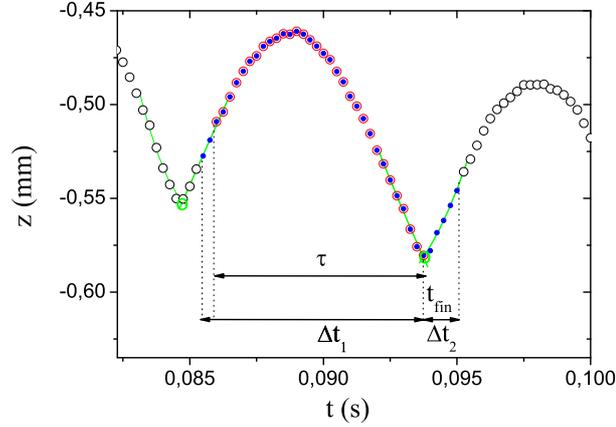


Figura 3.14: Detalle del movimiento resuelto en el tiempo. Los puntos que no pertenecen al ciclo que elegimos aparecen representados en negro, los puntos que pertenecen al ciclo que elegimos en azul, los puntos donde el grano está volando los rodeamos con círculos rojos, las parábolas para detectar donde termina un vuelo son las líneas verdes y los puntos donde terminan los vuelos son los círculos verdes.

será un ajuste a un vuelo parabólico y el segundo a un vuelo amortiguado por una disipación viscosa.

### Vuelo parabólico

Este tipo de ajuste corresponde a un vuelo en el que el grano sufre una aceleración  $-g_p$  (aceleración ajustada a un vuelo parabólico) que puede ser distinta de la aceleración de la gravedad. La trayectoria es entonces una parábola

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g_p t^2 \quad (3.15)$$

donde  $z_0$  y  $v_0$  son respectivamente la posición y la velocidad inicial. Los valores de los parámetros después del ajuste son:

$$\begin{cases} z_0 = 8,2 \pm 0,3 \times 10^{-3} \text{ m} \\ v_0 = 33,83 \pm 0,17 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1} \\ g_p = 10,63 \pm 0,04 \text{ ms}^{-2} \end{cases}$$

Que  $g_p$  sea mayor que  $g$  indica que puede existir una fuerza constante en la dirección de la gravedad sumada a ella que arrastra los granos cerca de las

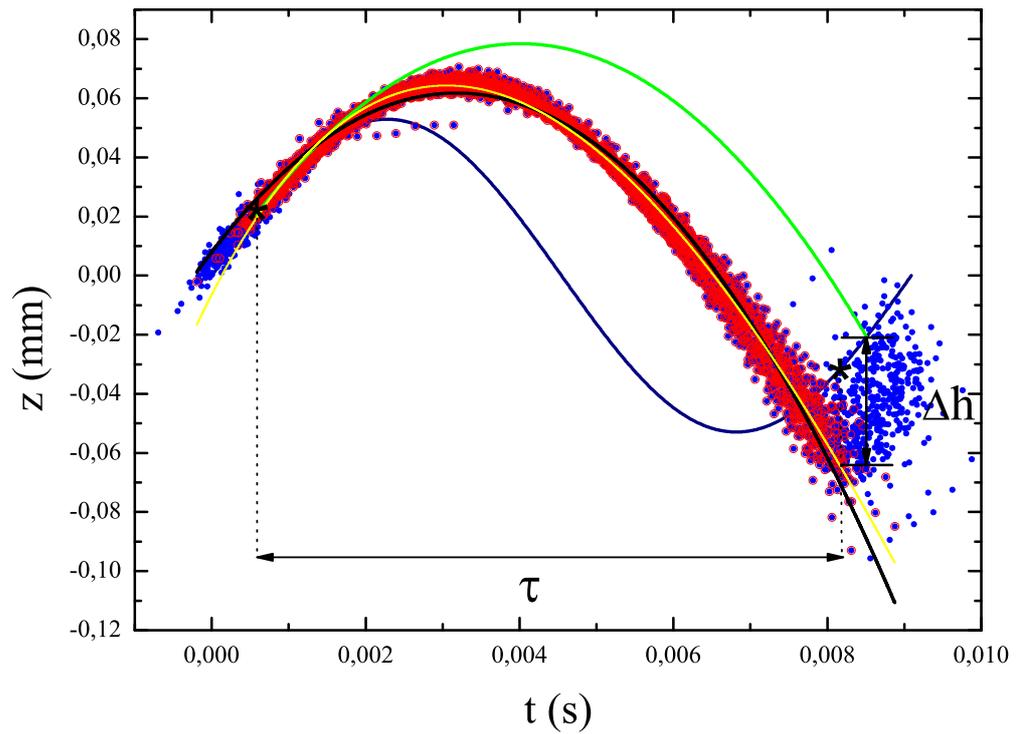


Figura 3.15: Movimiento individual de los granos a lo largo de un ciclo de vibración. Los puntos azules representan las trayectorias resueltas en el tiempo para varios granos. Los que están rodeados por un círculo rojo son los puntos de la trayectoria en los que los granos están volando. La línea negra representa un ajuste de estos puntos a un vuelo parabólico con aceleración  $g_p$  y la línea amarilla representa un ajuste a un vuelo amortiguado. La línea verde representa la trayectoria de un grano que sigue el IBBM. La línea azul representa la posición de la pared lateral. Las estrellas negras muestran la fase, calculada a partir del IBBM, donde la capa inicia el vuelo y la fase, medida experimentalmente, donde la capa termina el vuelo.

paredes. Si estimamos la velocidad a partir del ajuste parabólico indicado, en el instante que la aceleración del contenedor es  $-g$ , obtenemos

$$a(t_0) = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t_0) = v_0 - g_p t_0 = 27,7 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$$

que es ligeramente distinta de la que se obtiene a partir del IBBM,  $v(t_0) = 33,7 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ .

### Vuelo amortiguado

Hemos hecho un ajuste a un vuelo en el que existe una disipación de tipo viscoso. Este tipo de ajuste corresponde a un vuelo en el que el grano sufre una aceleración  $-g_a$  (aceleración ajustada a un vuelo amortiguado) y un rozamiento que es proporcional a la velocidad. La ecuación de movimiento es en este caso:

$$\ddot{z} + \beta \dot{z} = -g_a \quad (3.16)$$

donde  $\beta$  es una viscosidad efectiva. Hacemos notar que  $\beta$  no está relacionada con viscosidad debida al aire, sino más bien a la dependencia con la velocidad de la fricción de los granos en las paredes.

Al resolver la ecuación (3.16) con condiciones iniciales  $\dot{z}(t_0) = z_0$  y  $z(t_0) = v_0$ :

$$z(t) = -\frac{g_a + v_0 \beta}{\beta^2} (e^{-\beta t} - 1) - \frac{g_a t}{\beta} + z_0 \quad (3.17)$$

Al ajustar esta solución a los datos experimentales, se tienen los siguientes valores:

$$\begin{cases} z_0 = -0,6 \pm 6 \times 10^{-3} \text{ m} \\ v_0 = 50 \pm 10 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1} \\ g_a = 12,77 \pm 0,07 \text{ ms}^{-2} \\ \beta = 164 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

De nuevo obtenemos que la aceleración que resulta del ajuste,  $g_a$ , es mayor que  $g$ , pudiendo existir dos tipos de fuerza durante el vuelo del grano: una fuerza constante en la dirección de la gravedad sumada a ella que arrastra los granos cerca de las paredes, y otra de disipación viscosa. Si estimamos la velocidad en el instante del despegue a partir del ajuste para el instante en que la aceleración del contenedor es  $-g$ ,

$$a(t_0) = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t_0) = \frac{g_a + v_0 \beta}{\beta} e^{-\beta t_0} - \frac{g_a}{\beta} = 38,9 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$$

apreciándose de nuevo que es ligeramente distinta de la que se obtiene a partir del IBBM.

Finalmente, al representar estos dos vuelos junto a los datos experimentales (ver figura 3.15) apreciamos que el amortiguado ajusta mejor que el parabólico con aceleración  $g_p$ . También hemos representado la predicción del IBBM sin ninguna modificación para esta aceleración.

En esta sección hemos explicado como a partir de las grabaciones de los granos próximos a la pared lateral del contenedor, hemos obtenido las trayectorias resueltas en el tiempo. Su análisis revela que están compuestas por dos movimientos distintos: uno rápido originado por la vibración, y una deriva lenta, consecuencia del rozamiento con las paredes, que da lugar a la convección. A partir de las trayectorias hemos construido un diagrama que muestra el movimiento de un grano en un periodo de vibración. Del ajuste a un vuelo parabólico y a otro amortiguado resulta una gravedad efectiva mayor que  $g$ .

En resumen:

1. Hemos medido el tiempo de vuelo para una capa granular en distintas condiciones experimentales. Hemos observado que la posición de la duplicación de periodo no varía al cambiar la altura de la capa granular, o las condiciones de rozamiento de los granos entre sí y con las paredes. Sin embargo en vacío la posición de la bifurcación cambia. Independientemente de las condiciones experimentales, las ramas de la bifurcación se saturan.
2. Para que el IBBM se ajuste a los resultados experimentales, hemos introducido modificaciones al modelo. Para implementar el rozamiento de los granos con las paredes usamos una gravedad efectiva, la presencia del aire la incorporamos asemejando el medio granular a un pistón poroso mediante el modelo de Kroll, y la duración finita de los golpes la introducimos mediante un ruido blanco en la fase donde la capa termina el vuelo. Al utilizar todas estas modificaciones simultáneamente recuperamos numéricamente los resultados que obtenemos experimentalmente.
3. Hemos obtenido y analizado las trayectorias de las partículas resueltas en el tiempo antes y después de la duplicación de periodo. A partir de ellas hemos construido un esquema del movimiento de los granos individuales en cada ciclo de vibración. Ajustando a un vuelo parabólico y uno amortiguado hemos calculado la gravedad efectiva de los granos cuando están volando. En ambos casos la gravedad efectiva es **mayor que  $g$** .

# Capítulo 4

## Conclusiones

En este capítulo intentaremos dar una visión global de las conclusiones parciales que hemos expuesto a lo largo de los capítulos anteriores. Además propondremos futuras líneas de investigación surgidas de a raíz de este trabajo.

### 4.1. Tiempos de vuelo

Hemos medido el tiempo de vuelo de una capa granular gruesa al ser vibrada sinusoidalmente en la dirección vertical, siendo el parámetro de control la aceleración normalizada con la gravedad,  $\Gamma$ , la cual variamos aumentando o disminuyendo la amplitud de vibración para una frecuencia constante. No hemos encontrado histéresis en el comportamiento del medio granular.

Para valores de  $\Gamma > 1$ , el tiempo de vuelo,  $\tau$ , crece conforme aumenta  $\Gamma$ . Cuando éste es igual a un periodo de vibración aparece una bifurcación por duplicación de periodo. A partir de ahí, para un mismo valor de  $\Gamma$  la capa realiza un vuelo de duración mayor que un periodo e inmediatamente después otro de duración inferior. Las ramas de la bifurcación se saturan. El rango que hemos explorado está limitado por una segunda bifurcación espacial: de un rollo toroidal se originan dos rollos longitudinales que impiden medir el tiempo de vuelo.

Hemos variado las condiciones experimentales esperando encontrar diferencias significativas en el tiempo de vuelo. Los cambios que hemos realizado son los siguientes.

**Altura de la capa** Al variar la altura de la capa granular no hemos encontrado diferencias apreciables en la posición en la que aparece la bifurcación por duplicación de periodo. Sin embargo encontramos que

el tiempo de vuelo a ambos lados de la bifurcación depende de la altura de la capa. Es de reseñar que para capas suficientemente gruesas la bifurcación espacial no aparece en el rango explorado.

**Fricción** Al cambiar la fricción de los granos entre sí y con las paredes tampoco hemos encontrado ninguna diferencia apreciable antes del punto de bifurcación. Estas diferencias se hacen notables en las ramas de la bifurcación, donde se puede observar un pequeño retraso en los tiempos de vuelo al aumentar la fricción.

**Vacío** Al practicar vacío en el contenedor hemos encontrado que el valor del parámetro de control para el que aparece la bifurcación por duplicación de periodo es menor que cuando en el sistema hay aire. También las ramas de la bifurcación tienen un comportamiento bastante diferente cuando en el sistema existe un gas intersticial.

## 4.2. Modelización de los tiempos de vuelo

Por ser el medio granular fuertemente disipativo, hemos utilizado, como primera aproximación, el IBBM para describir la dinámica del sistema. Este modelo predice el tiempo de vuelo de una capa granular vibrada con una aceleración adimensional  $\Gamma$ . Cuando el tiempo de vuelo es igual a un periodo de vibración aparece una saturación debido a una bifurcación de tipo “*saddle node*” en el que la fase se ajusta para que el tiempo de vuelo sea un periodo por el fenómeno de “*critical slowing down*”. Tras esta región aparece una bifurcación por duplicación de periodo, más allá de la cual la rama de los vuelos largos crece, dando lugar a otras bifurcaciones (que no hemos estudiado), y la de vuelos cortos decrece haciéndose cero.

Al comparar los resultados experimentales con los calculados a partir del modelo encontramos varias diferencias:

1. Para  $\Gamma > 2,5$  el tiempo de vuelo medido experimentalmente es menor que el calculado.
2. El valor del parámetro de control donde aparece la bifurcación es mayor que el predicho por el modelo.
3. No existe saturación del tiempo vuelo por una bifurcación “*saddle node*” en los datos experimentales.
4. Las ramas de la bifurcación obtenidas experimentalmente se saturan.

Por tanto, el IBBM no reproduce exactamente la dinámica de una capa granular vibrada verticalmente. Para intentar corregir el modelo y simular nuestros resultados experimentales hemos hecho algunas modificaciones al modelo.

**Gas intersticial** Para simular la existencia de un gas intersticial en el medio granular hemos modelizado el medio granular como un pistón poroso usando el modelo de Kroll. Al introducir estos efectos, el punto donde se produce la bifurcación se desplaza, pero no coincide el obtenido experimentalmente.

**Gravedad efectiva** Empíricamente hemos introducido una gravedad efectiva que es función de  $\Gamma$  para intentar simular el rozamiento de la capa granular con las paredes laterales del contenedor. Con esta modificación conseguimos mover el punto donde aparece la bifurcación hasta el valor que obtenemos experimentalmente pero no cambia la dinámica, es decir, sigue apareciendo la bifurcación “*saddle node*” y las ramas no se saturan, de tal manera que los datos experimentales antes y después de la duplicación de periodo no coinciden con los calculados.

**Duración finita de la colisión** Al incluir ruido en la fase en la que se produce el choque es posible amortiguar la región de estabilidad de la bifurcación de tipo “*saddle node*”. El comportamiento del tiempo de vuelo calculado con esta modificación sigue siendo el mismo que el calculado a partir del modelo sin modificar. Además, al considerar la duración finita de los choques podemos explicar un cambio de pendiente en la tendencia creciente del tiempo de vuelo.

Al simular la combinación de estas tres modificaciones en el IBBM reproducimos cualitativamente bien los resultados que obtenemos experimentalmente del tiempo de vuelo.

### 4.3. Movimiento resuelto en el tiempo

El medio granular, al ser vibrado verticalmente, presenta un movimiento convectivo: los granos bajan por la paredes laterales y ascienden por el centro de la celda. Al estudiar las trayectorias resueltas en el tiempo de los granos próximos a las paredes observamos dos comportamientos:

**Movimiento rápido** Los granos próximos a las paredes tienen una dinámica similar a la de la capa granular considerada como un sólido a escalas del tiempo de vibración.

**Movimiento lento** Aparece una deriva lenta de los granos. Esta deriva es consecuencia del movimiento convectivo a escalas de tiempo mayores que el tiempo de vibración.

Al construir un esquema del movimiento de los granos próximos a las paredes durante un ciclo de vibración, apreciamos un arrastre respecto el movimiento que realizaría un grano si la única fuerza que actuase fuera la gravedad. Para clarificar el origen de este arrastre hacemos dos ajustes distintos (trayectoria parabólica y amortiguada) con los datos experimentales cuando los granos están volando. Ambos revelan que la aceleración que sufren los granos es mayor que la gravedad. El origen de esta fuerza extra, que se suma a la gravedad y arrastra los granos cuando estos están en contacto solo con la pared lateral y otros granos, puede ser el rozamiento con las paredes laterales.

Esta es una prueba de que las paredes son las causantes del movimiento convectivo, arrastrando los granos hacia abajo; por conservación de la masa, éstos se mueven radialmente hacia el centro del contenedor y posteriormente ascienden por él generando un rollo convectivo.

#### 4.4. Futuras investigaciones

Son varios los aspectos que todavía no comprendemos suficientemente bien y que pueden ser el objeto de futuras investigaciones.

**Tamaño y geometría de la celda** Estos pueden ser factores que influyan en el movimiento convectivo de la capa granular o en el movimiento de ésta como un sólido

**Naturaleza del gas intersticial y tamaño de los granos** Es interesante realizar medidas sistemáticas del tiempo de vuelo con granos de distintos de distintos tamaños para estudiar la influencia del gas intersticial. Con el mismo objetivo, utilizar gases distintos al atmosférico y con distintas presiones revelarán la influencia que tiene el aire en el movimiento del medio granular como un sólido.

**Ondas de compactación** Hemos hecho la hipótesis de que el cambio de tendencia que observamos en los datos experimentales se debe a la existencia de ondas de compactación en el medio granular. Considerar la existencia de estas ondas podría ser útil para explicar por qué las predicciones del IBBM son tan distintas de los resultados experimentales que obtenemos.

Sin duda, la pregunta que queda sin responder es cómo se relaciona el movimiento del medio granular como un sólido con el movimiento de los granos en las paredes. La respuesta a esta pregunta puede clarificar aún más el origen del movimiento convectivo en los medios granulares.



# Bibliografía

- [1] C. Coulomb. Essay on the rules of maximis and minimis applied to some problems of equilibrium related to architecture. *Acad. Roy. Sci. Mem. Phys.*, 7:343, 1773.
- [2] M. Faraday. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 52:299–318, 1831.
- [3] O. Reynolds. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. with experimental illustrations. *Phil. Mag. Ser. 5*, 20:469, 1885.
- [4] H. A. Janssen. Tests on grain pressure silos. *Z. Vereins Deutsch Ing.*, 39:1045, 1895.
- [5] R.A. Bagnold. *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*. 1941.
- [6] R. L. Brown and J. C. Richards. *Principles of Powder Mechanics*. 1970.
- [7] A. Metha and G. C. Barker. The dynamics of sand. *Rep. Prog. Phys.*, 57:383, 1994.
- [8] Jacques Duran. *Sands, Powders and Grains*. 2000.
- [9] T. Akiyama, K.M. Aoki, K. Yamamoto, and T. Yoshikawa. Experimental study on vibration-induced convection and heaping in granular beds. *Granular Matter*, 1:15, 1998.
- [10] R. L. Brown and J. C. Richards. Profile of flow of granules through apertures. *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 38:243, 1960.
- [11] F. Melo, P. B. Umbanhowar, and H. L. Swinney. Hexagons, kinks and disorder in oscillated layers. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3838, 1995.
- [12] G. H. Ristow. *Pattern Formation in Granular Materials*. 2000.

- 
- [13] P. Evesque and J. Rajchenbach. Instability in a sand heap. *Phys. Rev. Lett.*, 62:44, 1989.
- [14] J. B. Knight, E. E. Ehrichs, V. Y. Kuperman, J. K. Flint, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Experimental study of granular convection. *Phys. Rev. E*, 54:5726, 1996.
- [15] J. A. C. Gallas, H. J. Herrmann, and S. Sokolwski. Convection cells in vibrating granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1371, 1992.
- [16] C. Laroche, S. Doady, and S. Fauve. Convective flow of granular masses under vertical vibrations. *J. Phys. France*, 50:699, 1989.
- [17] J. Aguilar. *Curso de Termodinámica*. 1992.
- [18] R. Ramírez, D. Risso, and P. Cordero. Thermal convection in fluidized granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1230, 2000.
- [19] R. D. Wildman, J. M. Huntley, and D. J. Parker. Convection in highly fluidized three-dimensional granular beds. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3304, 2001.
- [20] S. Douady, S. Fauve, and C. Laroche. Subharmonic instabilities and defects in a granular layer under vertical vibrations. *Europhys. Lett.*, 8:621, 1989.
- [21] E. van Doorn and R. P. Behringer. Dilation of a vibrated granular layer. *Europhys. Lett.*, 40:387, 1997.
- [22] E. Fermi. On the origin of cosmic radiation. *Phys. Rev.*, 75:387, 1169.
- [23] N. B. Tufillaro. *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. 1992.
- [24] M. Franaszek and P. Pierański. Jumping particle model. critical slowing down near the bifurcation points. *Can. J. Phys.*, 63:488, 1985.
- [25] A. Metha and J. M. Luck. New temporal behavior for a nonlinear dynamical system: The completely inelastic bouncing ball. *Phys. Rev. Lett.*, 65:393, 1990.
- [26] P. J. Holmes. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration*, 84:173, 1982.
- [27] J. M. Luck and A. Metha. Bouncing ball with a finite restitution: Chattering, locking, and chaos. *Phys. Rev. E*, 48:3988, 1993.

- 
- [28] A. Garcimartín, D. Maza, J. L. Ilquimiche, and I. Zuriguel. Convective motion in a vibrated granular layer. *Phys. Rev. E*, 65:031303, 2002.
- [29] W. Kroll. *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, 20:2, 1954.
- [30] R. G. Gutman. Vibrated beds of powders: a theoretical model for the vibrated bed. *Trans. Instn. Chem. Engrs.*, 54:174, 1976.
- [31] L. I. Reyes, I. Sánchez, and G. Gutiérrez. Air-driven reverse buoyancy. *Physica A*, 358:466, 2005.
- [32] J. M. Kay and R. M. Nedderman. *Fluid Mechanics and Transfer Processes*. 1985.
- [33] R. M. Nedderman. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. 1992.
- [34] T. H. Wu. *Soil Dynamics*. 1971.