

Estudio experimental sobre formación y dinámica de estructuras espaciales en sistemas confinados

Trabajo de Investigación presentado por
María Luisa Ramón Sáenz
para optar al grado de Doctora en Ciencias Físicas

10 de Mayo de 2000

D. Héctor L. Mancini y D. Diego Maza, Doctores en Ciencias Físicas del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra

CERTIFICAN: que el presente Trabajo de Investigación, “Estudio experimental sobre formación y dinámica de estructuras espaciales en sistemas confinados” ha sido realizado bajo nuestra dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, por Dña. María Luisa Ramón Sáenz.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos la presente certificación en Pamplona, el diez de mayo de dos mil.

Fdo.: Héctor L. Mancini

Fdo.: Diego Maza

A Carlos

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis directores de tesis Héctor L. Mancini y Diego M. Maza la inestimable ayuda prestada en la realización de este trabajo, así como su apoyo y buen ánimo especialmente en la última etapa de la tesis.

Agradezco a todos los miembros del departamento su grata compañía y disponibilidad. Son muchas las personas con las que he compartido buenos y malos momentos en estos casi cinco años, comenzando por mis compañeros de despacho actuales, Begoña Peña, Miguel Angel Pelacho, Santiago Madruga y Carola Mendoza, y siguiendo por Mari Jose Collados, Pedro Elizalde, Maria Jesús Chasco, Andrea Vallone, Sergio Casado, Diego Valladares, Cecilia Wolluschek, Stefano Boccaletti, Angel Garcimartín, Carlos Pérez, Carmen Palacios, Inés Pérez y Emilio Díaz. Sería muy largo enumerar a todos los antiguos compañeros de departamento, que siguen conservando un lugar destacado en mi memoria.

Merecen mención aparte Javier Burguete, Wenceslao González y el recientemente incorporado Alejandro Godoy, por su tarea al frente del sistema informático del departamento. Su valiosa e imprescindible ayuda me ha permitido superar muchas dificultades.

Agradezco a la gente del Istituto Nazionale di Ottica Applicata de Florencia su agradable acogida durante mis estancias en este centro, en especial a Riccardo Meucci, que me introdujo en el estudio de los láseres y en el conocimiento de la hermosa región toscana, a Laura Calero y su familia, y a otros compañeros de trabajo como Antonino Labate, Marco Ciofini y Enrico Allaria.

Mi más sincera gratitud a los que fuera del ámbito laboral me han animado durante todo este tiempo, en especial a los que han tenido que soportar mi nerviosismo en los últimos meses: mis compañeras de piso, mi familia, mis amigos y correspondientes, y en último lugar el que más me ha ayudado a pesar de no saber física, Carlos.

Respecto a la financiación de mi tesis, mi reconocimiento a la labor de la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra, que me ha mantenido desde octubre de 1995. El trabajo de investigación resumido en esta memoria ha participado de los proyectos del Ministerio de Educación y Cultura PB95-0578, de la Unión Europea FMRX-CT96-0010 y de la Universidad de Navarra (PIUNA), así como de la Acción Integrada España-Italia HI97-30.

Índice general

1. Introducción	5
2. Conceptos básicos	9
2.1. Convección	9
2.1.1. Introducción general al fenómeno convectivo	9
2.2. Láseres	15
2.2.1. Introducción general a los láseres	15
2.3. Trabajos previos	20
3. Sistema experimental y métodos de medida	27
3.1. Sistema convectivo	27
3.1.1. Montaje experimental	31
3.2. Láser de CO ₂	35
3.2.1. Componentes del láser y montaje experimental	35
3.3. Características comunes a ambos sistemas	38
4. Formación de estructuras	41
4.1. Pequeña relación de aspecto	41
4.1.1. Estructura convectiva hexagonal	50
4.1.2. Trabajos similares en sistemas ópticos	55
4.2. Relaciones de tamaño mayores	56

4.2.1. Trabajos similares en convección	59
5. Dinámica temporal	63
5.1. Pequeña relación de aspecto	63
5.1.1. Tipos de comportamiento temporal presentes	64
5.1.2. Dinámicas similares obtenidas en un sistema óptico	73
5.2. Relaciones de tamaño mayores	73
5.2.1. Selección y estabilización de patrones	77
6. Simulación numérica de la dinámica en el láser	85
6.1. Modelo teórico	85
6.1.1. Ruptura de simetría	88
6.1.2. Parte radial	89
6.1.3. Elección de los parámetros	90
6.2. Programa que realiza la simulación	91
6.3. Resultados de la simulación	92
6.3.1. Sin término de ruptura de simetría	92
6.3.2. Introduciendo un término de ruptura de simetría	92
7. Conclusiones	97
A. Ecuaciones básicas	99
A.1. Ecuaciones que rigen la CBM	99
A.2. Ecuaciones que rigen la dinámica del láser	103
Bibliografía	109

Capítulo 1

Introducción

La formación de estructuras espaciales es un tema de estudio de actualidad que despierta gran interés en numerosas ramas de la Ciencia, afectando a la mayor parte de los campos de investigación científica. Basta con abrir los ojos para descubrir la enorme variedad de estructuras que nos rodea: las formas que adoptan las dunas de un desierto, la singular estructura de algunos organismos microscópicos, nuestras propias células, la curiosa pigmentación en la piel de algunos mamíferos (cebras, leopardos, tigres,...), los diseños de algunos peces tropicales, el crecimiento de cristales, etc.

El mismo tipo de diseños se repite en sistemas microscópicamente tan distintos como un panal, fluidos en convección, procesos químicos de reacción-difusión (inestabilidades tipo Turing), tejidos celulares, el caparazón de algunos animales o incluso la estructura del ojo de un insecto (Fig. 1.1). Lejos de explicar a qué se deben estas *casualidades*, analizamos situaciones particulares en sistemas físicos muy concretos. Es nuestra aportación a un estudio siempre incompleto que tiende a la comprensión del mundo en que vivimos.

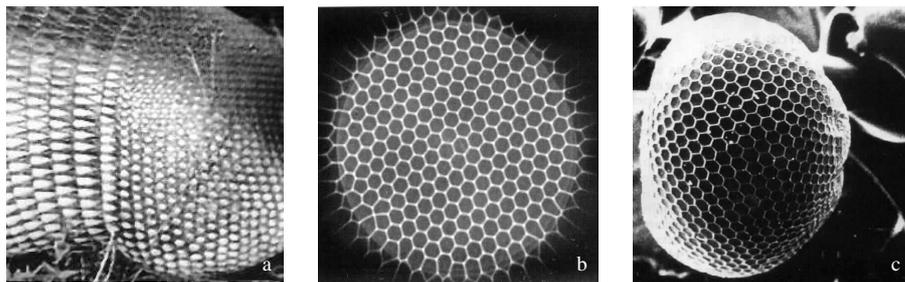


Figura 1.1: Redes hexagonales en distintos sistemas: (a) Caparazón de un armadillo [*National Geographic. El maravilloso mundo de los animales*, vol. 5 (RDA, Madrid, 1999)]. (b) Convección de Bénard–Marangoni (extraída de la Ref. [1]). (c) Ojo de insecto (*Squilla mantis*) X48 [R. Paniagua y colaboradores, *Citología e histología vegetal y animal* (McGraw-Hill-Interamericana, Madrid, 1997)].

Muchos estudios científicos han comenzado con la observación casual de un fenómeno. Así, se piensa [1] que la observación totalmente fortuita de A. Guéhard del movimiento del líquido revelador en un recipiente, pudo inspirar a H. Bénard [2] para iniciar el estudio sistemático de la formación de estructuras en convección. Bénard realizó una serie de experiencias calentando uniformemente desde el fondo un recipiente con *spermaceti* (aceite de ballena). Observó que el fluido en convección no se movía de un modo desordenado, sino que se organizaba (*auto-organizaba*) formando una red aproximadamente regular y homogénea de celdas hexagonales, en las que el fluido subía por el centro de las celdas y bajaba por sus paredes. Este experimento dio origen a otros muchos trabajos, entre los que destacaremos el de Lord Rayleigh [3], que buscó una explicación teórica a las celdas de Bénard. Partiendo de las ecuaciones que describen un fluido, realizó un análisis lineal de la convección en una capa de fluido confinada entre dos superficies. Supuso estas superficies perfectamente conductoras, paralelas e infinitas, condiciones de contorno que simplificaron considerablemente el estudio a costa de apartarle del trabajo de Bénard. En su análisis, el movimiento convectivo se debe únicamente a la flotabilidad asociada al empuje de Arquímedes, a pesar de que Bénard sugirió en su trabajo la influencia en la convección de las variaciones de la tensión superficial con la temperatura.

El trabajo experimental de M.J. Block en 1956 [4], hizo patente la necesidad de incluir este efecto en el estudio. Dos años más tarde, J.R.A. Pearson [5] desarrolló una teoría para dar explicación al experimento de Block, estudiando la estabilidad de una capa de fluido con la superficie superior abierta al aire. Su modelo, que reproduce cuantitativamente el resultado de experimentos realizados en capas muy delgadas, no incluye la flotabilidad (no considera la presencia de la gravedad), ni las posibles deformaciones de la superficie. El primer análisis teórico que combinó los efectos de la flotabilidad y la tensión superficial se debe a D.A. Nield [6]. Al englobar ambos efectos, inició el estudio de lo que se conoce como convección de Bénard–Marangoni (CBM).

Pero como hemos visto, las estructuras espaciales no son exclusivas de la convección. En el láser, la investigación sobre formación y dinámica de estructuras se inició prácticamente desde su descubrimiento. Ya en 1963, W.W. Rigrod [7] publicó las imágenes de quince de las estructuras espaciales presentes en un láser de helio-neón, que aisló ajustando convenientemente una apertura circular centrada en el eje óptico del láser. Este tipo de estructuras surgen a partir de los modos electromagnéticos del resonador. La forma particular de distribución del campo eléctrico dentro de él, da lugar a las variaciones de intensidad en el plano transversal del haz láser que conforman los patrones¹.

El aliciente de que los tiempos característicos son muy cortos, ha convertido los sistemas ópticos en un medio óptimo para estudiar dinámica espacio-temporal. Así, los estudios teóricos sobre este tema en láseres de CO₂, se multiplicaron a raíz del trabajo de J.R. Tredicce y colaboradores [8], un artículo experimental en el que dieron evidencia de la aparición de estructuras espacialmente complejas, tanto estacionarias como dependientes del tiempo. Interpretaron este comportamiento temporal como el resultado de una inter-

¹En esta memoria, utilizaremos los términos *patrón* y *estructura* indistintamente.

acción no lineal entre modos transversales de la cavidad. Con su trabajo, abrieron paso al estudio del caos espacio-temporal en sistemas láser.

La similitud de las estructuras espaciales macroscópicas encontradas en sistemas distintos, sugiere la búsqueda de técnicas comunes de estudio. Las ecuaciones “microscópicas” que describen dichos sistemas, más conocidas como *ecuaciones básicas*, son obviamente distintas: en fluidos, la ecuación de Navier–Stokes, la de continuidad y una ecuación para el balance de energía; en reacciones químicas, ecuaciones que recogen las características esenciales de las reacciones consideradas; en láseres, las de Maxwell–Bloch; etc. Estas ecuaciones básicas son ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales, lo que dificulta enormemente su estudio. En muchos casos, cuando resulta complicado analizarlas o incluso obtenerlas, se recurre a *modelos fenomenológicos* [9, 10, 11]. Son sistemas de ecuaciones más sencillas que presentan el mismo tipo de inestabilidades que el sistema experimental, pero son más tratables (analítica o numéricamente) que las ecuaciones básicas. Estos modelos, que recogen las simetrías propias del problema, sí son válidos en algunos casos para sistemas físicos distintos [12].

Así, los avances en un campo pueden ayudar en el desarrollo de otros a través de las relaciones que existen entre ellos, y los estudios de resultados aplicables a distintas disciplinas tendrán un valor añadido. Es el caso de la teoría de grupos. Esta rama de las Matemáticas tiene una aplicación evidente en el estudio de la formación y dinámica de estructuras, ya que permite predecir lo que se va a observar en un sistema físico a partir de un análisis de las simetrías del propio sistema y de las ecuaciones básicas que lo rigen.

Los métodos de la teoría de grupos, independientes de las características específicas del sistema considerado, ponen de relieve la influencia de las simetrías de las condiciones de contorno (además de las del sistema) sobre las estructuras que se forman y su dinámica. En este contexto, son interesantes los trabajos de Solari y Gilmore [13] y de Dangelmayr y Knoblock [14]. Debe puntualizarse que existe una gran diferencia entre sistemas extensos (que generalmente se modelizan como sistemas de extensión lateral infinita) y sistemas de dimensión transversal pequeña. En los primeros, se reduce considerablemente el efecto de las fronteras laterales, que están suficientemente alejadas. Se suele hablar en este caso de sistemas de *relación de aspecto* muy grande, en contraste con los de relación de aspecto pequeña o moderada, en que el efecto de las paredes laterales determina las estructuras que aparecen. Nos vamos a centrar en este último tipo de sistemas, que denominaremos *confinados*. El principal atractivo de los sistemas confinados, reside en la gran variedad de estructuras a que pueden dar lugar mediando pequeños cambios en la geometría de las condiciones de contorno, o incluso en sus propiedades mecánicas o térmicas.

Se ha llegado a afirmar que las simetrías macroscópicas permiten abordar de forma unificada el estudio de la formación de patrones en sistemas que difieren fuertemente a escala microscópica [15]. Esta idea subyace en el planteamiento global del estudio que se presenta en esta memoria. Mostramos resultados experimentales obtenidos sobre formación y dinámica de estructuras espaciales en dos sistemas confinados distintos: una capa de fluido en convección con superficie libre, y un láser de CO₂. Comprobaremos el efecto

de la simetría del contorno, cilíndrica en el primer caso y anular en el segundo. No hemos tratado de reproducir el mismo tipo de resultados en ambos sistemas; en todo caso, los dos estudios se complementan.

Los objetivos planteados son los siguientes:

- Localizar y caracterizar las estructuras que aparecen para CBM en recipientes cilíndricos con relaciones de aspecto pequeñas.
- Localizar y caracterizar las estructuras que se forman en un láser de CO_2 con simetría anular, centrándonos en un valor de relación de aspecto no muy grande.
- Determinar y analizar las dinámicas espacio-temporales presentes en ambos sistemas.

El trabajo se estructura conforme al siguiente esquema. El capítulo 2 es una revisión de los conceptos básicos necesarios para la comprensión de los resultados que se presentan, tanto en convección como en láseres. Se incluye en él una revisión de trabajos previos. Las ecuaciones básicas que describen las experiencias pueden encontrarse en el apéndice. En el capítulo 3, se describen los sistemas experimentales junto con las técnicas de medida utilizadas. En los capítulos 4, 5 y 6, se presentan los resultados obtenidos: el 4 se centra en la caracterización de las estructuras, el 5 en la dinámica, y en el 6 se ofrece un modelo numérico sencillo que permite reproducir los resultados dinámicos observados en el láser. Por último, en el capítulo 7 se destacan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Conceptos básicos

Hemos visto en la introducción la gran riqueza de sistemas físicos que dan lugar a la formación de patrones, haciendo referencia tanto a los presentes en la Naturaleza como a los ideados por el hombre. Resulta realmente sorprendente comprobar cómo sistemas que son microscópicamente tan distintos y que experimentan mecanismos físicos tan dispares, pueden conducir a resultados tan similares. Estudiaremos en este capítulo los mecanismos físicos que dan lugar a la formación de estructuras espaciales en cada sistema (fluidos en convección y láseres).

2.1. Convección

2.1.1. Introducción general al fenómeno convectivo

La *convección*, como la conducción y la radiación, es un mecanismo de transporte de calor. La característica diferenciadora de la convección respecto a los otros dos mecanismos es que en ella, la transferencia de calor se realiza mediante el movimiento de la sustancia en que la energía está almacenada. Este movimiento puede ser debido a causas naturales, dando lugar a lo que se llama *convección natural*, o artificiales, en lo que se denomina *convección forzada*. Centrándonos en el caso de la convección natural, si se pone un fluido en contacto con una superficie calefactora y se lo somete a un gradiente de temperatura vertical en sentido contrario a la gravedad, tras superar un cierto umbral, el fluido comenzará a moverse transportando calor por convección¹.

Los estudios realizados sobre convección suelen clasificarse en función del tipo de

¹Los cambios cualitativos en la dinámica producidos al variar un parámetro del sistema (en este caso, el paso de la solución conductiva a una convectiva), reciben el nombre de *bifurcaciones*. En general, cuando se produzcan cambios cualitativos en el estado de un sistema, medien o no variaciones de sus parámetros, hablaremos de la *desestabilización* o *pérdida de estabilidad* de dicho estado.

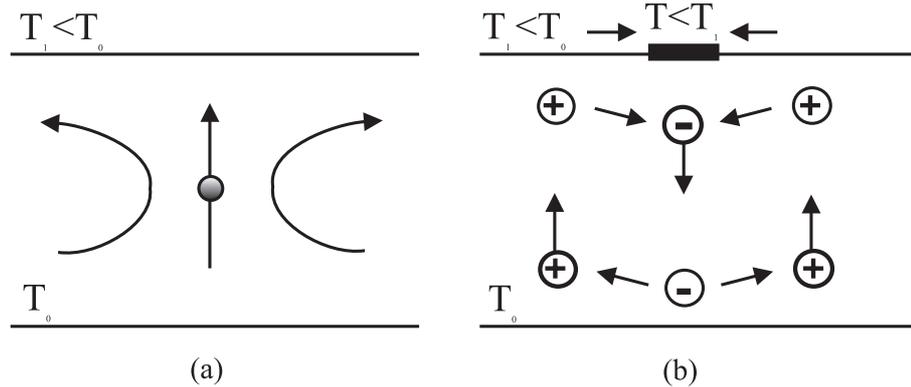


Figura 2.1: Mecanismos desestabilizantes: (a) Empuje actuando sobre una gota a temperatura mayor que la de su entorno. (b) Efecto de la tensión superficial.

mecanismo físico que da lugar al movimiento del fluido. De entre los distintos tipos de convección, destacan dos:

- *Convección de Rayleigh–Bénard (CRB)*: en ella, el único mecanismo que pone el fluido en movimiento es la flotabilidad asociada al empuje de Arquímedes, que es debida a la variación de la densidad del fluido con la temperatura. En los experimentos sobre CRB, el fluido está confinado entre dos superficies y se calienta desde la inferior.
- *Convección de Bénard–Marangoni (CBM)*: el movimiento aparece debido a la dependencia de la tensión superficial con la temperatura. En presencia de la gravedad, el empuje de Arquímedes también contribuirá a la desestabilización del fluido. En estos experimentos, se deja la superficie del fluido en contacto con el aire. Es lo que se conoce como convección con superficie libre, que rompe la simetría de transmisión de calor en el eje vertical característica de la CRB.

Convección de Bénard–Marangoni. Mecanismos estabilizantes y desestabilizantes

Consideremos una capa de fluido de extensión lateral infinita, calentada desde abajo y con su superficie en contacto con la atmósfera. Llamaremos ΔT a la diferencia de temperatura entre las superficies inferior y libre del fluido.

Si ΔT parte de cero y se aumenta poco a poco, el fluido permanece en reposo y el calor sólo se transmite por conducción hasta que se alcanza una determinada diferencia de temperatura crítica, ΔT_c . Por debajo de este umbral, el campo de temperaturas puede describirse mediante un gradiente lineal: el fluido queda “estratificado” en capas isotermales paralelas al fondo, cuya temperatura disminuye al aproximarnos a la superficie. Esta estratificación del campo de temperaturas es inestable, ya que si una pequeña masa de

fluido se ve desplazada a otra capa por cualquier pequeña perturbación, quedará rodeada de fluido a distinta temperatura, y por tanto con distinta densidad. Dicha masa experimentará una fuerza debida al *empuje de Arquímedes*, tendente a amplificar el pequeño desplazamiento inicial [Fig. 2.1(a)]. De este modo, el empuje de Arquímedes hace que el fluido pierda estabilidad y comience la convección.

Por otra parte, si por cualquier fluctuación térmica se forma en la superficie libre una pequeña región a temperatura mayor que la de su entorno, la tensión superficial disminuirá localmente en esa zona (consideramos el caso más habitual, en que la tensión superficial disminuye al aumentar la temperatura). Como consecuencia, habrá un desplazamiento del fluido hacia la zona más fría de la superficie [Fig. 2.1(b)], movimiento que se transmitirá por viscosidad al resto del fluido.

Un sencillo cálculo permite estimar los tiempos característicos de estos dos mecanismos. En el caso del empuje de Arquímedes, la causa de la desestabilización es la variación de la densidad con la temperatura, que está regulada por el coeficiente de dilatación volumétrico α . Si llamamos ρ_0 a la densidad promediada en el rango de temperaturas bajo estudio, en una aproximación lineal, el aumento de la densidad del fluido con la temperatura estará dado por $\rho_0\alpha\Delta T$. Al variar la densidad, el empuje por unidad de volumen también aumentará:

$\frac{\Delta \text{Empuje}}{\text{Volumen}} = g\rho_0\alpha\Delta T$, donde g es la aceleración de la gravedad. Basta con introducir esta fuerza por unidad de volumen en la segunda ley de Newton para estimar la aceleración con que se mueve la gota: $g\alpha\Delta T$. El tiempo que le cuesta recorrer una distancia d del orden del espesor de fluido, está dado por [16]:

$$t_{arq} \approx \sqrt{\frac{d}{g\alpha\Delta T}}. \quad (2.1)$$

Respecto a la tensión superficial, sus variaciones con la temperatura suelen ser pequeñas, con lo que puede asumirse para su coeficiente σ una relación lineal: $\sigma = \sigma_0 - \sigma'\Delta T$. La tensión superficial es una energía por unidad de área, y se puede considerar que la energía asociada a una variación de temperatura ΔT es $\Delta E = |\sigma'| A \Delta T$, donde A es el área y σ' el coeficiente de variación de la tensión superficial con la temperatura ($d\sigma/dT$). A partir de esta expresión, se puede estimar la velocidad característica del movimiento de una gota de masa m :

$v \sim \sqrt{\frac{\Delta E}{m}} \sim \sqrt{\frac{|\sigma'| A \Delta T}{m}} \sim \sqrt{\frac{|\sigma'| A \Delta T}{\rho_0 V}} \sim \sqrt{\frac{|\sigma'| \Delta T}{\rho_0 d}}$, donde se ha aproximado la densidad por su valor promedio ρ_0 y sustituido el volumen $V = A d$. Con esta expresión de v , es sencillo obtener el valor del tiempo característico asociado a la tensión superficial:

$$t_{sup} \approx \sqrt{\frac{\rho_0 d^3}{|\sigma'| \Delta T}}. \quad (2.2)$$

La existencia de una diferencia de temperatura umbral ΔT_c , pone de manifiesto la presencia de mecanismos disipadores, opuestos a las fuerzas desestabilizadoras. Éstos son

la difusión lateral del calor y la fuerza de rozamiento viscoso. Ambos procesos están gobernados por una ley del tipo $\partial_t(\dots) \propto \nabla^2(\dots)$, en la que los coeficientes de proporcionalidad son respectivamente la difusividad térmica κ y la viscosidad cinemática del fluido ν , que tienen dimensiones de *longitud*²/*tiempo*. La difusión lateral de calor tiende a homogeneizar la temperatura de cada zona del fluido en un tiempo característico que, para una distancia d , viene dado por

$$t_\theta = \frac{d^2}{\kappa}. \quad (2.3)$$

La fuerza de rozamiento viscoso se opone al desplazamiento relativo de las distintas zonas del fluido, y aumenta con la velocidad del movimiento. Su tiempo característico por unidad de volumen, que representa el tiempo que tarda en desaparecer una perturbación aplicada al campo de velocidades, es

$$t_\nu = \frac{d^2}{\nu}. \quad (2.4)$$

Si la combinación de los tiempos característicos de estos procesos es mayor que la de t_{arq} y t_{sup} , el estado conductivo perderá estabilidad y comenzará la convección. En caso contrario, el fluido permanecerá en reposo.

La contribución a la convección de cada uno de los mecanismos que la favorecen se puede medir mediante dos números adimensionales, el **número de Rayleigh** y el **número de Marangoni**, que pueden interpretarse como el cociente de los tiempos disipadores y motores. El número de Rayleigh, Ra , está directamente vinculado al empuje de Arquímedes. Queda definido por la siguiente expresión

$$Ra = \frac{t_\theta t_\nu}{t_{arq}^2} = \frac{\alpha g d^3 \Delta T}{\kappa \nu} \quad (2.5)$$

en la que se ve la fuerte dependencia de Ra con el espesor de la capa de fluido d y su dependencia lineal con la diferencia de temperaturas ΔT .

El número de Marangoni, Ma , está relacionado con la tensión superficial:

$$Ma = \frac{t_\theta t_\nu}{t_{sup}^2} = \frac{|\sigma'| d \Delta T}{\kappa \eta} \quad (2.6)$$

donde $\eta = \rho \nu$ es la viscosidad dinámica del fluido. La dependencia de Ma tanto con d como con ΔT es lineal. El valor de d y las propiedades físicas de los fluidos utilizados, hacen que en nuestras experiencias $Ra \gg Ma$.

Ambos números dan una medida adimensional de la diferencia de temperatura entre las superficies inferior y libre del fluido. Al igual que se habla de una diferencia de temperatura crítica (la que define el umbral convectivo), se pueden definir los números de Rayleigh y Marangoni críticos Ra_c y Ma_c . Dichos números cumplen, en una aproximación lineal, la relación sugerida por Nield [6], que pone de manifiesto que los valores de Ra y Ma no son independientes:

$$\frac{Ra_c}{Ra_{oc}} + \frac{Ma_c}{Ma_{oc}} \simeq 1, \quad (2.7)$$

donde Ra_{oc} (Ma_{oc}) es el valor que toma Ra_c (Ma_c) cuando el único mecanismo desestabilizador presente es el empuje (la variación de la tensión superficial con la temperatura).

Por su parte, la relación entre los tiempos característicos de difusión térmica y rozamiento viscoso es una característica propia del fluido utilizado. Recibe el nombre de número de Prandtl:

$$Pr = \frac{t_\theta}{t_\nu} = \frac{d^2/\kappa}{d^2/\nu} = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (2.8)$$

Si este número adimensional es muy grande, el tiempo característico de relajación de perturbaciones de tipo mecánico es mucho menor que el de las térmicas, y la velocidad varía para adaptarse *adiabáticamente* a las perturbaciones del campo de temperaturas. En cambio, si el número de Prandtl es pequeño (menor que 10), las perturbaciones del campo de temperaturas ya no determinan la evolución del campo de velocidades. En nuestro caso, trabajamos con fluidos de $Pr > 900$, con lo que el campo de temperaturas registrará claramente la evolución del campo de velocidades en el fluido. Consideraremos que el valor de t_θ en la dirección vertical proporciona el tiempo característico de los experimentos.

También es importante el concepto de *distancia al umbral convectivo*, más conocido como *supercriticalidad*, que se define a partir de ΔT :

$$\epsilon = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}. \quad (2.9)$$

Nos vamos a centrar en el estudio de la CBM en recipientes cilíndricos de pequeña relación de aspecto. La *relación de aspecto* Γ (también conocida como *razón de tamaños* o *esbeltez*) se define como el cociente de la dimensión horizontal característica del sistema (en nuestro caso el diámetro D) y la dimensión vertical (el espesor de aceite utilizado):

$$\Gamma = D/d. \quad (2.10)$$

Esta definición de Γ no es aplicable a todo tipo de sistemas físicos. Un criterio más general, compara D con la longitud de onda λ de las estructuras formadas ($\Gamma = D/\lambda$). En convección, $\lambda \sim d$, con lo que se recupera la definición que vamos a utilizar. Si $D \approx d$, se habla de pequeña relación de aspecto. En esta situación, la geometría del recipiente influye fuertemente en la selección de las estructuras convectivas que se forman. Si por el contrario $D \gg d$, el patrón observado es prácticamente independiente del contorno. En el caso de la convección de Bénard–Marangoni, se encuentran las típicas redes extensas de hexágonos de Bénard.

En el apéndice pueden encontrarse las ecuaciones básicas de la convección. Se aplican al caso de CBM con simetría cilíndrica estudiado analíticamente en las referencias [17, 18]. Respecto a las condiciones de contorno mecánicas, se considera que el fondo es rígido, las paredes laterales deslizantes, y la superficie libre no deformable. En cuanto a las térmicas, el fondo se supone conductor perfecto, las paredes laterales adiabáticas y la superficie

libre parcialmente conductora. Para caracterizar la transmisión de calor a través de la superficie libre, se utiliza el número de Biot (Bi), un número adimensional que da cuenta del calor transferido entre el fluido y el aire².

En la resolución de las ecuaciones básicas adimensionalizadas, particularizadas para nuestro caso (CBM con pequeña relación de aspecto en simetría cilíndrica) y con las condiciones de contorno expuestas, se parte de la solución conductiva ($\mathbf{v}_{cond} = 0, T_{cond} = -z + T_0$) y se le aplican las siguientes perturbaciones: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r})e^{\sigma t}$ para la velocidad, $\theta(\mathbf{r}, t) = \theta(\mathbf{r})e^{\sigma t}$ para el campo de temperaturas, y $\pi(\mathbf{r}, t) = \pi(\mathbf{r})e^{\sigma t}$ para la presión. En el análisis se conservan únicamente los términos lineales, y se considera el caso de estabilidad marginal (esto es, se considera la tasa de crecimiento de las perturbaciones $\sigma = 0$). Como resultado, se llega a una expresión para las componentes (u, v, w) de la velocidad en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z), y de la perturbación θ del campo de temperaturas del fluido (ver Apéndice):

$$\begin{aligned}
 u_{mij}(r, \phi, z) &= \frac{1}{k_{mi}} \cos(m\phi + \phi_m) J'_m(k_{mi}r) DW_{mij}(z) \\
 v_{mij}(r, \phi, z) &= -\frac{m}{k_{mi}^2 r} \sin(m\phi + \phi_m) J_m(k_{mi}r) DW_{mij}(z) \\
 w_{mij}(r, \phi, z) &= \cos(m\phi + \phi_m) J_m(k_{mi}r) W_{mij}(z) \\
 \theta_{mij}(r, \phi, z) &= \cos(m\phi + \phi_m) J_m(k_{mi}r) \Theta_{mij}(z)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $D = d/dz$; J_m es la función de Bessel de primera especie de orden m ; $m = 0, 1, 2, \dots$ es el número de onda azimutal, y el número de onda radial es $i = 0, 1, 2, \dots$; k es el *número de onda*, cuyos valores permitidos quedan determinados por la ecuación $J'_m(k\Gamma/2) = 0$ (k toma valores discretos por tratarse de un problema con relación de aspecto finita). J' está dada por $J'_m(\dots) = \frac{1}{2}[J_{m-1}(\dots) - J_{m+1}(\dots)]$. Las ecuaciones que proporcionan las funciones W y Θ pueden encontrarse en el apéndice.

En las referencias [17, 18] llaman *modos* a las estructuras obtenidas como solución de las ecuaciones (2.11), y se denotan con el par de números (m, i) , esto es, con los índices azimutal y radial de la estructura. En la figura 2.2 están representados los *modos* del problema cilíndrico. Con una gama de colores del blanco al negro se simboliza el mapa de temperaturas de la superficie del fluido (en blanco las zonas de menor temperatura y en negro las de mayor).

En el capítulo de resultados, compararemos algunas de las estructuras estáticas que hemos observado [21] con las soluciones obtenidas en este análisis lineal, y en otros trabajos teóricos y experimentales. Posteriormente, daremos paso a la descripción de las dinámicas temporales presentes en el sistema.

²El número de Biot informa sobre la pendiente del perfil de temperaturas en la superficie del fluido, de forma que el límite $Bi \rightarrow \infty$ corresponde al caso en que sobre el fluido hay un medio perfectamente conductivo, mientras que $Bi \rightarrow 0$ es propio de la situación opuesta (material aislante perfecto). Puede encontrarse más información sobre este número en el trabajo de Pérez García y colaboradores [19].

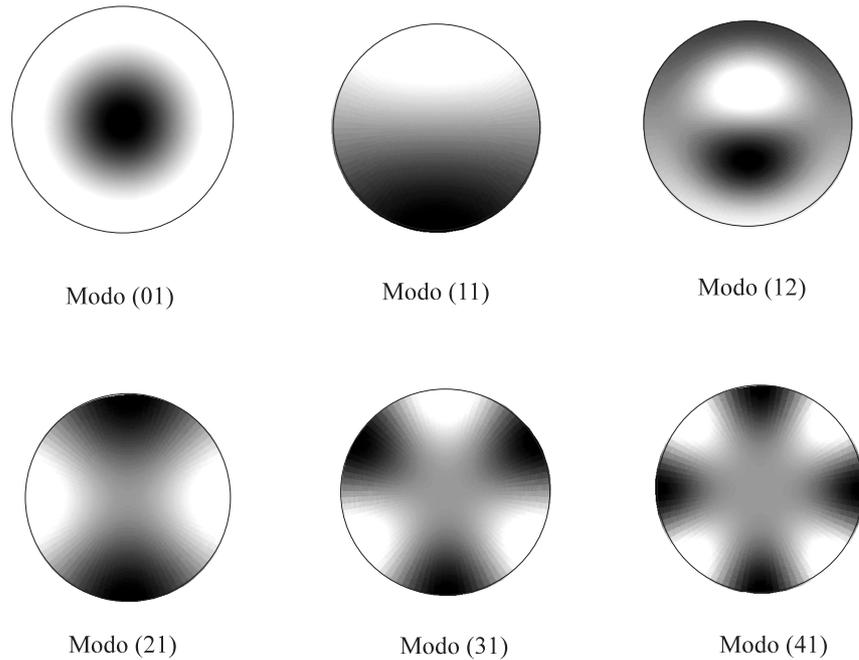


Figura 2.2: Representación del campo de temperaturas de distintos modos encontrados en el análisis lineal de [18], sacada de la tesis de B. Echebarría [20].

2.2. Láseres

2.2.1. Introducción general a los láseres

El término láser proviene de las siglas de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Se trata de un dispositivo electro-óptico basado en la naturaleza cuántica de la materia y de la luz, que permite (gracias a las propiedades de interacción luz-materia) la emisión y amplificación de luz altamente monocromática, coherente y con muy baja divergencia, mediante la emisión estimulada de radiación.

Un láser es básicamente un oscilador óptico. Consta esencialmente de un **medio activo** situado dentro de un **resonador óptico** apropiado, que es excitado por algún **dispositivo de bombeo**. La oscilación láser resultante, que puede ser descrita como una onda estacionaria del resonador óptico, proporciona un haz de salida intenso de radiación altamente monocromática.

En el láser, el **medio activo** es la materia que emite la radiación que posteriormente será amplificada. Como es bien sabido, los átomos (iones o moléculas) de una sustancia se pueden encontrar únicamente en ciertos niveles (o bandas) permitidos de energía. La distribución de niveles de energía es propia de la sustancia considerada; podría decirse incluso que dicha distribución es su “huella dactilar”.

Las transiciones entre distintos niveles energéticos se consiguen a través de tres tipos de mecanismos: absorción, emisión espontánea y emisión estimulada. Para conseguir efecto láser, el mecanismo predominante deberá ser la **emisión estimulada**. En un caso ideal, las transiciones se podrían producir para una única frecuencia bien definida. Sin embargo, lo habitual es encontrarse con láseres que emiten en toda una banda espectral, ensanchada en mayor o menor grado por la agitación térmica, el efecto Doppler, u otros factores. Este ensanchamiento se pone de manifiesto en las **curvas de ganancia** de los distintos láseres. En el caso en que se deba principalmente al efecto Doppler, la curva resultante será una función gaussiana.

Dados dos niveles energéticos de energías $E_1 < E_2$, la probabilidad de emisión estimulada del 2 al 1 será mayor que la de absorción si sus poblaciones satisfacen $N_1 < N_2$ (en realidad, en el caso de niveles degenerados habrá que añadir a esta desigualdad un factor de corrección: el cociente de las degeneraciones de los niveles). Se ve así que para obtener efecto láser, habrá que poblar con el máximo número posible de átomos un cierto nivel excitado, consiguiendo que su ocupación sea mayor que la de uno inferior con el que dará el efecto. Esta situación contraria a la ley de Boltzmann conocida como **inversión de población**, requiere aportar energía al medio activo. Ésta es la misión del **sistema de bombeo**.

Existen distintos tipos de sistemas de bombeo. Los más utilizados son: bombeo óptico, excitación por colisión con electrones, transferencia de excitación por colisiones inelásticas, y excitación química o fotoquímica. En el caso del láser de CO_2 (el que hemos utilizado), el bombeo se lleva a cabo fundamentalmente mediante dos mecanismos: excitación por colisiones electrónicas, y transferencia resonante de energía desde la molécula de nitrógeno, en mezclas $\text{CO}_2 - \text{N}_2$ excitadas por descarga eléctrica. Los niveles de energía puestos en juego son los de rotación-vibración de la molécula de CO_2 .

Cavidad óptica. Modos del láser

Una vez que el medio activo ha sido excitado hasta conseguir una inversión de población y ha comenzado la emisión estimulada, el **resonador óptico** (o **cavidad óptica**) proporciona la *realimentación* necesaria para obtener la amplificación del haz láser.

La cavidad óptica es un espacio limitado normalmente por dos espejos esféricos enfrentados (o planos como caso particular). También puede incluir lentes y tramos de fibra óptica, o presentar otro tipo de geometrías (como por ejemplo en los láseres de anillo, con resonadores de tres o más espejos que hacen que el haz de luz recorra trayectorias poligonales en un único sentido).

Su misión es conseguir que el haz de luz monocromático y coherente que constituye la emisión láser rebote una y otra vez en los espejos, amplificándose gracias a la emisión estimulada en cada paso por el medio activo. Las cavidades que cumplen esta misión de “atrapar indefinidamente” la radiación, esto es, las que son *estables*, reciben el nombre de **resonadores de Fabry-Perot**. Las que no lo consiguen se dicen *inestables*. Supongamos el caso más sencillo: dos espejos planos enfrentados. Está claro que si los espejos no son

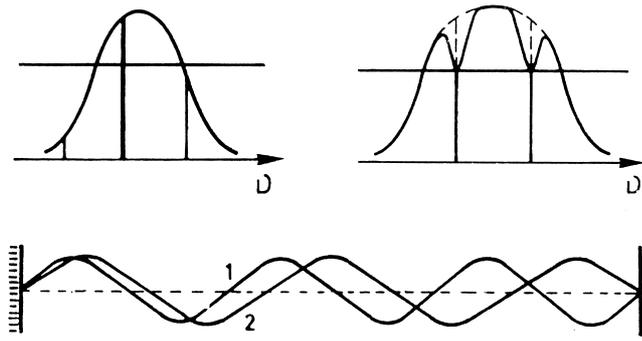


Figura 2.3: Representación de la curva de ganancia y las pérdidas en un resonador sacada de la referencia [22]. En el caso de la primera figura, sólo podrá oscilar un modo. En la segunda, oscilarán los dos modos para los que la ganancia supera a las pérdidas, representados en el dibujo de debajo.

perfectamente paralelos, o si la dirección de propagación de la luz no es exactamente perpendicular a ellos, la onda se saldrá pronto de la cavidad. Con espejos esféricos, es más fácil mantenerla dentro del resonador.

Los resonadores estables son los más usados. En ellos, se pueden estimar las frecuencias de resonancia utilizando las expresiones propias del interferómetro de Fabry-Perot. Para ondas que se propagan paralelamente al eje perpendicular de los espejos, las longitudes de onda resonantes de la cavidad están dadas por $L = n\frac{\lambda_n}{2}$, donde L = longitud de la cavidad, n = un número entero positivo, λ_n = longitud de onda. Por tanto, las frecuencias ν de resonancia cumplirán la condición: $\nu_n = n\frac{c}{2L}$. La distancia entre dos frecuencias de resonancia consecutivas, que es $\Delta\nu = c/2L$, se conoce como **rango espectral libre**. En cuanto a las ondas estacionarias que viajan en la dirección axial, se llaman **modos axiales o longitudinales**.

La oscilación láser puede darse para una o más de las frecuencias de resonancia. Ello dependerá en cada caso de la anchura σ de la curva de ganancia y del rango espectral libre $\Delta\nu$: si $\sigma > \Delta\nu$, el láser podrá oscilar en varios modos longitudinales simultáneamente, tal y como se ilustra en la figura 2.3. En ella, se representan con una recta paralela al eje de abscisas las pérdidas que se producen durante la oscilación. Las más importantes son las debidas a que la reflectividad de los espejos es menor del 100% (sobre todo en el espejo de salida, que debe tener una reflectividad ligeramente menor que el otro para permitir la salida de parte del haz láser). Se añaden a ellas las de dispersión en el medio o en imperfecciones de la superficie de los espejos, la pequeña absorción en los espejos, etc. Para que el láser oscile, las ganancias deberán igualar o superar estas pérdidas. Se define así un umbral de oscilación, ya que sólo los modos que satisfagan esta condición podrán oscilar.

No menos importantes que los modos longitudinales son los modos oblicuos, también conocidos como **modos transversales** o fuera de eje. Provenientes de ondas que no se

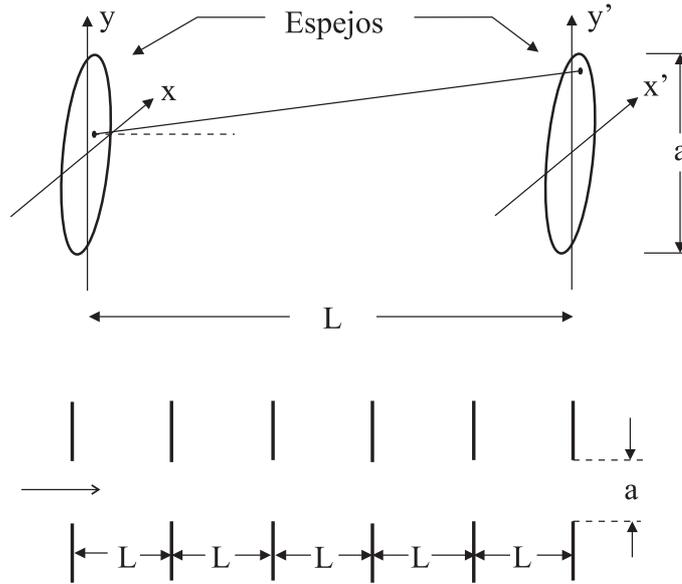


Figura 2.4: Efecto difractivo de los espejos: se comportan como aberturas por las que la emisión láser debe entrar en cada paso por la cavidad.

propagan en dirección axial, cumplen en un interferómetro de Fabry-Perot la condición $L \cos \theta = n\lambda_n$, siendo θ el ángulo que forma su dirección de propagación respecto al eje.

Es importante señalar que en un láser de cavidad abierta (formada únicamente por las dos superficies reflectantes), no se puede encerrar completamente el campo electromagnético. Centrándonos en los láseres gaseosos con simetría cilíndrica, su cavidad óptica suele caracterizarse por ser muy larga en comparación con la longitud de onda de la luz emitida y con el diámetro a de los espejos ($L \gg \lambda, a$). El pequeño tamaño de los espejos da lugar a fuertes fenómenos difractivos cuando las ondas confinadas se reflejan en ellos una y otra vez. Este proceso equivale a atravesar sucesivamente una serie de aberturas circulares equidistantes con el mismo diámetro (ver figura 2.4): se van perdiendo componentes oblicuas de la emisión, al tiempo que también se debilita la luz lateral del haz central.

Las pérdidas por difracción en resonadores de Fabry-Perot (con espejos tanto planos como curvados) han sido objeto de numerosos estudios. Entre ellos, haremos referencia al trabajo de Fox y Li [23], en que se resuelve numéricamente la ecuación integral del resonador de Fabry-Perot, y al de Boyd y Gordon [24], que realizan un estudio analítico del problema.

Tras muchas reflexiones, se alcanza en el láser un equilibrio entre ganancias y pérdidas, de forma que el perfil de intensidad alcanza una situación estacionaria. Se llama **modos del láser** a estas ondas resultantes que mantienen estacionaria su forma. Para poder describir los modos en cavidades de este tipo, se necesitan tres números. Cuando los espejos son circulares, estos números se denominan n , l y p : n es el número de medias

longitudes de onda entre los dos espejos (un número grande, que ya ha sido introducido anteriormente); l y p indican respectivamente la mitad del número de ceros angulares (índice azimutal), y el número de ceros radiales (índice radial). Para espejos esféricos, se espera que los modos de mayor ganancia sean los de $p = l = 0$ (modos axiales).

La configuración transversal de los modos no axiales, está controlada por la forma y tamaño de los espejos. En el caso de un resonador de Fabry-Perot con espejos planos o esféricos, los modos obtenidos se pueden aproximar mediante el producto de una función gaussiana y de polinomios de Hermite, del tipo de:

$U_{pq}(x, y) = H_p\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right)H_q\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}$, donde los enteros p y q denotan el orden de los polinomios de Hermite, que pueden encontrarse en cualquier libro de tablas matemáticas.

En nuestro experimento en concreto, se estudian los modos del láser obtenidos cuando la parte reflectante de uno de los espejos del resonador es un anillo. En este caso, los modos resultantes mantienen la simetría anular del sistema, con lo que resulta más apropiado compararlos con las funciones de Gauss-Laguerre, muy adecuadas para este tipo de simetría. Veremos estas funciones en el capítulo dedicado a la descripción del modelo numérico.

Realizando un cálculo sencillo, se puede estimar el número de modos transversales presentes en el láser por cada modo longitudinal. Si la distancia L entre los espejos es mucho mayor que su diámetro a , el ángulo θ con que se ve un espejo desde el otro (Fig. 2.4), es $\theta \approx a/L$. Si se considera que los efectos difractivos dan una separación entre los distintos modos $\theta_{difr} = \lambda/a$, se obtiene que cabrán $N = \frac{\theta}{\theta_{difr}} = \frac{a^2}{\lambda L}$ modos transversales por cada modo longitudinal. Esta cantidad N es la que se conoce como **número de Fresnel**. Está claro que si N es menor que 1, no se pueden obtener modos transversales.

A partir de ahora, tomaremos como parámetros geométricos de la cavidad láser el rango espectral libre ($\Delta\nu = \frac{c}{2L}$) y el número de Fresnel ($N = \frac{a^2}{\lambda L}$). Una vez seleccionados una cierta cavidad óptica y un determinado medio activo, puede estimarse el número de modos presente en el láser utilizando los valores de $\Delta\nu$ y N de la cavidad, y la anchura σ de la curva de ganancia del medio activo. Por una parte, se sabe que para obtener modos transversales se necesita $N > 1$. Por otra parte, si la anchura de la curva de ganancia es menor que el rango espectral libre ($\sigma < \Delta\nu$), no se puede observar más de un modo longitudinal. Con todas las combinaciones posibles de N mayor o menor que uno, y de σ mayor o menor que $\Delta\nu$, se encuentran todas las variantes de **láser monomodo** (con un único modo) o **multimodo** (con más de uno).

En nuestro caso, $\Delta\nu \approx 170$ MHz y $N \approx 16$ (veremos cómo ha sido estimado este valor en el capítulo 3, junto con la descripción del láser). Se ve por tanto que se trata de un láser multimodo, en el que el número de modos transversales por cada modo longitudinal es del orden de 16. Considerando este valor, se puede decir que el láser trabaja en gran relación de aspecto.

Debe resaltarse la analogía entre la definición de N y la de Γ vista en la sección

de fluidos de este capítulo. Ambas dan una definición de la relación de aspecto: dan un cociente entre las dimensiones transversal y longitudinal del sistema considerado. De hecho, se verifica en ambos casos (fluidos y láseres) que si N y Γ son pequeños, es la geometría del sistema la que determina la selección de los patrones. En cambio, esto no ocurre si N y Γ son grandes. Se ve que el efecto de estos dos parámetros es completamente análogo.

Centrémonos en el estudio de un láser de CO_2 con simetría anular. En la descripción teórica de las variables físicas del sistema (campo eléctrico E , polarización P , e inversión de población N), suelen utilizarse las **ecuaciones de Maxwell-Bloch** (ver Apéndice):

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} + c\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{ic^2}{2w}\nabla_{\perp}^2 E &= -kE + gP \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\gamma_{\perp}P + gEN \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel}(N - N_0) - \frac{g}{2}(E^*P + P^*E),\end{aligned}\tag{2.12}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, w la frecuencia fundamental de las variables físicas, k la tasa de decaimiento de E , y $g = \frac{\mu wc^2}{2i}$ el coeficiente de acoplamiento; γ_{\perp} y γ_{\parallel} son las tasas de decaimiento de P y N respectivamente; N_0 es la inversión de población dada por el bombeo; $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; y $*$ denota el complejo conjugado de la variable a la que afecta.

La primera ecuación es la de Maxwell, que proviene de las ecuaciones de Maxwell del campo eléctrico. Las restantes son dos ecuaciones semiclásicas, que se obtienen con un promedio estadístico de las ecuaciones cuánticas que describen el medio activo y su interacción con el campo eléctrico. En el apéndice se incluye más información sobre estas ecuaciones, y sobre su aplicación a nuestro caso concreto. Utilizaremos los resultados que ahí se obtienen en el capítulo 6, donde se desarrolla un modelo numérico sencillo que reproduce cualitativamente los resultados experimentales.

2.3. Trabajos previos

A modo de introducción de nuestro estudio, revisaremos algunos de los trabajos realizados sobre formación de patrones en sistemas confinados. Comenzaremos por la convección, siguiendo en gran medida un orden cronológico, para posteriormente revisar el caso de los láseres de CO_2 .

En convección, estamos interesados en los trabajos sobre CBM en simetría cilíndrica y pequeña relación de aspecto. Nos centraremos por una parte en el tipo de estructuras que se desestabilizan y en el orden en que aparecen (al variar la relación de aspecto y/o la supercriticalidad), y por otra parte, en los aspectos dinámicos asociados a ellas.

Los primeros estudios analíticos realizados sobre CBM en sistemas finitos, se deben

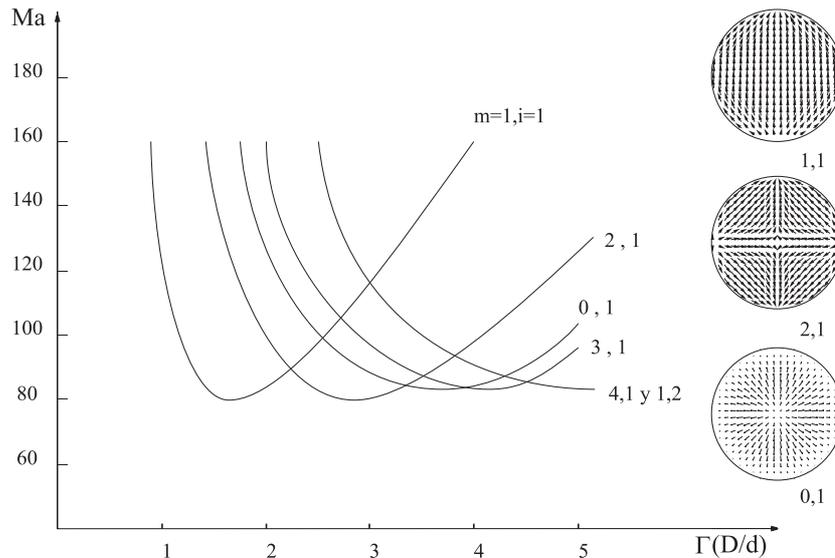


Figura 2.5: Curva de estabilidad marginal del análisis lineal de [17]. Se representan las líneas de flujo en la superficie de los tres primeros modos.

a Rosenblat y colaboradores [17, 25]. Nos centraremos en la primera de las referencias, un estudio analítico lineal sobre la convección de un fluido contenido en un recipiente cilíndrico de paredes adiabáticas, impenetrables y deslizantes. Partiendo de la hipótesis de que las deformaciones en la superficie del fluido son despreciables (razonable si la dependencia de la tensión superficial con la temperatura es pequeña), realizaron un análisis lineal del caso en que el calentamiento es uniforme y desde abajo. Entre otros resultados, obtuvieron una expresión para los modos que se desestabilizan cerca del umbral, y la curva de estabilidad marginal que se muestra en la figura 2.5. Para las relaciones de aspecto en que, en la aproximación lineal, la desestabilización de dos estados convectivos distintos es igualmente probable (lo que se conoce como punto de codimensión dos), mediante un análisis levemente no lineal se predijo convección dependiente del tiempo, consistente en secuencias de transiciones de un estado al otro cuando el número de Marangoni aumenta.

Koschmieder y Prahl [26] publicaron un estudio experimental de convección debida principalmente a la tensión superficial. En él, se centraron en la determinación de los umbrales convectivos y de la geometría de las estructuras que surgen en condiciones similares a las de los trabajos de Rosenblat y colaboradores. Realizaron sus experiencias en recipientes pequeños con paredes de material aislante: tres de sección circular de distintos diámetros (1.12, 1.75 y 2.38 cm) y uno de sección cuadrada (de 1.05 cm de lado), diseñados dentro del mismo montaje experimental. Para poder controlar la diferencia de temperatura de la capa de fluido, cerraron la parte superior del dispositivo experimental con una lámina de material transparente (que mantuvieron a temperatura fija mediante circulación de agua), dejando sobre el fluido una capa de aire de unos 0.5 mm de espesor.

Observaron justo en el umbral y ligeramente sobre él, una estructura consistente en un único rollo circular. Al aumentar la relación de aspecto, obtuvieron estructuras en

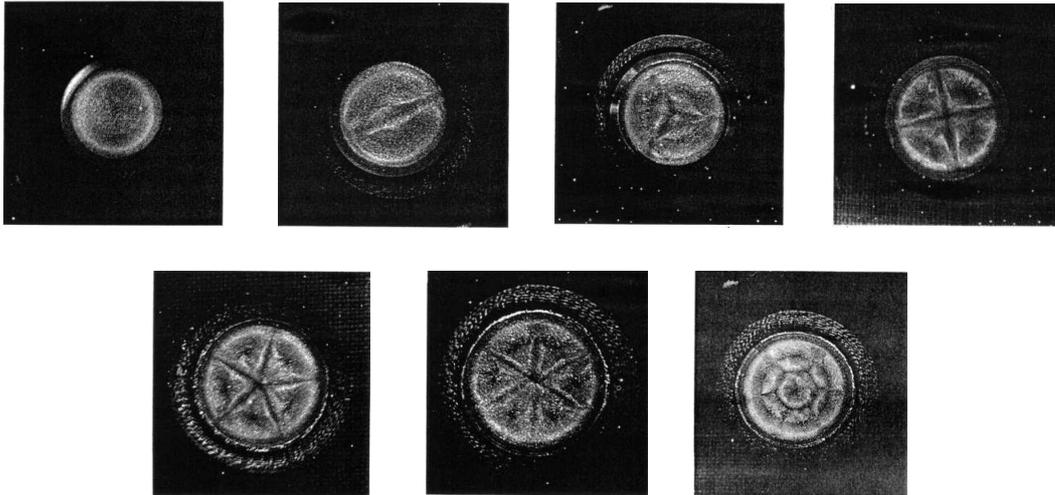


Figura 2.6: Estructuras obtenidas experimentalmente por Koschmieder y Prahl [26].

las que líneas nodales azimutales dividen la sección circular en un número determinado de sectores, que fue aumentando progresivamente desde dos hasta seis. A partir de ese valor de Γ , el sistema pudo soportar estructuras con una componente radial. La primera estructura de este tipo que observaron (para una relación de aspecto de 9.33) fue un hexágono central rodeado por seis celdas regulares. Estas estructuras, que se muestran en la figura 2.6, concuerdan cualitativamente con algunos de los modos obtenidos en [17]; pero ni los reproducen todos (como es el caso del modo (1,1), el primero en la curva de estabilidad marginal de la figura 2.5), ni aparecen en el mismo orden.

El trabajo de Cerisier y colaboradores [27] presentó un método experimental para inducir estructuras convectivas. Aplicaron el método para generar una estructura hexagonal en CBM, en un recipiente cilíndrico de pequeña relación de aspecto, y comprobaron que la estructura hexagonal impuesta relaja hacia un tamaño seleccionado por el propio sistema.

Ondarçuhu y colaboradores [28] estudiaron experimentalmente la CBM en condiciones similares a las de nuestras experiencias (recipiente abierto por la parte superior y de tamaño mayor que los de Ref. [26]). Mostraron estructuras convectivas presentes en pequeña relación de aspecto para distintas potencias de calentamiento (Fig. 2.7), y comprobaron que para diferentes relaciones de aspecto y calentamientos supercríticos, aparecen estructuras convectivas no axisimétricas. Completaron este estudio con un análisis numérico en el que se utiliza la ecuación de Swift–Hohenberg generalizada (en esta ecuación es relevante la presencia de un término cuadrático que rompe la simetría en el eje vertical).

El análisis teórico de Echebarría y colaboradores [18] se encuadra en la misma línea de estudio que el de Rosenblat, Davis y Homsy [17]. Añadieron a este estudio analítico el efecto de la fase, que queda libre. Su trabajo se centró principalmente en la realización de un análisis débilmente no lineal en las proximidades del punto de codimensión dos

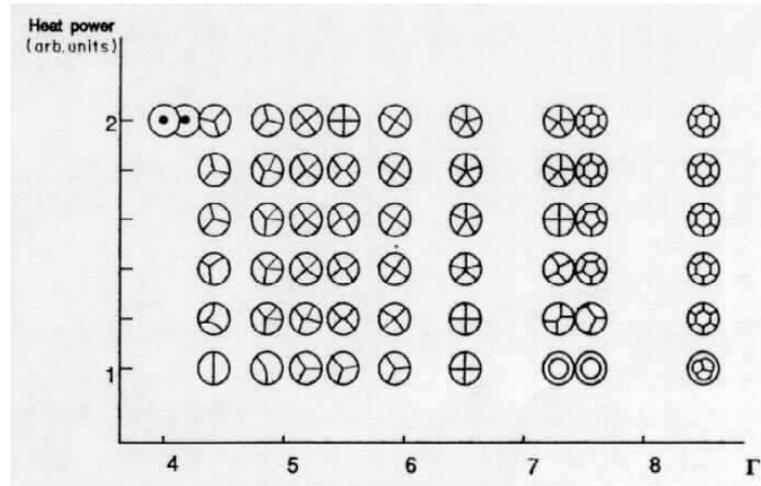


Figura 2.7: Estructuras estacionarias observadas en el experimento de Ondarçuhu y colaboradores [28], para distintas relaciones de aspecto y calentamientos.

generado por los modos $(1,1)$ y $(2,1)$. Obtuvieron que, en las condiciones experimentales precisas, deberían observarse en una cierta región del espacio de parámetros, ondas rotatorias y una órbita heteroclina estable que conecte los dos modos asociados al punto de codimensión dos estudiado. El trabajo experimental de Johnson y Narayanan [29] proporcionó evidencia experimental de una conexión heteroclina de este tipo. Se estableció entre dos estructuras que responden a la descripción de los modos $(0,1)$ y $(2,1)$ del análisis lineal de las referencias [17, 18]. En CBM, pero en recipientes de planta cuadrada, se han realizado estudios sobre otro tipo de dinámica, que se ha explicado como una bifurcación de Takens–Bogdanov [30]. En este contexto, han llegado a observarse comportamientos temporales caóticos.

Recientemente, se han realizado trabajos numéricos que estudian las inestabilidades que aparecen en CBM para recipientes cilíndricos de pequeña relación de aspecto [31, 32] (pueden encontrarse en ellos referencias a otros estudios numéricos publicados sobre este tema). La ventaja de estos estudios frente a trabajos analíticos reside en que permiten condiciones de contorno más realistas, inafrentables analíticamente. Así, con estos métodos se puede estudiar el caso de paredes no deslizantes, tanto conductoras como aislantes.

Tanto en algunos de los trabajos experimentales comentados [26, 29], como en otros realizados en gran relación de aspecto [1, 33, 34, 35, 36] y en los numéricos, el recipiente está cerrado por arriba, limitando de forma drástica el espesor de la capa de gas que se encuentra sobre el fluido. Esta variación respecto al trabajo de Bénard, trata de minimizar la influencia del aire sobre el experimento y aumentar el control sobre las condiciones de contorno térmicas. Para ello introducen un sistema de refrigeración que controla la temperatura de la tapa. Esta variante surgió al considerar la CBM como un problema de dos fluidos: el líquido que se estudia, y la capa de gas que está sobre él³. En estos trabajos

³Su estudio puede plantearse aplicando las ecuaciones básicas a ambos fluidos. Este planteamiento

se supone que la capa de gas sólo conduce el calor (se considera que el gas permanece en reposo). El incumplimiento de esta condición podría explicar alguna de las discrepancias observadas entre los resultados experimentales y numéricos.

En gran relación de tamaños, sería muy largo enumerar todos los trabajos teóricos dedicados al estudio de estabilidad de frentes, formación de fronteras de grano, defectos (como el conocido penta-hepta), inestabilidades de distintos tipos, competición entre distintos tipos de patrones (entre redes hexagonales y cuadradas, por ejemplo). En la referencia [37] puede encontrarse una revisión bastante completa y actualizada (hasta el 97). Esta revisión no incluye trabajos dedicados al estudio de defectos topológicos o a la medida estadística del desorden (ver Refs. [38] y los trabajos citados ahí), o el experimental y numérico de VanHook y colaboradores [39], sobre inestabilidades de gran longitud de onda en gran relación de aspecto.

Sin embargo, es difícil encontrar en CBM estudios tanto teóricos como experimentales, que traten sobre dinámica de estructuras convectivas para los valores de Γ en que hemos observado la formación de estructuras consistentes en un único polígono. Sí se pueden encontrar estudios en otro tipo de sistemas experimentales, por ejemplo en sistemas ópticos. Así, los trabajos de Ramazza y colaboradores [40] y de Pampaloni y colaboradores [41] muestran un rico comportamiento dinámico en un rango de relaciones de aspecto intermedias.

Para relaciones de aspecto mayores, nos centraremos en el sistema láser. Se comentan a continuación algunos trabajos realizados con láseres de CO_2 de simetría cilíndrica o anular.

Al inicio de esta memoria, se ha introducido el trabajo de Tredicce y colaboradores [8], que impulsó los estudios sobre dinámica espacio-temporal en láseres de CO_2 . También se ha comentado el interés despertado por la teoría de grupos como herramienta de estudio de la formación y dinámica de estructuras. Tras el trabajo de Solari y Gilmore [13], Green y colaboradores [42] mostraron evidencia experimental de complejidad espacio-temporal en un láser de CO_2 con simetría cilíndrica, y comprobaron que una teoría de bifurcaciones cualitativa, puede explicar los fenómenos de ruptura espontánea de simetría y la aparición de ondas viajeras que conducen a dicha complejidad. Dos años más tarde, D'Angelo y colaboradores [43] demostraron teórica y experimentalmente que una imperfección infinitesimal en la simetría de un sistema, tiene una influencia macroscópica en la estabilidad de los patrones espacio-temporales que surgen en un proceso de ruptura de simetría. Se justifica de este modo que experimentalmente sean más estables los patrones tipo onda estacionaria que los continuos, cuando según los estudios en sistemas con una simetría perfecta, aquéllos deberían ser inestables.

Siguiendo en la misma línea (estudio de dinámica en un láser anular con simetría $O(2)$)

aumenta notablemente el número de parámetros del sistema: se gana precisión a costa de perder sencillez en el planteamiento. La referencia [19] analiza los aspectos térmicos de este problema y hasta qué punto puede reducirse el estudio al de un único fluido.

imperfecta), López Ruiz y colaboradores [44, 45] estudiaron teóricamente la interacción no lineal entre modos transversales que bifurcan desde la solución trivial. Encontraron soluciones diferentes de las obtenidas en sistemas perfectamente simétricos [44], lo que corrobora los resultados de Ref. [43]. En la referencia [45], muestran la posibilidad de conseguir experimentalmente una bifurcación de Takens–Bogdanov para la interacción no lineal de dos modos transversales de índices azimutales ± 1 . Labate y colaboradores [46] obtuvieron experimentalmente este tipo de dinámica tres años después. Observaron transiciones en el patrón de intensidad entre superposiciones estables y oscilantes de ondas viajeras y estacionarias, dando lo que se conoce como bifurcación de Takens–Bogdanov. En su trabajo, se ofrece un modelo numérico que reproduce los resultados experimentales, incluidas unas oscilaciones aperiódicas que asocian a las emisiones espontáneas presentes en el medio activo.

Huyet y colaboradores [47] estudiaron la dinámica en un láser anular con una única variable transversal relevante, la azimutal. Para aislar dicha variable, situaron un diafragma y un filtro espacial dentro de la cavidad óptica. Observaron patrones anulares con un número siempre par de lóbulos, $2m$, en los que m varió entre 1 y 25, y transiciones entre patrones con valores de m consecutivos. Comprobaron que el radio R de estas estructuras cumple la relación $R^2 \propto m$, tal y como ocurre en los modos de Gauss–Laguerre. Estos son los modos que hemos elegido para reproducir numéricamente los resultados experimentales. Coinciden con otros trabajos [42, 43] en la secuencia de bifurcaciones observada al aumentar la ganancia del medio activo (ondas estacionarias, y superposiciones de ondas estacionarias y viajeras).

Más recientemente, Wang y colaboradores [48] presentaron un método que utiliza perturbaciones espaciales para la estabilización de estados inestables. Mostraron ejemplos numéricos de su utilización en la estabilización y selección de patrones de rollos, cuadrados y hexagonales en un sistema óptico. Ciofini y colaboradores [49] lograron la selección y estabilización de patrones inestables utilizando este método, concretamente introduciendo en la cavidad alambres metálicos de diámetro comparable a la longitud de onda del láser.

Otros trabajos se han dedicado al estudio de la formación de estructuras transversales en láseres de CO_2 de simetría cilíndrica con gran número de Fresnel [50, 51, 52].

Presentaremos en el capítulo siguiente patrones de características similares a los descritos en algunos de estos trabajos. Nuestra aportación es el método en que fueron obtenidos (no con filtros espaciales y diafragmas regulables, sino mediante un espejo anular) y el estudio de dinámicas temporales irregulares presentes durante la coexistencia de varios de estos patrones. Este tipo de comportamiento, que llega a hacerse caótico, es un resultado novedoso que puede encontrarse en las referencias [53, 54].

Capítulo 3

Sistema experimental y métodos de medida

En este capítulo veremos los componentes esenciales de cada sistema experimental, y los métodos que hemos utilizado, tanto en la detección y caracterización de estructuras, como en el estudio de los comportamientos temporales presentes. Se estructura en dos partes: la primera, dedicada al sistema convectivo de Bénard-Marangoni; la segunda, al láser de CO₂.

3.1. Sistema convectivo

Comenzamos esta sección con la descripción del fluido y del recipiente que lo contiene. A continuación, se concretan los parámetros de control que se van a utilizar en la experiencia, precisando algunos detalles sobre su obtención. En la descripción del montaje experimental completo, se analizan los distintos métodos ópticos utilizados en el estudio de la convección, así como otras técnicas experimentales.

En todas las experiencias se ha utilizado aceite de silicona, de 350 cSt y de 100 cSt. Sus características físicas aparecen en la tabla 3.1. La elección de este tipo de aceite se debe a las siguientes razones:

- su transparencia permite el uso de métodos ópticos en la observación del estado convectivo;
- sus propiedades físico-químicas son muy estables, y se evapora poco;
- mantiene prácticamente constantes sus propiedades físicas en el rango de calentamientos que utilizamos, lo que facilita su comparación con los estudios teóricos disponibles en que se considera válida la aproximación de Boussinesq.

Viscosidad cinemática (ν)	100 cSt	350 cSt
Densidad (ρ)	$968 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$968 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Tensión superficial (σ)	$20,9 \text{ mN/m}$	$21,1 \text{ mN/m}$
Conductividad térmica (χ)	$0,1557 \text{ W/m.K}$	$0,16 \text{ W/m.K}$
Coefficiente de dilatación (α)	$9,25 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$	$9,45 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
Difusividad térmica (κ)	$1,06719 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$	$1,13 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
Coefficiente de viscosidad / temperatura ($d\nu/dT$)	$0,59 \text{ cSt/K}$	$0,62 \text{ cSt/K}$
Coefficiente de tensión superficial / temperatura ($d\sigma/dT$)	$6,06 \cdot 10^{-5} \text{ N/m.K}$	$6,06 \cdot 10^{-5} \text{ N/m.K}$
Número de Prandtl (Pr)	937	3097

Cuadro 3.1: Propiedades físicas de los fluidos utilizados.

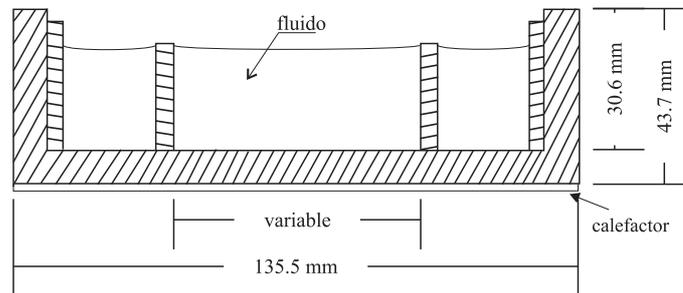


Figura 3.1: Esquema del corte en un plano diametral del recipiente A.

Se han utilizado dos recipientes convectivos. En ambos recipientes, la parte superior está abierta a la atmósfera. De este modo, se permite la observación en la dirección perpendicular al fondo, pero no la observación lateral del sistema.

Recipiente A

Es un recipiente de planta circular maquinado en aluminio, cuyo corte longitudinal aparece representado en la figura 3.1. En su interior, se colocan anillos cilíndricos de metacrilato de distintos diámetros y alturas para variar la relación de aspecto del sistema. Elegimos este material para los anillos por tener una conductividad térmica muy similar a la del fluido utilizado ($0,17 \text{ W/m.K}$ frente a los $0,16$ de la silicona). Al ocupar con aceite de silicona todo el recipiente (incluyendo el espacio libre entre los anillos de metacrilato y las paredes de aluminio) y calentar uniformemente todo el fondo, se consiguen condiciones térmicas muy similares a ambos lados de la pared. De este modo, se minimiza el intercambio de calor a través de la misma.

El calentamiento del fluido se consigue con una resistencia eléctrica pegada al fondo del recipiente, que está conectada a una fuente de tensión continua regulada. La resistencia, que es circular y con el diámetro máximo del sistema, calienta el fluido a través del fondo del recipiente, un bloque de aluminio de algo más de un centímetro de espesor, lo que asegura un calentamiento uniforme del fluido.

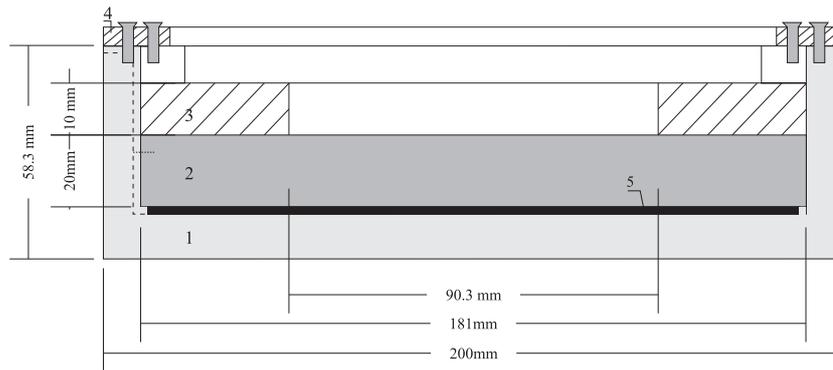


Figura 3.2: Esquema del recipiente B. Se ha utilizado la siguiente numeración: 1-contenedor de delrin, 2-disco de aluminio, 3-pared lateral de metacrilato, 4-arandela de metacrilato, 5-resistencia eléctrica.

Recipiente B

La figura 3.2 presenta un esquema con las distintas partes que constituyen el recipiente B, que es de planta circular, y está maquinado en DelrinTM, un material de baja conductividad térmica (0.23 W/m.K).

El confinamiento lateral del fluido se consigue con anillos de metacrilato (conductividad térmica 0.17 W/m.K) de distintos diámetros y alturas. Una arandela de este mismo material, mantiene unidas las distintas partes del recipiente. En este caso, no hay fluido al otro lado de las paredes de metacrilato, sino únicamente las paredes de Delrin. De este modo, se trata de evitar las pérdidas de calor hacia el exterior por la parte lateral del sistema.

Una ranura practicada en la pared lateral del recipiente hace posible el suministro eléctrico para el calentamiento, así como la introducción de un termopar para medir la temperatura en el fondo del recipiente. El calentamiento del fluido se produce a través de un bloque cilíndrico de aluminio de 20 mm de espesor, a cuyo fondo está adherida una resistencia eléctrica de igual diámetro. Para minimizar en lo posible el flujo de calor hacia el fondo del recipiente, hemos situado una lámina de material aislante separándolo de la resistencia.

Parámetros de control del experimento. Medidas de temperatura

Uno de los parámetros de control en nuestras experiencias es la diferencia de temperatura entre el fondo y la superficie del fluido, ΔT . La temperatura del fondo, que es un buen conductor, es aproximadamente homogénea. Por el contrario, la temperatura en la superficie varía punto a punto. Podría utilizarse en la definición la temperatura media de la superficie, o bien la temperatura que tendría supuesto un estado conductivo. Por razones obvias de simplicidad, hemos optado por tomar la temperatura ambiente del laboratorio como referencia con la que comparar la del fondo. En adelante, $\Delta T = T_{fondo} - T_{ambiente}$. Para medirlas, se han dejado fijos en el sistema dos termopares. El primero está alojado en

el interior del bloque de aluminio que constituye el fondo del recipiente (una pasta favorece el contacto térmico entre el termopar y el aluminio). El segundo está en contacto con una masa metálica de gran tamaño, para conseguir una mayor estabilidad en la lectura de la temperatura ambiente del laboratorio. En la realización de estas medidas, y en general en todas las medidas locales de temperatura, hemos utilizado termopares tipo T de 0.35 mm de diámetro y un tiempo de respuesta menor que 0.06 segundos. Proporcionan medidas cuasipuntuales de la temperatura, con una precisión de $\pm 0,3^\circ\text{C}$. En algunos casos, se ha medido la temperatura media de la superficie del fluido utilizando sensores de infrarrojo, que no precisan un contacto directo con el fluido. Al medir, promedian la temperatura en una zona cuyo diámetro es del orden de dos veces la altura a que se encuentran sobre el fluido.

Todos los sensores están conectados a un sistema de adquisición de datos de $0,1^\circ\text{C}$ de resolución y un tiempo mínimo entre lecturas de $2,00 \pm 0,01\text{s}$. Utilizando este sistema, la precisión resultante de la medida es de $\pm 0,5^\circ\text{C}$. La exactitud de los resultados no es tan importante, ya que estamos interesados en diferencias de temperatura.

Los termopares presentan el inconveniente de que precisan entrar en contacto con el fluido, con lo que no sólo se introduce un error en la medida, sino que la propia estructura convectiva puede resultar alterada. Este problema se acentúa no sólo en las medidas efectuadas en la superficie libre (asociado al fuerte efecto del menisco formado en el punto de contacto con el fluido), sino también en series de medidas continuadas, como las realizadas para obtener el perfil de temperaturas en un punto del patrón a distintas profundidades. En este tipo de medidas, nos hemos servido de un termopar tipo T insertado en una aguja hipodérmica de 0.30 mm de diámetro. Con un sensor de tan pequeño diámetro se minimiza en lo posible la influencia del sistema de medida en las estructuras convectivas estudiadas. Sin embargo, debe utilizarse con precaución, ya que tanto el termopar no recubierto como la aguja son metálicos (buenos disipadores de calor), con lo que medidas continuadas alteran la estructura convectiva. Una forma de reducir su efecto consiste en realizar las medidas por etapas, sacando la aguja en cada medida o tanda de medidas para dejar que el sistema relaje y recobre su estado inicial.

Además de ΔT (y en algunos casos ϵ), hemos utilizado como parámetro de control la relación de aspecto Γ . El cálculo de Γ no plantea dificultades técnicas, ya que sólo requiere las medidas del diámetro del recipiente y del espesor de la capa de fluido, que se han realizado con una precisión de centésima de milímetro. Esta precisión es más que suficiente para las longitudes y valores de Γ con que hemos trabajado, ya que variaciones de $\pm 0,1$ en Γ no dan cambios observables en los resultados.

Para completar la información de las condiciones experimentales, se aporta el valor de Ra/Ma . Este cociente, que depende principalmente de las propiedades físicas del fluido y de su espesor, nos dará una idea de la contribución relativa del empuje y de la tensión superficial al movimiento convectivo:

$$Ra/Ma = \frac{\alpha g \rho}{|\sigma'|} d^2. \quad (3.1)$$

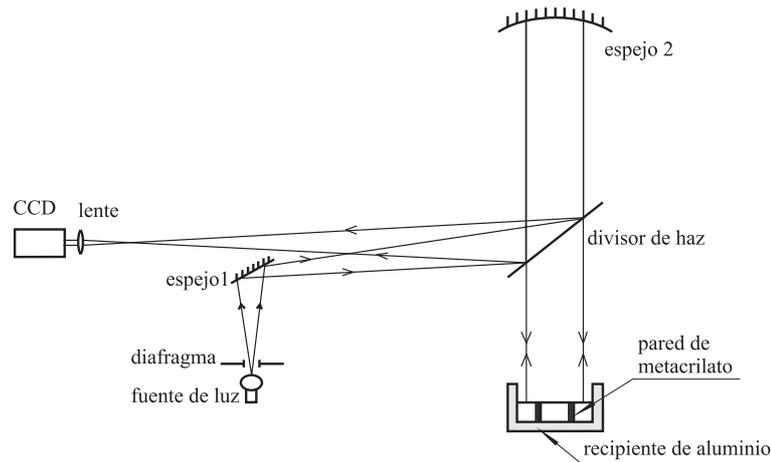


Figura 3.3: Esquema del sistema experimental.

Con él se da indirectamente el valor de d en cada caso.

3.1.1. Montaje experimental

El experimento se ha diseñado para extraer la máxima información posible del sistema, permitiendo:

- la observación directa de las estructuras convectivas formadas;
- la detección de líneas de flujo en la superficie y en todo el volumen;
- la realización de medidas de temperatura en distintas zonas del fluido;
- el seguimiento de la dinámica temporal del sistema.

Como hemos visto, los recipientes están abiertos por la parte superior. Para conseguir una visualización directa de los patrones a tiempo real, se les acopla un sistema de observación que fue diseñado por H. Mancini y colaboradores (ver Ref. [55]). En la figura 3.3 aparece un esquema de este sistema.

Con la finalidad de conseguir una iluminación uniforme del fluido, se coloca una fuente de luz cuasipuntual en el foco del espejo esférico (espejo 2). El espejo 1 dirige la luz de la fuente hacia el divisor de haz. Al llegar allí, parte de la luz se refleja y llega al espejo esférico 2. La parte de luz que llega al fluido tras atravesar del divisor de haz, y que después es enfocada en la cámara por el espejo 2, es la que proporciona información del estado convectivo del fluido.

El método óptico que hemos utilizado para observar las estructuras formadas se denomina **ombroscopía**. Se fundamenta en la desviación que experimenta un haz de luz al

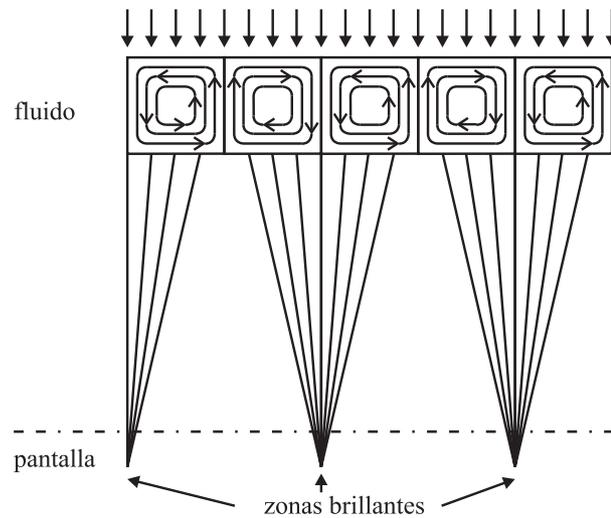


Figura 3.4: Efecto que experimenta un haz de luz al atravesar un fluido de densidad localmente inhomogénea (en este caso con rollos convectivos paralelos).

atravesar un medio de densidad inhomogénea, o bien al reflejarse en su superficie cuando ésta no es perfectamente plana. Cuando las variaciones de densidad son debidas a causas térmicas, se dice que el medio se comporta como una *lente térmica*: la dependencia del índice de refracción con la temperatura hace que el medio actúe como una lente convergente en las regiones de baja temperatura, y divergente en las de alta temperatura. Este efecto se ilustra en la figura 3.4, en la que un haz de luz plano incide normalmente sobre la superficie (que por simplicidad se supone perfectamente plana) de un fluido en convección, representado por una estructura convectiva de rollos. A la salida del fluido, se forma una distribución de luces y sombras en que las zonas más brillantes se corresponden con las regiones más frías del fluido.

En nuestro caso, la distribución de intensidades no uniforme se debe tanto a las variaciones del índice de refracción como a la curvatura de la superficie del medio. De hecho, el efecto de lente térmica se ve reforzado por la contribución de la curvatura de la superficie: para el tipo de fluido utilizado y el rango de profundidades en que nos hemos movido, la curvatura positiva (que contribuye a que la luz converja) está asociada a las zonas frías, cuyo índice de refracción da regiones brillantes en la imagen. El efecto de la curvatura negativa es el opuesto, contribuyendo a la divergencia del haz.

Las imágenes del fluido se recogen con una cámara CCD de 512x512 elementos. Las variaciones de temperatura reales no son tan abruptas como las de intensidad que aparecen en las imágenes. Las no linealidades del método de obtención acentúan las diferencias entre las distintas zonas del fluido. Finalmente, las imágenes se envían a la tarjeta digitalizadora de vídeo de un ordenador.

Utilizando este sistema de observación y adquisición de imágenes, se ha analizado la dinámica temporal de los patrones mediante un algoritmo programado en C. Dicho

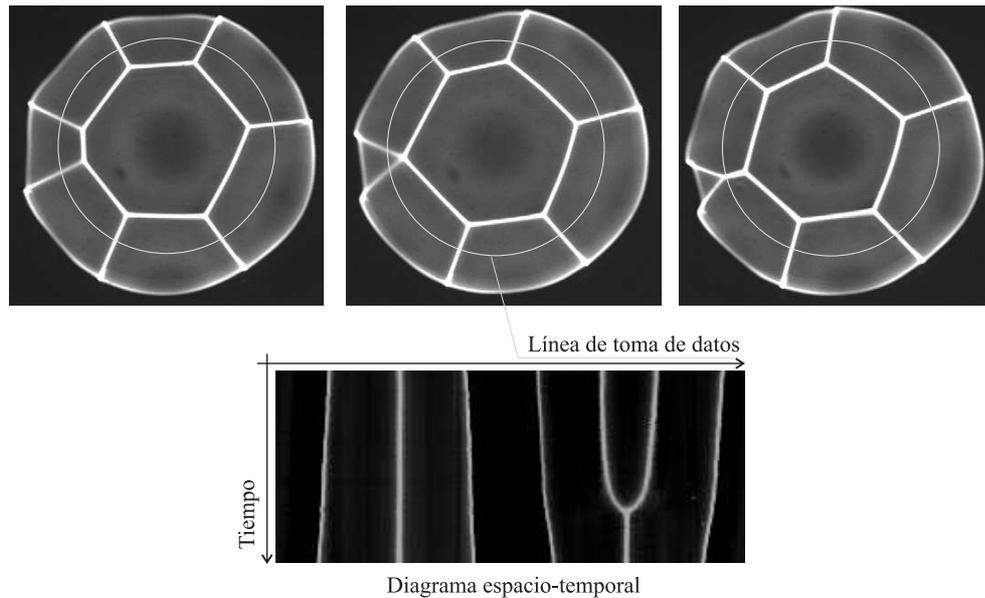


Figura 3.5: Método de visualización de la dinámica temporal. Se toma la intensidad de la imagen sobre una circunferencia a intervalos de tiempo fijos, y se sitúan consecutivamente las líneas obtenidas para formar un diagrama espacio-temporal de la evolución de los patrones. Se muestra un ejemplo de lo que ocurre en la transición de heptágono a hexágono.

algoritmo permite registrar la intensidad de la imagen en una línea (en concreto una circunferencia) para intervalos de tiempo predefinidos (Fig. 3.5). El ajuste de la posición y diámetro de la circunferencia se realiza sobre la propia imagen, de forma que intercepte las líneas frías que unen los polígonos con la pared del recipiente. Para estudiar la dinámica de los patrones, basta con construir un diagrama espacio-temporal como el mostrado en la figura 3.5: se colocan una tras otra las líneas tomadas para intervalos de tiempo iguales. En esta figura, se comprueba que el método permite visualizar las transiciones entre distintos polígonos, en concreto se ve lo que ocurre cuando disminuye el número de lados. En el caso en que aumente, dos de las líneas se separarán para dar cabida a una nueva. Las líneas brillantes del diagrama espacio-temporal se crean y destruyen con el cambio del número de lados, mientras que los giros se manifiestan en una inclinación de dichas líneas. Los largos tiempos característicos de nuestras experiencias hacen que intervalos de muestreo de entre 3 y 5 minutos sean suficientes.

Otras técnicas

Para observar la curvatura de la superficie, se ha utilizado un método consistente en hacer incidir sobre ésta un haz de luz láser, previamente expandido en una dirección con la ayuda de una lente cilíndrica (Fig. 3.6). Tras reflejarse sobre la superficie del fluido, este pincel de luz forma una imagen de la línea de la superficie sobre la que ha incidido, mostrando sus posibles deformaciones.

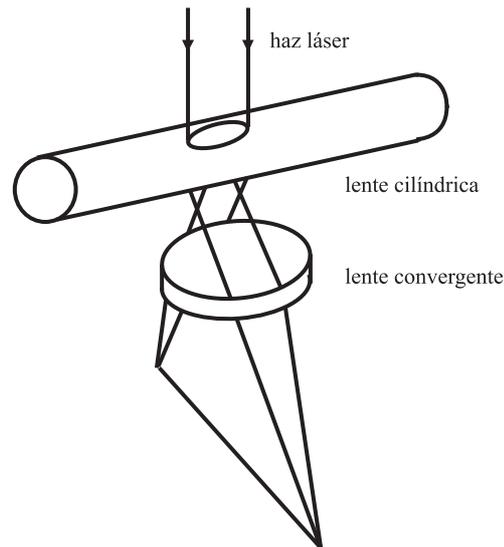


Figura 3.6: Efecto combinado de una lente cilíndrica y una convergente sobre un haz de luz láser.

Por su parte, la visualización del flujo en la superficie libre se ha llevado a cabo con la técnica del sembrado de **partículas trazadoras**. Se han utilizado partículas de aluminio de un tamaño comprendido entre 20 y 40 μm . Al incorporarse al fluido, son arrastradas por el movimiento del mismo, lográndose así que éste sea detectable.

Las imágenes de las trazas se obtienen mediante fotografía de exposición múltiple. El proceso seguido para obtenerlas, comienza por la filmación del movimiento de las partículas en la superficie libre desde el preciso instante en que se depositan (es importante conseguir en poco tiempo una distribución de partículas aproximadamente uniforme en toda la superficie). La filmación se realiza con una cámara provista de un sistema zoom, situada verticalmente sobre el recipiente. La iluminación es un factor clave, ya que debe hacer posible la observación de las partículas trazadoras, y determina en gran medida la calidad de las imágenes obtenidas. Hicimos distintas pruebas de iluminación, tanto lateral como frontal (utilizando un divisor de haz).

Una vez conseguida la grabación, se elabora (con la ayuda del software adecuado) un fichero de extensión .avi, que reúne una sucesión de imágenes separadas por intervalos de tiempo de un segundo o medio segundo. A partir de esta discretización de la grabación, se puede obtener en una única imagen las trazas del recorrido de las partículas de aluminio. Para ello, se deben superponer de manera adecuada las distintas tomas, evitando la repetición de las zonas de la imagen en que no hay movimiento. Comprobaremos en el capítulo 4 la eficacia de este método. El programa que proporciona la imagen final, al igual que el que obtiene los diagramas espacio-temporales de la dinámica, fue elaborado por parte del personal investigador del departamento.

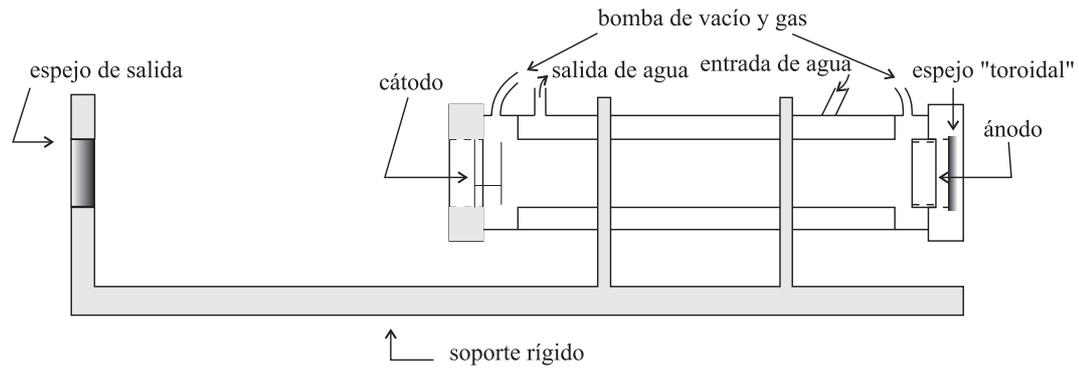


Figura 3.7: Esquema del láser de CO₂. Consta de un tubo de pírex cilíndrico que contiene el medio activo y los electrodos que producen la descarga, cerrado por un espejo y una ventana óptica. El espejo de salida es exterior al tubo. La refrigeración del tubo se garantiza con la circulación del agua por la región externa del tubo, y la renovación del gas con los conductos de entrada y salida indicados. El conjunto está montado sobre un soporte rígido que asegura su estabilidad mecánica.

Las partículas de aluminio no son el trazador más adecuado para observar el movimiento en todo el volumen de fluido. Para observar dicho movimiento, hemos empleado gotas del mismo aceite de silicona de nuestras experiencias teñido con colorantes solubles en él, en concreto Sudan IV (de color rojo) y Oil Blue N (azul). Estas gotas coloreadas trazan el camino que sigue el fluido al que se incorporan (se utilizan gotas a una temperatura próxima a la del fluido para evitar en lo posible alteraciones del estado del sistema). Basta con filmar o fotografiar el recorrido de las gotas para conseguir una imagen las líneas de flujo en el volumen del fluido. En las condiciones de nuestro experimento, el tiempo que tarda la silicona coloreada en recorrer una línea de flujo es menor que el tiempo en que la difusión de colorante dificulta la observación del movimiento. Información sobre éstos y otros métodos ópticos puede encontrarse en [56] y [57].

3.2. Láser de CO₂

3.2.1. Componentes del láser y montaje experimental

En el esquema de la figura 3.7 se muestra la estructura del láser utilizado. Sus elementos básicos son:

- Medio activo: una mezcla de gases (4.5 % de CO₂, 82 % de He, 13.5 % de N₂), que durante las experiencias se mantuvo a una presión media de 25 mbar.
- Sistema de bombeo eléctrico. Los electrodos, situados en los extremos del tubo cilíndrico de pírex que encierra el medio activo, son sometidos a una corriente continua obtenida con un voltaje de no más de 10 Kv.

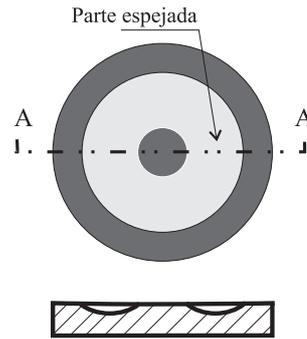


Figura 3.8: Esquema del espejo anular que cierra el tubo de descarga. Su parte reflectante tiene los diámetros interior y exterior de 8 y 26 mm respectivamente, y el radio de curvatura en dicha parte es de 4.5 mm.

- Cavidad óptica, formada por dos espejos con las siguientes características:

Uno de ellos, fabricado en cobre con un radio de curvatura de 1150 mm, cierra el tubo que contiene el medio activo. Un esquema de este espejo puede verse en la figura 3.8. Su superficie es reflejante al 90 %, pero únicamente en una corona circular formada por la sección interna de un toro, que tiene 9 mm de anchura y un radio externo de 26 mm. Esta geometría de sección toroidal es decisiva en la formación de los patrones.

El de salida, externo al tubo de descarga, es un espejo esférico de seleniuro de cinc, de 38 mm de diámetro y 3000 mm de radio de curvatura. Este espejo, transparente para la radiación del espectro visible, presenta una reflectividad del 90 % para infrarrojo, lo que lo hace adecuado para la longitud de onda de $10.6 \mu\text{m}$ a que emite el láser.

Dada la particular simetría anular de nuestro sistema, no se puede aplicar la definición usual de número de Fresnel para estimar el número de modos sostenido por la cavidad. Este tipo de geometría ha sido analizado en el caso en que la relación entre los radios externo e interno de la parte espejada es próxima a uno ($r_e/r_i \simeq 1$) [58]. En esta situación, se demuestra que el resonador resultante equivale a uno lineal, y da lugar a estructuras en que las variables radial y azimutal están desacopladas. Sin embargo, esta aproximación no es aplicable a nuestro caso (veremos que las variables radial y azimutal no están desacopladas, consecuencia directa de que la relación anterior no es tan próxima a uno). Se ha buscado una expresión razonable para calcular lo que podríamos llamar un “número de Fresnel equivalente”: considerando la diferencia entre los valores del número de Fresnel para dos espejos de radios r_e y r_i , se obtiene $N=(r_e^2-r_i^2)/\lambda L$, donde λ es la longitud de onda del laser y L la longitud de la cavidad. Con esta definición, el número de Fresnel es del orden de 16.

El correcto funcionamiento del láser está sujeto a factores como:

- Su propia estabilidad mecánica. Para garantizarla, se fija el láser a una estructura rígida, montada sobre un banco óptico con suspensión hidráulica. Dicha suspensión evita

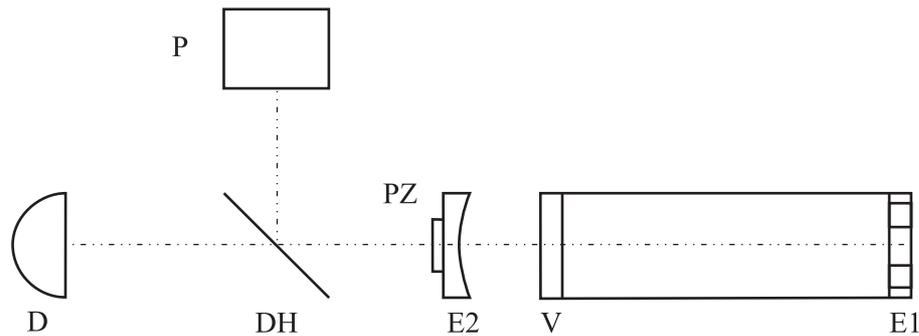


Figura 3.9: Diseño del montaje experimental completo. De derecha a izquierda: E1= espejo anular, V= ventana óptica, E2= espejo de salida, cuya posición está regulada por un piezoeléctrico (PZ), DH= divisor de haz, D= detector rápido, y P= medidor de potencia.

que vibraciones externas le afecten.

- El suministro de gas a una presión adecuada y controlable. Se requiere la utilización de una bomba de vacío (que evite la presencia de aire dentro del tubo de descarga), y un ajuste de la presión de la mezcla de gases.

- Una refrigeración correcta del tubo de descarga, que en nuestro caso se consigue mediante la circulación de agua por una capa cilíndrica que envuelve la zona de interés del tubo (la que contiene el medio activo). De este modo, se mantuvo la simetría cilíndrica del sistema.

- La estabilidad de la corriente eléctrica de bombeo (controlada por la fuente de alimentación).

En la figura 3.9 se muestra un esquema del montaje experimental y de medida completo. Consta de:

- El tubo de descarga que contiene el medio activo, de 50 cm de longitud y 3.54 cm de diámetro interno, cerrado por el espejo toroidal (E1) y una ventana óptica (V) transparente a la radiación infrarroja (99.5% de transmitancia en incidencia normal).
- Un trasladador piezoeléctrico (PZ), que controla la posición del espejo de salida (E2) y con ella la longitud de la cavidad. Modificando con el piezoeléctrico dicha longitud (las variaciones son del orden de micras), se logra sintonizar distintas frecuencias de resonancia de la cavidad. Utilizamos dichas variaciones como uno de los parámetros de control del experimento. La inclinación del espejo puede regularse con gran precisión mediante dos tornillos micrométricos, que se ajustan hasta conseguir la alineación óptima del láser.
- Un divisor de haz, que al dividir el haz de salida permite realizar dos medidas simultáneamente.

Para medir, hemos utilizado:

- Un detector rápido $\text{Hg}_x\text{Cd}_{1-x}\text{Te}$, cuya parte sensible es un cuadrado de $100 \mu\text{m}$ de lado. Dicho detector está conectado a un osciloscopio que permite observar y registrar la evolución temporal de la intensidad. Colocándolo en distintas posiciones, se puede comparar la evolución en distintas regiones del patrón. Con él se han obtenido registros temporales de la intensidad en un punto del patrón. La conexión entre el osciloscopio y un ordenador, ha permitido procesar la información.
- Un medidor de potencia con un área de detección suficiente para abarcar la totalidad del patrón. Con él promediamos el valor de la potencia en la superficie del patrón.

Observación de las estructuras

El láser de CO_2 emite radiación infrarroja. Para visualizar los patrones ópticos (que están configurados por las variaciones de intensidad en la sección transversal del haz láser), se necesita hacerlos patentes de algún modo. Hemos utilizado pantallas fosforescentes cuya reflectancia depende de la temperatura. Dichas pantallas adquieren una luminosidad brillante al ser enfocadas con una lámpara de ultravioleta. Si hacemos incidir sobre ellas la radiación emergente del láser, las zonas que reciben una mayor intensidad de luz quedarán oscurecidas, mientras que aquéllas que no reciben radiación reflejarán la luz de la lámpara con la misma intensidad del principio. Se logra así visualizar las variaciones de intensidad del haz. Las imágenes experimentales de los distintos patrones se consiguieron filmando las figuras formadas sobre la pantalla fosforescente. De nuevo, las imágenes se envían a la tarjeta digitalizadora de vídeo de un ordenador.

3.3. Características comunes a ambos sistemas

Veremos en los capítulos siguientes que estos dos sistemas tan distintos, conducen a fenómenos de formación y evolución de estructuras similares. A primera vista, es difícil encontrar puntos en común entre los sistemas experimentales descritos en las secciones precedentes, pero sin embargo existen.

Una de las finalidades de los dos montajes experimentales descritos, es lograr que las imágenes de los patrones lleguen a la tarjeta digitalizadora de vídeo de un ordenador. Una vez ahí, comienza un proceso de mejora de la calidad de la imagen: filtrado para evitar la presencia de ruidos externos, mejora del contraste, eliminación de brillos ajenos al patrón,... Son muchos los programas diseñados para proporcionar a la imagen un aspecto óptimo para que revele toda la información que contiene. A partir de ese momento, podremos utilizarlas para lo que sea pertinente en cada caso.

Otra técnica que muestra aspectos comunes entre ambos sistemas es la que denominaremos “inducción”. Como se verá en la presentación de los resultados, en casos muy concretos hemos forzado la aparición de una determinada estructura.

En el caso convectivo, el método inductivo consiste en forzar una determinada distribución de líneas frías, apoyando láminas metálicas en la superficie del fluido de forma que tracen la distribución deseada. Los elementos metálicos actúan disipando calor en el menisco que se forma; de este modo, bajan la temperatura de la zona del fluido en que se apoyan.

En el caso óptico, veremos que basta con insertar un hilo metálico de 50 ó 100 μm de diámetro (o combinaciones de ellos) en posiciones diametrales para lograr una preselección de las estructuras formadas por lóbulos. En este caso, los alambres metálicos no actúan como disipadores, sino más bien como obstáculos difractivos en el interior de la cavidad óptica.

Capítulo 4

Formación de estructuras

En este capítulo presentamos distintos tipos de estructuras estacionarias que aparecen en los dos sistemas bajo estudio: el convectivo con superficie libre, y el láser de CO_2 . Nos hemos centrado en sistemas transversalmente finitos y con simetría cilíndrica; en el caso del láser, más concretamente en un sistema anular. Compararemos nuestros resultados con los de otros trabajos, tanto teóricos como experimentales.

El primer apartado está dedicado a relaciones de aspecto pequeñas o moderadas (llegamos hasta $\Gamma \approx 10$). En él, se presentan resultados obtenidos con el recipiente A utilizando aceite de silicona de 350 cSt. En el apartado de relaciones de tamaño mayores, pasaremos a analizar las estructuras obtenidas con el láser de CO_2 ($N \simeq 16$): patrones anulares continuos, o discretos con un índice azimutal mayor que 10.

En ambos sistemas, las restricciones impuestas por el contorno seleccionan unos determinados patrones.

4.1. Pequeña relación de aspecto

Vamos a presentar las estructuras convectivas observadas para valores crecientes de la relación de aspecto utilizando el recipiente A con aceite de 350 cSt. Para cada valor de Γ , se ha controlado cuidadosamente la horizontalidad del recipiente, y se ha aumentado en pasos discretos la potencia eléctrica aplicada a la resistencia calefactora hasta detectar un patrón convectivo.

Para valores de Γ entre 1.4 y 2.0, se detecta una estructura en que el fluido sube por una zona reducida próxima a la pared y tiende a dirigirse hacia la zona diametralmente opuesta del recipiente. Este patrón no se distingue por ombroscopía. Por este motivo, recurrimos al uso de partículas trazadoras para localizarlo y caracterizarlo. El resultado aparece en la figura 4.1. La imagen de las trazas en la superficie se muestra en la figura 4.1(a),

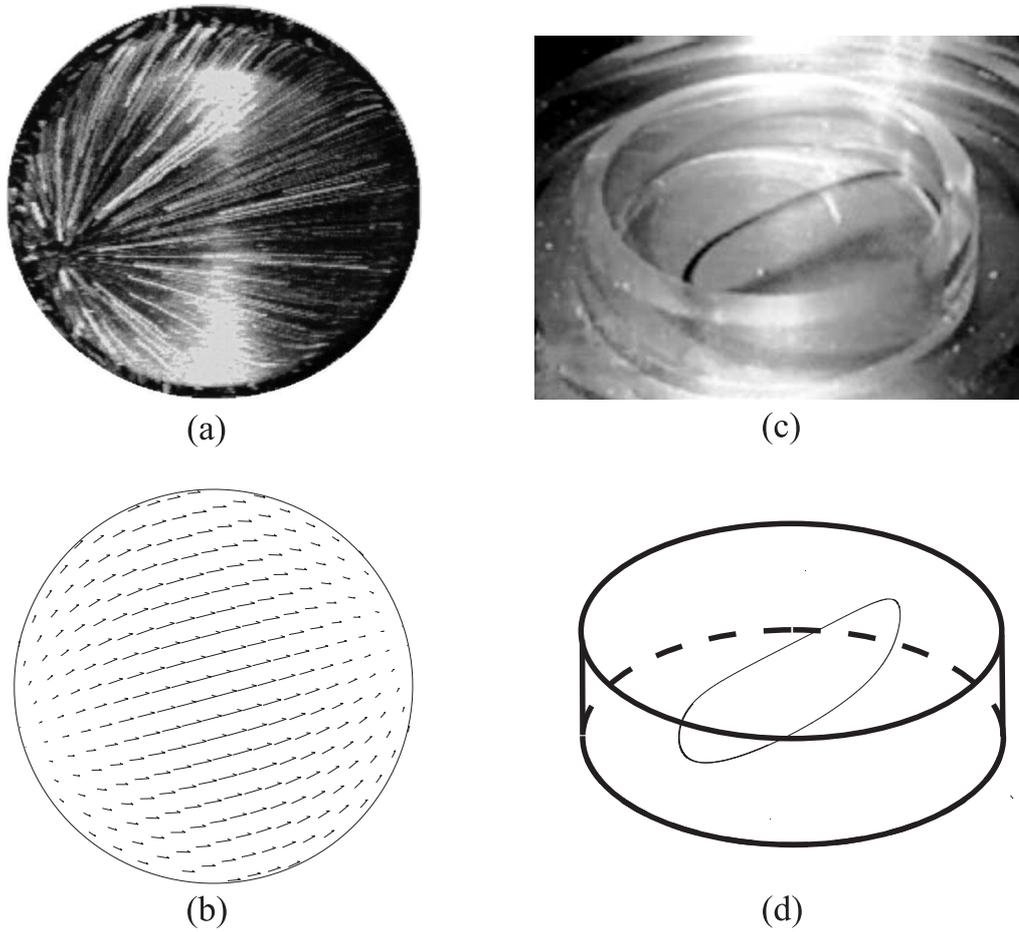


Figura 4.1: (a) Trazas del movimiento en la superficie para la estructura obtenida con $\Gamma = 1,8$, $\Delta T = 7,1$ K y $Ra/Ma = 91,7$. (b) Simulación numérica del movimiento en la superficie para el modo (1,1) de las referencias [17, 18]. (c) Movimiento en el volumen del fluido para las mismas condiciones de (a). Imagen obtenida con gotas de silicona coloreada. (d) Simulación numérica del movimiento en el volumen.

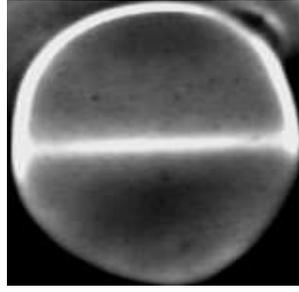


Figura 4.2: Ombroscopía obtenida para $\Gamma = 2,1$, $\Delta T=7.1$ K y $Ra/Ma=93.9$. La línea brillante marca la zona por la que baja el fluido.

conseguida para $\Gamma=1.8$ mediante fotografía de exposición múltiple. En ella, las trazas parten de un punto próximo a la pared y se dirigen hacia la zona opuesta del recipiente. Para las mismas condiciones experimentales, se obtuvo la fotografía de la figura 4.1(c), con la trayectoria seguida por las gotas de silicona coloreada depositadas en el centro de la superficie libre. En estas condiciones, se forma una línea de flujo que recorre una sección diametral completa.

En la misma figura 4.1, se ha situado el resultado de una simulación numérica del modo (1,1) de [17, 18] (sus expresiones matemáticas se deducen de las ecuaciones (2.11)). En ella aparecen las trazas en la superficie [Fig. 4.1(b)], y la trayectoria de una línea de flujo [Fig. 4.1(d)] conseguida para la misma condición inicial del experimento.

La diferencia entre las imágenes experimentales y las de la simulación es atribuible a las distintas condiciones de contorno en que fueron obtenidas: en la simulación se supone que las paredes son perfectamente adiabáticas y deslizantes, aproximaciones que no pueden aplicarse a las paredes de metacrilato que hemos utilizado. En consecuencia, el fluido no puede subir por las paredes como en la figura obtenida a partir del análisis teórico, sino por un punto próximo al contorno.

Por otra parte, en la simulación, las trazas se curvan para dirigirse hacia un único punto (el diametralmente opuesto al de subida de fluido). Sin embargo, las trazas en el experimento son casi rectas. Tienden a dirigirse hacia el lado opuesto del recipiente, pero no se curvan hacia un único punto. El menisco influye en este resultado, tirando del fluido próximo a las paredes (en el menisco, la cesión de calor al ambiente es ligeramente superior; esta zona ligeramente más fría, atrae el fluido hacia las paredes). Las diferencias entre las figuras de la simulación y las experimentales podrían ser debidas en parte a una pequeña contribución de alguna otra estructura o modo, dando lugar a lo que en Ref. [18] se denomina un “modo mixto”.

Aumentando la relación de aspecto hasta 2.1, localizamos una estructura convectiva distinta, en la que dos puntos calientes coexisten en zonas diametralmente opuestas próximas a la pared. Se comprueba que el fluido, que sube por estas zonas, baja por un diámetro del recipiente, la línea fría de la estructura. Dicha línea se ve claramente con la

ombroscopía (Fig. 4.2).

Sin embargo, esta estructura se desestabiliza fácilmente: basta con que una de las dos zonas calientes se desplace ligeramente de su posición o aumente su temperatura respecto a la otra, para que la línea fría se desplace hacia la pared y desaparezca, dejando únicamente un punto caliente en el fluido, sea próximo a la pared (formando la estructura descrita previamente) o en la zona central (originando una estructura toroidal en que el fluido sube por el centro y baja cerca de las paredes). De hecho, no es sencillo obtenerla de modo natural. Se observó en las condiciones indicadas en la figura 4.2, pero no en todas las pruebas realizadas. Su presencia podría depender incluso de cómo se cruza el umbral convectivo (de la amplitud de los saltos de potencia discretos empleados).

En su estudio, nos servimos de la técnica de inducción introducida en el capítulo 3: apoyando una lámina metálica sobre un diámetro en la superficie libre, se aumenta la disipación térmica en él, lo que lo convierte en una zona de bajada de fluido. Induciendo la línea para valores de Γ entre 1.8 y 2.3, comprobamos que pierde estabilidad en tiempos que no han superado las 30 horas, esto es, unas 18 veces el tiempo de difusión térmica en la dirección vertical.

En la figura 4.3, aparecen las trazas obtenidas del movimiento en la superficie libre del fluido [Fig. 4.3(a)] junto con la simulación numérica de dicho movimiento [Fig. 4.3(b)]. Esta simulación se ha realizado particularizando las expresiones (2.11) para el modo (2,1). En la imagen experimental, se observa que las trazas parten de puntos próximos a la pared, no de ella como en la simulación. La asimetría de la figura 4.3(a) está relacionada con la dificultad de estabilizar esta estructura en condiciones experimentales reales.

En las figuras 4.3(c) y (d), se aprecia un gran parecido entre la imagen que obtuvimos colocando una gota de silicona coloreada en el centro de la superficie, y la simulación del movimiento de una gota de fluido con la misma posición inicial, conseguida a partir de las expresiones del modo (2,1) de [18]. El flujo forma líneas de corriente cerradas, localizadas dentro de los cuadrantes definidos por la línea fría de la estructura y el diámetro perpendicular a ella. El fluido sube cerca de la pared por la zona próxima a ese diámetro, y baja por la línea fría. En la filmación realizada del movimiento de las gotas de silicona coloreada en esta estructura y en la anterior, medimos una velocidad de flujo $v \simeq 1$ cm/min.

Aumentando el valor de Γ , se encuentra la estructura en la que el fluido sube por el centro del recipiente y baja cerca de las paredes, dando lugar a una figura aproximadamente toroidal. Fue observada cerca del umbral para Γ entre 2.3 y 4. Mediante ombroscopía, se distingue una zona reducida más oscura (más caliente) en el centro del recipiente, que marca por dónde sube el fluido (Fig. 4.4(a), obtenida para $\Gamma = 3,95$). Con el método del pincel de luz láser descrito en el capítulo 3, se aprecia en esta zona un ligero abombamiento.

Las trazas superficiales que mostramos en la figura 4.4(b) ($\Gamma = 3,75$), son semejantes a las obtenidas por simulación numérica de las ecuaciones (2.11) para el modo (0,1), que están presentes en el apartado (c) de la misma figura.

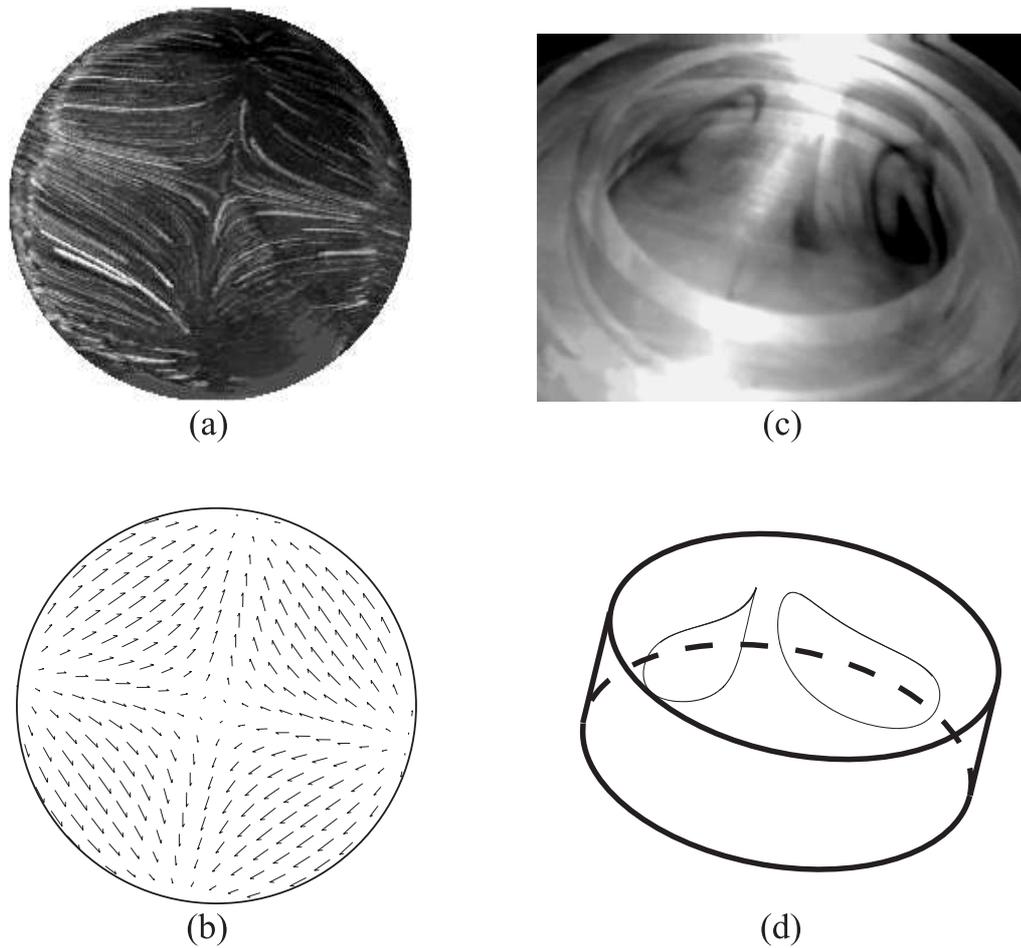


Figura 4.3: (a) Trazas del movimiento en la superficie para la estructura obtenida con $\Gamma = 2,1$, $\Delta T = 7,1$ K y $Ra/Ma = 93,9$. (b) Simulación numérica del movimiento en la superficie para el modo (2,1) de las referencias [17, 18]. (c) Imagen del movimiento en el volumen del fluido para las mismas condiciones de (a). Las líneas de flujo se mantienen en un cuadrante de la imagen. (d) Simulación numérica del movimiento en el volumen.

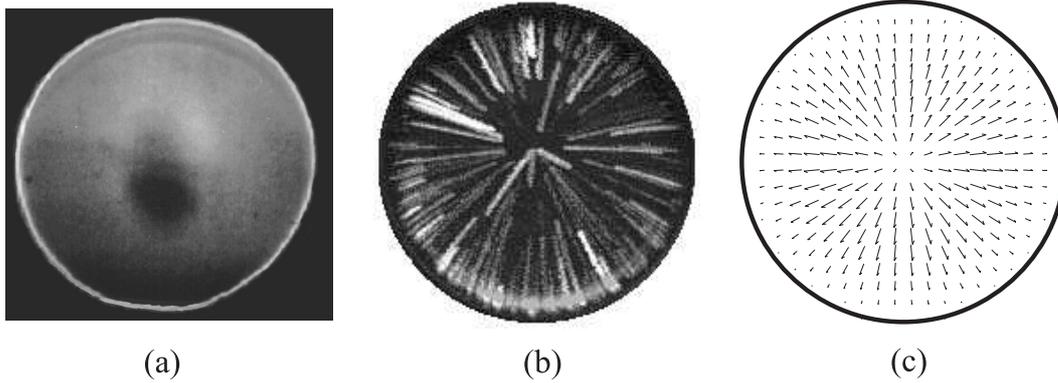


Figura 4.4: (a) Ombroscopía obtenida para $\Gamma=3.95$, $Ra/Ma=38$ y $\Delta T=14.2$ K. El fluido sube por el centro y baja cerca de las paredes del recipiente. (b) Trazas del movimiento en la superficie conseguidas para $\Gamma = 3,75$, $\Delta T = 12,7$ K y $Ra/Ma = 18,4$. Se dirigen desde el centro hacia las paredes. (c) Simulación del movimiento obtenida para el modo (0,1) de [17, 18].

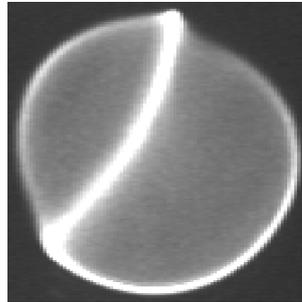


Figura 4.5: Ombroscopía de una estructura asimétrica. Fue observada para $\Gamma=5.6$, $\Delta T=12.8$ K y $Ra/Ma=26.1$.

Aumentando la relación de aspecto entre 4 y 10, se puede observar una gran variedad de estructuras convectivas estacionarias. Para $\Gamma=5.6$, observamos un patrón asimétrico (Fig. 4.5) que se asemeja a la estructura de la línea, pero es más estable. El campo de temperaturas de esta estructura asimétrica se parece al del modo (1,2) de la figura 2.2, y también al obtenido numéricamente en el trabajo de Zaman y Narayanan [31] para $m = 1$ (ver su figura 5). Esta estructura se aparta del comportamiento general observado para $\Gamma > 4$, en que el número de celdas convectivas aumenta gradualmente. En primer lugar, se forman particiones azimutales, en un número que no sólo aumenta con Γ , sino también con ΔT . Observamos hasta cinco particiones azimutales. Las ombroscopías de dos de estas estructuras se muestran en la figura 4.6. En la figura 4.6(a) aparece una ombroscopía de la estructura con tres divisiones, obtenida para $\Gamma=6.3$. La estructura de cuatro divisiones azimutales presente en la figura 4.6(b), se encontró para $\Gamma=7.45$. Estos patrones se corresponden con los modos (3,1) y (4,1) del análisis lineal de [17, 18], tal y como puede comprobarse en la figura 2.2.

Para $\Gamma > 6$, aparece en el umbral una estructura que presenta una división radial [Fig. 4.7(a)]. El fluido sube por el centro y por la zona próxima a las paredes originando

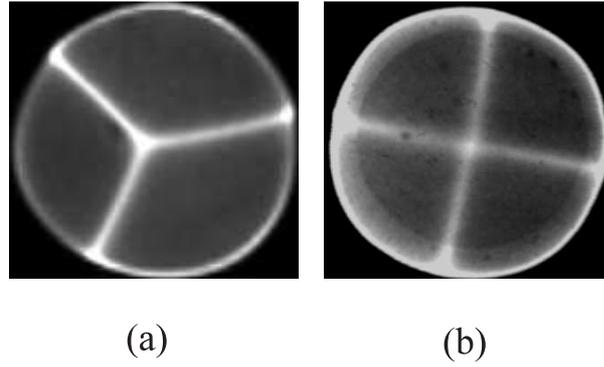


Figura 4.6: Dos de las estructuras consistentes en particiones azimutales: (a) Tres particiones azimutales, obtenida para $\Gamma=6.3$, $\Delta T=11.4$ K y $Ra/Ma=20.6$. (b) Cuatro particiones, con $\Gamma=7.45$, $\Delta T=11.2$ K y $Ra/Ma=14.8$.

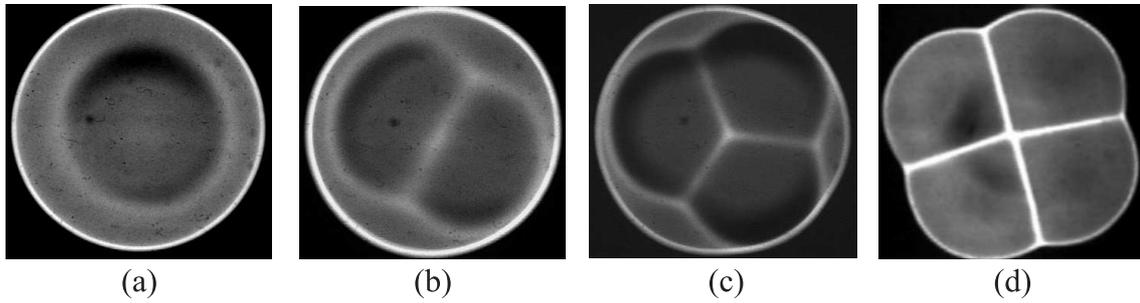


Figura 4.7: Ombroscopías de cuatro estructuras con una división radial. (a) Dos rollos convectivos concéntricos: $\Gamma=8.75$, $\Delta T=10.6$ K y $Ra/Ma=10.6$. (b) Con dos lóbulos: $\Gamma=9.5$, $\Delta T=11.9$ K y $Ra/Ma=9.1$. (c) Con tres lóbulos: $\Gamma=10$, $\Delta T=14.9$ K y $Ra/Ma=8.2$. (d) Con cuatro lóbulos: $\Gamma=10.5$, $\Delta T=22.5$ K y $Ra/Ma=18.3$.

dos rollos convectivos concéntricos. Al aumentar la temperatura en estas condiciones, nos encontramos con dos situaciones posibles: para los valores menores de Γ en que se observa esta estructura, un aumento de ΔT hace que este patrón dé lugar a los consistentes en particiones azimutales descritos previamente. Sin embargo, para valores de Γ mayores que 8.7, aparecen nuevas estructuras con componente azimutal que conservan la división radial [figuras 4.7(b) y (c)]. La primera de ellas se muestra en la figura 4.7(b), que fue obtenida para $\Gamma=9.5$. Consta de tres zonas por las que sube fluido: el centro de los dos lóbulos internos, y la zona de la corona circular externa próxima a la pared. Del mismo tipo pero con tres lóbulos centrales, es la imagen de la figura 4.7(c), tomada para $\Gamma=10$. La figura 4.7(d) fue obtenida por inducción para $\Gamma=10.5$. En ella, son cuatro los lóbulos centrales.

A partir de $\Gamma \approx 8$, se observan patrones poligonales. Bifurcan en algunos casos desde la estructura convectiva de dos rollos concéntricos, y para algunos valores de Γ , a partir de las estructuras con lóbulos descritas previamente. Comenzando por un pentágono, se encuentran polígonos con un número de lados que aumenta con ΔT . Los patrones

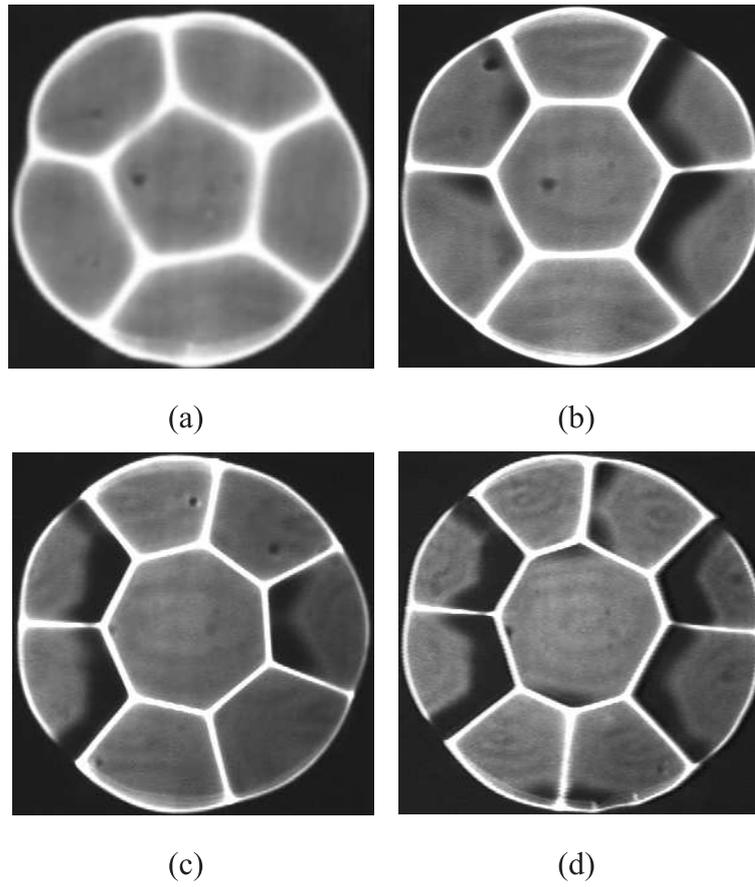


Figura 4.8: Ombroscopías de las cuatro estructuras poligonales presentes. Se obtuvieron en el recipiente B. (a) $\Gamma = 9,0$, $\Delta T = 7,6$ K; (b),(c),(d) $\Gamma = 10,1$, $\Delta T = 10,2$, $10,8$ y $12,3$ K respectivamente.

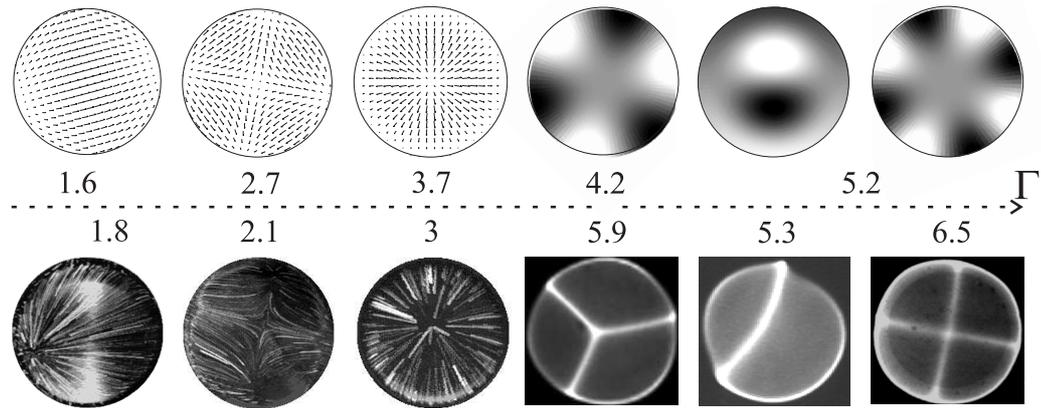


Figura 4.9: Resumen de los resultados obtenidos en pequeña relación de aspecto. Hemos reproducido experimentalmente las estructuras presentes en el ordenamiento del análisis lineal de [17] (ver Fig. 2.5), para valores similares de Γ (se dan valores orientativos). A partir de la estructura asimétrica, el ordenamiento de los modos no es tan claro (en la teoría aparece junto con el modo (4,1), en el experimento se ha visto antes que el (3,1)).

pentagonales sólo aparecen cerca del umbral; al aumentar ΔT o Γ , el hexágono pasa a ser la estructura presente. Un mayor incremento de ΔT hace que bifurque a un heptágono, y para algunos valores de Γ se han formado hasta octógonos a partir del heptágono. Estas cuatro estructuras poligonales se muestran en la figura 4.8. Las imágenes de esta figura se obtuvieron en el recipiente B. Son idénticas a las formadas en el A: sólo se han observado pequeñas diferencias en los valores de Γ en que se obtienen (ligeramente superiores para el recipiente B); puede ser debido a las distintas condiciones de contorno térmicas de los recipientes.

Resumiendo, para Γ pequeña se han visto los patrones predichos por el análisis lineal de Rosenblat y colaboradores [17]. Aún más, se comprueba que el ordenamiento de las estructuras concuerda en gran medida con el de este análisis (ver Fig. 4.9), y que se obtienen para valores no muy distantes de relación de aspecto. Parte de las discrepancias observadas en este último punto, entre los valores de Γ en que obtuvimos las imágenes de las estructuras y los de la curva de estabilidad marginal, se deben a que las imágenes se tomaron para valores de ΔT superiores a los de su umbral de aparición.

En concreto, para los valores menores de Γ se han obtenido los dos patrones en que el fluido sube por una única zona y la estructura de la línea. La primera de ellas (aquella en que el fluido sube por una zona próxima a la pared) no aparece en los trabajos experimentales de las referencias [26, 28, 29], a pesar de aparecer (también en primer lugar) en el ordenamiento de modos del análisis lineal de Rosenblat y colaboradores. Al aumentar Γ , aparece la estructura asimétrica y comienzan a formarse divisiones azimutales, dando estructuras con tres y cuatro celdas convectivas (Fig. 4.6), patrones del tipo de los predichos por la teoría lineal para valores similares de la relación de aspecto [17, 18].

A partir del valor de Γ en que se forman dos rollos convectivos concéntricos, comienzan las divisiones en celdas: particiones en el rollo convectivo interno dando los patrones con lóbulos [Fig. 4.7], o divisiones en el rollo convectivo externo formando patrones poligonales. En ambos casos, aumenta gradualmente el número de celdas convectivas. Una de las estructuras con lóbulos se incluye en el esquema de patrones observados por Ondarçuhu y colaboradores (Fig. 2.7). No hemos encontrado estructuras similares a las de lóbulos en otros trabajos. En el de Dauby y colaboradores [32], aparecen estructuras con divisiones azimutales en ambos anillos (interno y externo) que no hemos observado.

4.1.1. Estructura convectiva hexagonal

Mediante ombroscopía, se ha observado la estructura consistente en un único hexágono para una relación de aspecto de 7.5 y valores superiores.

Con $\Gamma = 8$ ($Ra/Ma = 12,8$), se observó para $\Delta T_c \simeq 4$ K la aparición de movimiento convectivo, con la ayuda de partículas trazadoras y una iluminación adecuada. Tomaremos este valor como diferencia de temperatura crítica en el rango de relaciones de aspecto en que aparecen las estructuras poligonales. No es sencillo determinar las condiciones precisas para las que se inicia la convección. Con este valor de ΔT_c , no estamos dando sino una aproximación al umbral.

En el recipiente A, se ha observado con $\Gamma=8$ que la estructura hexagonal es estable para una supercriticalidad en torno a 2. Para las relaciones de aspecto más bajas en que se observa el hexágono y cerca de su umbral de aparición, se observan alternancias con un pentágono. Por otra parte, para un valor de supercriticalidad en torno a 3.2, se dan transiciones entre el patrón convectivo de un hexágono y otro de un heptágono. El estudio de esta dinámica queda pendiente para el capítulo siguiente.

Caracterización del movimiento del fluido

Las líneas de flujo en la estructura convectiva hexagonal (tanto en la superficie como en todo el volumen del fluido) que se presentan a continuación, se han obtenido utilizando partículas trazadoras y gotas de silicona coloreada. Proporcionan resultados cualitativos.

Movimiento en la superficie del fluido

Mediante la deposición de pequeñas partículas de aluminio en la superficie y la técnica de fotografía de exposición múltiple, se ha obtenido la imagen de la estructura hexagonal de la figura 4.10. En ella, se observan las trazas del movimiento del fluido en la superficie libre para una relación de aspecto de 8.1. A su lado, se muestran las trazas propias de una red hexagonal: a partir de la expresión que define este tipo de redes, se obtiene que las trazas en la superficie están dadas por una combinación de tres funciones coseno giradas 120° entre sí. En concreto, se ha representado la función $-\left[\cos x + \cos\left(\frac{-x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2}\right) +$

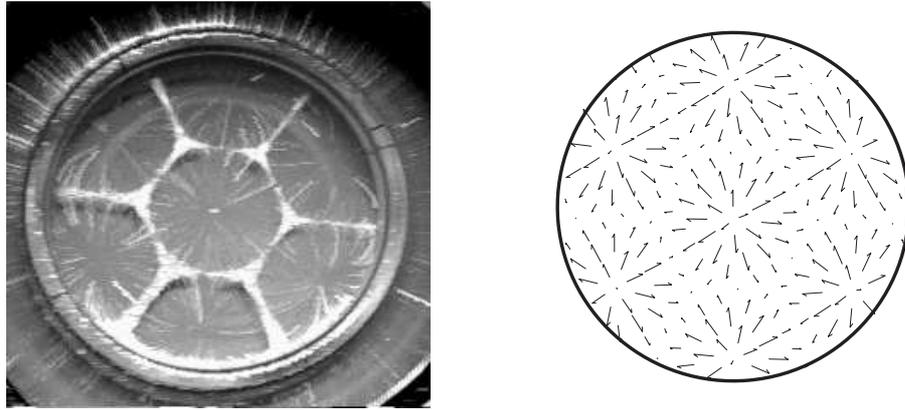


Figura 4.10: Trazas del movimiento de la silicona en la superficie libre del fluido. Imagen obtenida con partículas de aluminio para $\Gamma = 8,1$, y fragmento de la simulación numérica de las trazas en una red hexagonal extensa.

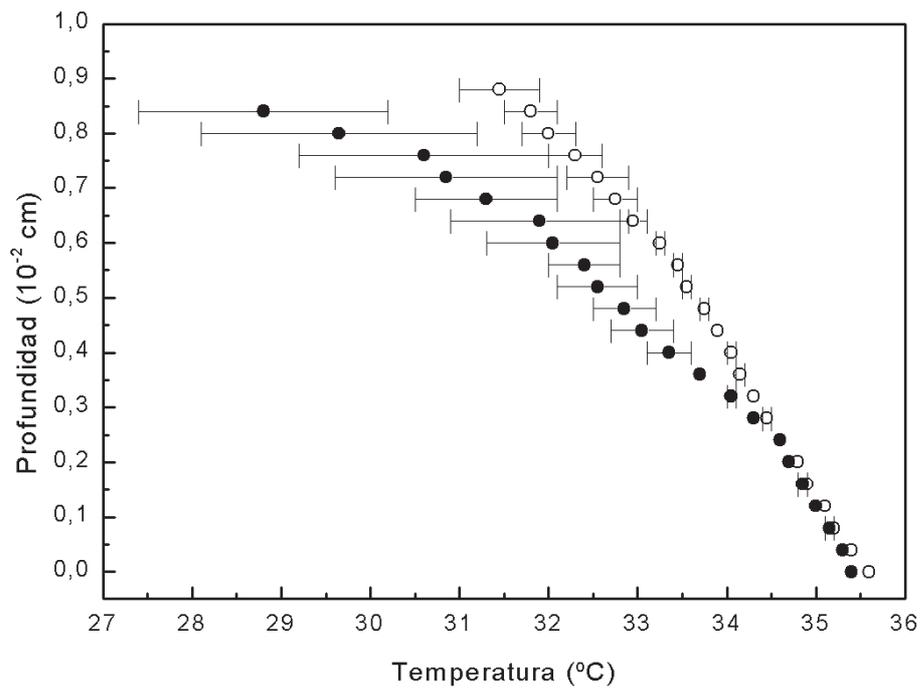


Figura 4.11: Representación de los perfiles de temperatura en el centro de la estructura hexagonal (●) y en un punto caliente próximo a la pared del recipiente (○). Las barras representan las variaciones absolutas de la temperatura a las profundidades indicadas. Estas medidas se realizaron para $\Gamma = 8,7$, $Ra/Ma = 10,7$ y $\epsilon = 2,8$.

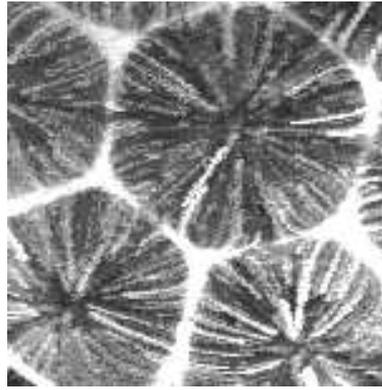


Figura 4.12: Imagen en que se observan con mayor detalle las trazas en la superficie libre (obtenida con $\Gamma = 8,9$, $\epsilon=2.4$ y $Ra/Ma=10.4$).

$\cos(\frac{-x}{2} - \frac{\sqrt{3}y}{2})]$. Las dos imágenes de la figura 4.10 guardan una gran similitud, tal y como ocurre en gran relación de aspecto.

En la estructura hexagonal, el fluido sube por la zona central y por seis zonas aproximadamente equiespaciadas próximas a la pared, y tiende a descender por los vértices y los lados, que son sus líneas frías. Medidas de temperatura realizadas sobre la estructura hexagonal, muestran que los puntos más fríos de la estructura son los vértices del hexágono (resultado lógico si se los ve como la intersección de tres segmentos fríos). Otro resultado interesante es que las temperaturas de los puntos de subida de fluido próximos a las paredes son similares e incluso superiores a las del centro. Esta apreciación queda confirmada con los perfiles de temperatura representados en la gráfica 4.11, medidos en el centro del hexágono y en uno de estos puntos próximos al contorno (el centro de una de las celdas convectivas adyacentes al hexágono central). En el centro de la superficie, se observan las mayores variaciones térmicas. A partir de una profundidad de 0.56 cm, los dos perfiles prácticamente se superponen.

Las trazas obtenidas entre el centro y los lados no son radiales, sino que se curvan para dirigirse hacia los vértices (los puntos más fríos). Con menos partículas de aluminio, éstas se concentran únicamente sobre los vértices, no sobre los lados. En la figura 4.12, conseguida con la misma técnica para $\Gamma = 8,9$, se muestra en mayor detalle la forma de las líneas de flujo en la superficie libre y su curvatura.

Movimiento en el interior del fluido

La curvatura de las trazas vuelve a ponerse de manifiesto al visualizar el movimiento en el interior del fluido mediante gotas del mismo aceite de silicona teñido con colorante. El movimiento de las gotas coloreadas muestra la tendencia a formar líneas de flujo cerradas en planos alabeados perpendiculares a la superficie del fluido. Estas líneas unen los puntos calientes de la estructura (el centro del hexágono y los puntos análogos de las estructuras circundantes) con los puntos fríos (los vértices de la figura hexagonal más próximos al punto caliente considerado) en la superficie libre del fluido. La forma de una línea de flujo

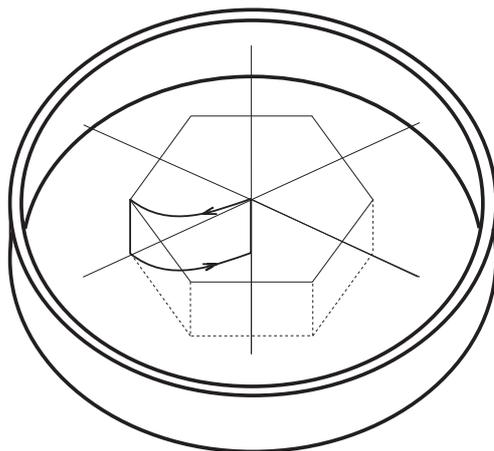


Figura 4.13: Línea de flujo que pasa por el centro y un vértice del hexágono.

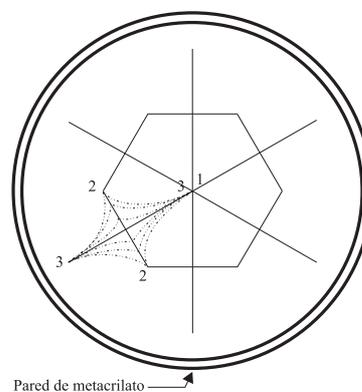
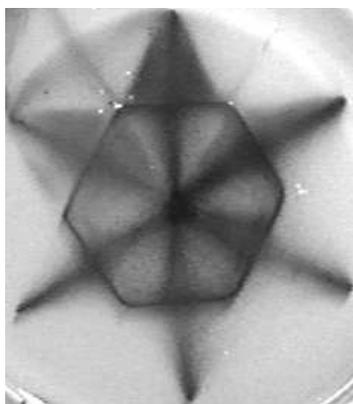


Figura 4.14: Imagen del resultado de depositar una gota de silicona coloreada en el centro de la superficie ($\Gamma = 8.7$, $Ra/Ma = 10,8$ y $\epsilon = 2,4$).

que pasa por el centro y un vértice del hexágono puede verse en la figura 4.13.

El resultado de depositar una gota de silicona coloreada en el centro del hexágono aparece en la figura 4.14 junto a un dibujo aclarativo. La gota se depositó inicialmente en el punto 1 (centro del hexágono), desde el que se extendió dirigiéndose a los puntos 2 (los vértices por los que bajó). A partir del lado del hexágono comprendido entre esos dos vértices, el colorante se dirigió hacia los puntos calientes más próximos, marcados con el número 3. Pasado un cierto tiempo, el colorante se concentró en los lados del hexágono y en figuras alabeadas formadas entre el centro y los vértices del mismo. En la imagen Fig. 4.14(a), se observa el contorno del recipiente en las esquinas inferiores.

El camino que sigue una gota de silicona coloreada situada inicialmente en un vértice y el correspondiente dibujo aclarativo, se presentan en la figura 4.15. La gota (depositada inicialmente sobre el punto 1) cae al fondo, desde donde se expande formando un triángulo cuyos vértices son los tres puntos calientes más próximos de la estructura (ver puntos 2

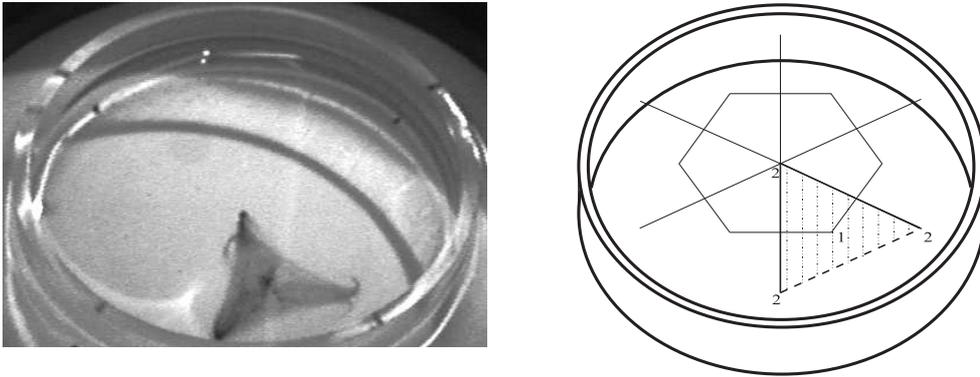


Figura 4.15: Inicio del movimiento de unas gotas de silicona coloreada depositadas en un vértice de la estructura. Imagen obtenida para $\Gamma = 8.9$, $Ra/Ma = 10,3$ y $\epsilon = 2,6$. En el dibujo adjunto, se muestra un esquema aclarativo: la gota se depositó en el punto uno, cayó al fondo y desde allí se extendió hasta formar el triángulo que se observa en la figura, en el que el colorante comienza a ascender por los vértices.

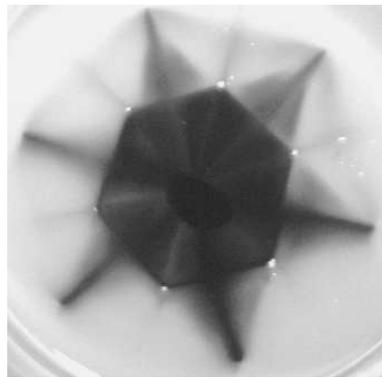


Figura 4.16: Imagen final del hexágono con colorante. Las partículas de aluminio permiten determinar la localización exacta de la estructura. Prueba de ello son los puntos brillantes que marcan los vértices (puntos más fríos de la estructura), resultado de la deposición de partículas de aluminio en la superficie.

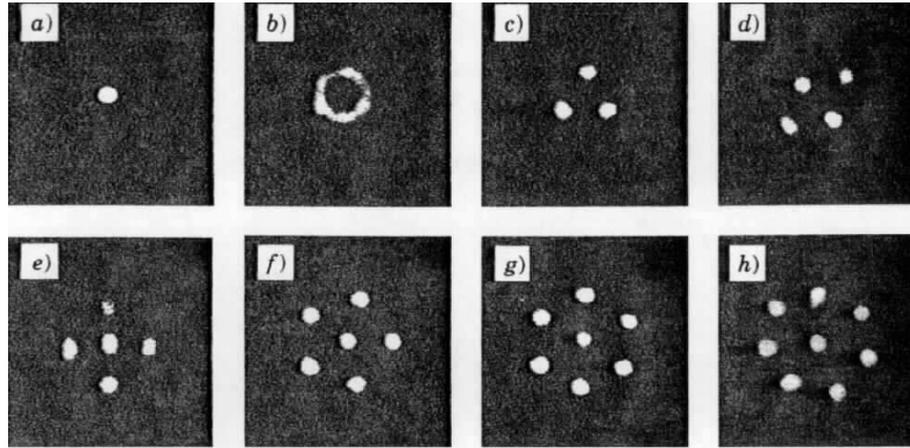


Figura 4.17: Fig. 2 de Ref. [41]. Muestra los distintos patrones obtenidos en su sistema (imágenes de campo próximo).

de la figura). Desde los puntos calientes, el colorante se distribuye hacia los dos lados del hexágono perpendiculares a los lados del triángulo marcado en la figura 4.15. De esta forma, se originan las figuras alabeadas mostradas anteriormente en la figura 4.14.

Finalmente, tras algo más de una hora de espera y añadiendo más colorante, pudo observarse la imagen que aparece en la figura 4.16. El contorno del recipiente puede observarse en las esquinas inferiores de imagen. Se comprueba en esta imagen (y en las obtenidas con partículas de aluminio) que la distancia desde los vértices del hexágono central hasta las paredes del recipiente es ligeramente superior al lado del hexágono, dando cabida al centro de lo que en mayor relación de aspecto serían los polígonos contiguos, en nuestro caso incompletos. Esta longitud podría definir la relación de aspecto mínima para la formación del hexágono.

4.1.2. Trabajos similares en sistemas ópticos

Los trabajos de Ramazza y colaboradores [40] y de Pampaloni y colaboradores [41] se realizaron en un sistema óptico distinto del nuestro. Sin embargo, creemos interesante incluirlos por su semejanza con nuestros resultados. Presentan una serie de experimentos de formación de patrones en un sistema óptico que consta de una válvula de cristal líquido (*LCLV*) iluminada por un láser de argón, y con un lazo de realimentación que incluye un tramo en que actúa la difracción.

Interesados por los efectos debidos a las restricciones laterales del haz de luz, situaron una apertura de diámetro variable en el lazo de realimentación. Para pequeños valores de la apertura (y por tanto de la relación de aspecto) observaron la formación de patrones poligonales, que son descritos como soluciones estacionarias con una simetría subyacente D_m (subgrupo de $O(2)$), donde m es el número de ejes de simetría de la estructura.

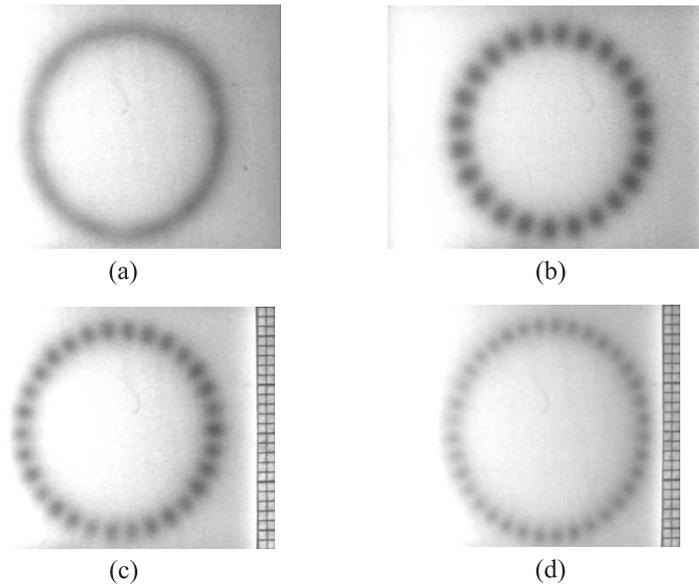


Figura 4.18: Cuatro de las estructuras anulares obtenidas con el láser de CO_2 : un anillo continuo y tres anillos con 24, 32 y 36 lóbulos respectivamente. (a) y (b) se obtuvieron aplicando una corriente $I = 15$ mA, con el medio activo a una presión $p = 25,5$ mbar; sus potencias medias son $P_m = 0,39$ y $0,4$ w respectivamente. Las potencias medias de las imágenes (c) y (d) ($I = 13$ mA, $p = 25$ mbar) son $0,16$ y $0,3$ w respectivamente. En el paso del patrón de 24 lóbulos al de 36, el diámetro aumenta casi 2 mm.

Su sistema experimental permite la observación de campo próximo y de campo lejano de los patrones. Variando la apertura, observaron en campo próximo patrones de $m=2, 3, 4, 5, 6$ y 7 [Fig. 4.17]. Son estructuras de m puntos brillantes, separados por una distancia que se mantiene aproximadamente fija en todas ellas. Comprobaron que el número de puntos de los patrones aumenta con la apertura, pero la separación entre dichos puntos permanece aproximadamente constante.

La imagen de los polígonos dada por ombroscopía, no ayuda en la comparación con estos trabajos. Sería más apropiada una figura que mostrara los puntos calientes de las celdas convectivas. Así, el pentágono se convertiría en un punto central rodeado de una circunferencia formada por cinco puntos equiespaciados; en el hexágono serían seis los puntos externos, etc. Con esta figura en mente, se comprende que los patrones obtenidos en estos dos sistemas tan distintos (el convectivo y la *LCLV*), que no comparten más que la simetría, son muy semejantes.

4.2. Relaciones de tamaño mayores

En este apartado, se analizan los patrones ópticos formados con el láser de CO_2 de simetría anular. Se han utilizado como parámetros de control la corriente suministrada a

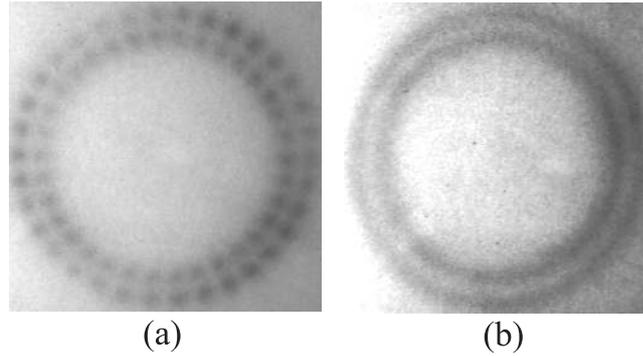


Figura 4.19: Estructuras de doble anillo, con 34 lóbulos en cada aro la primera, continua la segunda ($I = 17$ mA, $p = 23$ mbar, $P_m \simeq 0,2$ w).

los electrodos (que se mantuvo cercana al valor umbral, sin llegar en ningún caso a dos veces dicho valor) y, principalmente, variaciones finas de la longitud de la cavidad óptica, dada por la distancia entre los dos espejos. Esta distancia se regula con el piezoeléctrico acoplado al espejo de salida, que permite sintonizar las distintas frecuencias de resonancia de la cavidad óptica.

La geometría cilíndrica del láser, y en particular la configuración anular de uno de los espejos de la cavidad (el de mayor reflectividad), conducen a la selección de aquellos patrones que mantienen la simetría del sistema. Como resultado, todas las estructuras observadas son anulares, y se presentan en tres variantes posibles: anillos continuos, anillos no continuos formados por un número par de lóbulos, o patrones mixtos en los que se superponen los lóbulos sobre un fondo continuo. En concreto, las estructuras formadas en nuestro sistema constan bien de un único anillo, continuo o con un número par de lóbulos que varía entre 22 y 36, o bien de un doble anillo que se presenta únicamente en forma continua o con 34 lóbulos en cada aro. En la figura 4.18 se muestran algunas de las estructuras observadas: un anillo continuo de diámetro aproximadamente igual a 20 mm [Fig. 4.18(a)], y anillos discontinuos formados por 24, 32 y 36 lóbulos [Figs. 4.18(b),(c) y (d) respectivamente].

Las estructuras no continuas pueden describirse mediante un índice radial p , que da cuenta del número de aros ($p = 0$ si hay uno, $p = 1$ si hay dos), y un índice azimutal l igual a la mitad del número de lóbulos del patrón. En la figura 4.18 se ve que las variables radial y azimutal no están desacopladas, ya que el diámetro de las estructuras aumenta con el número de lóbulos; además, es posible la formación de dos anillos concéntricos.

Resulta cuando menos curioso que sólo se observe una estructura no continua de doble anillo: la de 34 lóbulos en cada aro. Este resultado lo determinan las restricciones laterales del sistema. Se ve que el radio de la zona espejada del espejo toroidal, que da la principal limitación transversal en esta experiencia, influye en los índices azimutales presentes (mayores cuanto mayor sea el radio del espejo), mientras que su anchura limita el máximo índice radial posible.

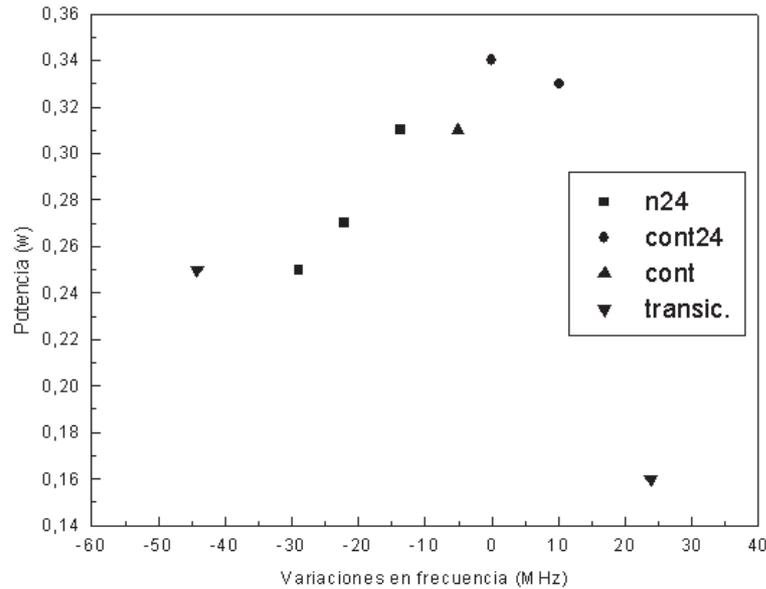


Figura 4.20: Curva de estabilidad de la estructura de 24 lóbulos ($I = 14,5$ mA, $p = 25,5$ mbar). Se representan las distintas versiones de esta estructura ($n24$ = estructura de 24 lóbulos sin componente continua, $cont24$ = idem con componente continua, $cont$ = aro continuo) y los puntos en que se dan las transiciones hacia otros patrones ($transic.$), en un diagrama potencia de la estructura *versus* variaciones relativas de la frecuencia propia de la cavidad.

En general, todas las estructuras son muy sensibles a las condiciones de alineamiento, pero las formadas por un doble anillo se ven particularmente afectadas: basta un pequeño desajuste de 10^{-4} radianes en la inclinación del espejo de salida para hacerlas desaparecer.

La estructura de doble anillo aparece representada en la figura 4.19. Este patrón se suele encontrar a partir de uno sencillo de 30 ó 32 lóbulos al aumentar ligeramente la longitud de la cavidad. Si ésta se sigue aumentando, el doble anillo suele dar paso al patrón más estable de 24 lóbulos en un único anillo. El proceso total involucra variaciones en la longitud de la cavidad que dan cambios en las frecuencias propias de la cavidad en torno a 50 MHz ($1 \mu\text{m} \simeq 34$ MHz; recordemos que el rango espectral libre es aproximadamente 170 MHz).

En lo concerniente a la potencia de las distintas estructuras, se comprueba (usando la variación de la longitud de la cavidad como parámetro de control) que cerca de la condición de resonancia, las máximas potencias están asociadas a patrones continuos o mixtos. Si nos alejamos de dicha condición (esto es, si aumentamos las pérdidas de la cavidad) aparecen los patrones con lóbulos. En la figura 4.20 mostramos un ejemplo de este resultado: sin ningún tipo de perturbación externa, se pasa al variar ligeramente la longitud de la cavidad de una estructura de 24 lóbulos a una continua de igual diámetro en que la potencia de salida del láser es mayor. Si se sigue variando dicha longitud, se pasa el máximo de la curva y se llega a una situación de competición entre modos que suele involucrar inestabilidades espacio-temporales. Dejamos el estudio de esta cuestión

pendiente para el capítulo siguiente.

Hemos visto en la revisión de trabajos previos que estructuras anulares de características similares han sido descritas en las referencias [43, 45, 46, 47]. En ellas, se han interpretado del siguiente modo:

- Los patrones de lóbulos sin componente continua en que la intensidad no oscila, se relacionan con la superposición de dos ondas de igual amplitud y frecuencia que viajan en sentidos opuestos, formando una *onda estacionaria*.
- Los patrones “mixtos” (de lóbulos con componente continua) resultan de la superposición de una onda estacionaria y una viajera, o bien de dos ondas de distinta amplitud que viajan en sentidos opuestos. Si se acoplan a una única frecuencia, la intensidad del patrón resultante no variará con el tiempo. En caso contrario, aparecerán oscilaciones.
- Los patrones continuos son ondas viajeras.

Una diferencia clara entre nuestro experimento y los de otros autores, reside en que no hemos ajustado la apertura de un diafragma y la posición de un filtro espacial para obtener un determinado patrón. Hemos contado con un espejo toroidal de tamaño fijo, que determina la selección de unas estructuras muy concretas. En el trabajo de Huyet y colaboradores [47], comprobaron en un láser anular (conseguido con una apertura regulable y un filtro espacial en el centro) que la dependencia entre el radio R de la estructura y el valor del índice azimutal, coincide con la de las funciones de Gauss-Laguerre. De estas funciones, en el trabajo de D’Alessandro y Oppo [69] se dice que son una base apropiada sobre la que proyectar las ecuaciones del láser. Nos basamos en estos resultados al elegir las funciones de Gauss-Laguerre para la simulación numérica presentada en el capítulo 6.

4.2.1. Trabajos similares en convección

Algunos trabajos sobre convección se han centrado en sistemas con simetrías similares a las de nuestro láser. Por ejemplo, los estudios realizados sobre convección en fluidos boussinesq confinados en un anillo cilíndrico sometido a rotación, en los que se ha llegado a algunos resultados similares a los nuestros.

En la referencia [59] puede encontrarse un análisis numérico de las ecuaciones de Navier-Stokes, aplicado al caso de un anillo cilíndrico sometido a rotación, en que el fluido se calienta desde el cilindro interior, y el campo gravitatorio está dirigido hacia el eje del cilindro.

En un anillo cilíndrico en rotación con tapas planas, gravedad radial y calentamiento lateral, el modo dominante en el umbral convectivo puede ser una onda viajera en la dirección azimutal. Sin embargo, las condiciones libres de las tapas del cilindro admiten una solución en forma de columnas estacionarias paralelas al eje de rotación, que recibe el nombre de “columnas de Taylor”. Con estas condiciones de contorno, cuando la rotación del anillo es elevada, el modo seleccionado en el umbral es siempre una columna de Taylor. La estructura que aparece en la figura 4.21, muestra la semejanza entre estas

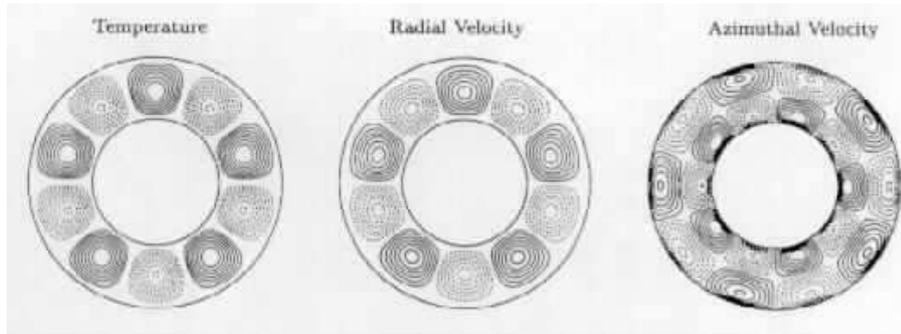


Figura 4.21: Curvas de nivel correspondientes a una solución columnar de índice azimutal 5. Sacado de la figura 3.1 de la referencia [59].

estructuras estacionarias (ya obtenidas por Busse en el límite de rotaciones altas [60, 61]) y los patrones de lóbulos que hemos obtenido con el láser. El índice azimutal de estas estructuras crece cuando el valor de la relación de los radios del anillo aumenta.

Este problema se ha estudiado desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones. Son interesantes los resultados obtenidos por Knobloch [62, 63] sobre las bifurcaciones que se pueden producir en sistemas de este tipo en rotación, comparándolas con las propias de sistemas sin rotación. Utilizando argumentos de simetrías sencillos, Knobloch [63] llegó a que el estado conductivo en un anillo sin rotación que se desestabilice hacia una solución no axisimétrica, dará lugar a una estructura estacionaria. En cambio, si el anillo rota, se rompe genéricamente la simetría de rotación para dar una estructura que precesiona respecto al sistema de referencia en rotación.

Sin embargo, para valores grandes de rotación y en las condiciones de contorno adecuadas, se ve (Ref. [59]) que las ecuaciones que describen el anillo en rotación recuperan la simetría propia del caso no rotante, lo que hace posible la aparición de las columnas de Taylor. En estas condiciones, la simetría del problema coincide con la de nuestro láser, $O(2)$ (invariancia bajo rotaciones alrededor del eje de simetría del sistema, reflexiones respecto al plano ecuatorial y reflexiones respecto a planos verticales que contienen al eje). Las bifurcaciones secundarias a partir de estas soluciones estacionarias propias del sistema no rotante, dan cuatro tipos de soluciones distintas [63]. Dichas soluciones, que dependen de si la bifurcación es estacionaria o Hopf, y de si se conserva o no la simetría de reflexión, son las siguientes:

- Soluciones estacionarias que conservan la simetría de reflexión.
- Estructuras que precesionan lentamente.
- Ondas estacionarias con oscilaciones de amplitud.
- Ondas estacionarias con oscilaciones de amplitud y fase, en que la estructura oscila alternativamente hacia uno u otro lado, dando lo que en la literatura se conoce como “*Direction Reversing Traveling Wave*” [64].

Existen otro tipo de trabajos sobre convección en sistemas anulares (ver [12, 65] y las referencias que incluyen), muchos de ellos realizados en mezclas de fluidos binarios. En

estos sistemas, el estado conductivo bifurca hacia un estado convectivo de ondas viajeras azimutales de baja amplitud. Un aumento de la supercriticalidad puede conducir a estructuras que llenan todo el recipiente, o bien a estados confinados (que pueden ser pulsos o estados extensos). En las condiciones adecuadas, se consiguen estructuras estacionarias.

Capítulo 5

Dinámica temporal

Hasta ahora nos hemos centrado en aspectos estacionarios, mostrando patrones presentes en nuestros sistemas para distintos valores de relación de aspecto y supercriticalidad en el caso convectivo, o de la corriente suministrada a los electrodos y de la longitud de la cavidad en el caso óptico. Hemos comprobado la fuerte influencia del contorno del sistema en la selección de las estructuras. En este capítulo, se añade al estudio la variable tiempo: nos centramos en los aspectos dinámicos asociados a las estructuras descritas en el capítulo anterior.

5.1. Pequeña relación de aspecto

En el capítulo 4, presentamos para pequeña relación de aspecto tres estructuras convectivas. Nos centramos principalmente en dos de ellas, que caracterizamos mediante pequeñas partículas trazadoras, y comparamos con los modos (1,1) y (2,1) del análisis lineal de Rosenblat y colaboradores [17].

Tratamos de localizar un comportamiento dinámico en la zona de relaciones de aspecto en que se observan estas estructuras. Para ello, nos situamos en relaciones de aspecto en torno a 2.1 ($\pm 0,3$) e indujimos el patrón de la línea fría, que se visualiza claramente con ayuda de la ombroscopía. Fijando esta condición de partida en el sistema, tratamos de observar una alternancia entre ellas sin cambiar los parámetros de control. La línea desapareció tras un intervalo de tiempo de no más de 30 horas. Sin embargo, no reapareció: comprobamos que es difícil recuperar esta estructura de tan alta simetría, sumamente afectada por unas condiciones de contorno que no le son favorables (como el menisco, que redujimos al máximo en esta experiencia situando el fluido a ras del cilindro).

En el trabajo de Echebarría y colaboradores [18] se predice una conexión heteroclina entre los modos (1,1) y (2,1), que incluye saltos de fase en la reaparición de los modos. No nos fue posible observar dicha conexión. Consideramos que las discrepancias entre nuestros

resultados y sus predicciones pueden ser debidas, entre otras causas, a las diferencias existentes entre las condiciones de contorno de nuestro experimento y las de su estudio. Por otra parte, ellos trabajaron con una relación $Ra/Ma \leq 20$ y comprobaron en estas condiciones que la región de estabilidad de la órbita heteroclina aumenta cuando Ra/Ma disminuye. Estamos fuera del rango de validez de ese trabajo, ya que no bajamos de una razón de $Ra/Ma \approx 90$. Habría que comprobar la persistencia de la región de estabilidad de la órbita heteroclina en nuestro caso. La alternancia encontrada en el experimento de Johnson y Narayanan [29] para el mismo rango de relaciones de aspecto, puede estar favorecida por los valores de d y D de su recipiente, considerablemente menores que los del nuestro. En estas condiciones, su valor de Ra/Ma concuerda con los de [18] ($Ra/Ma \approx 4,6$). La mayor contribución de la tensión superficial a la convección podría ser la causa de las discrepancias entre nuestros trabajos.

En lo que sigue, nos centraremos en los valores de Γ para los que aparecen los distintos patrones formados por un único polígono. En este rango de relaciones de aspecto sí se han encontrado comportamientos dinámicos interesantes.

5.1.1. Tipos de comportamiento temporal presentes

Los resultados que presentamos a continuación fueron obtenidos en el recipiente B para $\Gamma = 10,1$ ($Ra/Ma = 10,9$ para el aceite de 350 cSt, 11.65 para el de 100 cSt). La elección de este valor de relación de aspecto se debe a que en ella se observan para distintos valores de supercriticalidad, todos los patrones consistentes en un único polígono descritos en el capítulo anterior.

El patrón consistente en dos rollos convectivos concéntricos pierde su estabilidad para valores de supercriticalidad muy próximos al umbral, dando lugar a los patrones poligonales por división del rollo convectivo externo. En el recipiente B, se ha observado que la estabilidad de esta estructura depende de la forma en que se cruza el umbral convectivo (de los saltos de potencia empleados).

Para el valor de Γ bajo estudio, un aumento de la supercriticalidad no afecta al índice radial de las estructuras, sino al azimutal, ya que se traduce en un aumento del número de divisiones en la corona circular externa. El número de celdas convectivas va creciendo, y con él, el número de lados del polígono. En estas circunstancias, resulta útil aislar la dinámica azimutal para su análisis.

En el capítulo de descripción del sistema experimental, presentamos un método adecuado para analizar únicamente la dependencia azimutal de las estructuras: la toma de valores de intensidad sobre una circunferencia situada apropiadamente sobre los patrones, en intervalos regulares de tiempo. Este sencillo método ha permitido obtener diagramas espacio-temporales, que proporcionan información sobre los distintos tipos de dinámica presentes en el sistema.

Esta separación de la variable azimutal, permite dar una interpretación cualitativa a las distintas dinámicas basándose únicamente en argumentos de simetría. Supongamos que las variaciones de intensidad en la circunferencia de toma de datos están dadas por una modulación periódica de longitud de onda λ . La periodicidad de las condiciones de contorno impone que λ sea un submúltiplo de la longitud L de la circunferencia. Por simplicidad, consideraremos que la línea tiene el diámetro máximo del recipiente D : $L = n\lambda = \pi D = \pi\Gamma d$, donde n es un número entero y d el espesor de la capa de fluido. Adimensionalizando λ con d , se obtiene $\lambda = \pi\Gamma/n$, esto es, $k_n = 2n/\Gamma$. Para conseguir el número de onda de la estructura hexagonal k_6 , basta con sustituir $n = 6$ (para el heptágono $n = 7$, etc.).

Al trazar la curva ϵ versus k , que tendrá típicamente una curvatura positiva, su mínimo dará el valor del número de onda crítico k_c . Si dicho valor no coincide con el de uno de los polígonos, el sistema adoptará una de las dos estructuras poligonales más próximas. Esta situación, que surge de las simetrías del sistema y de la consiguiente discretización del problema, da lugar a dinámicas del tipo de las observadas. Por ejemplo, supongamos que $k_5 < k_c < k_6$ y que la estructura presente es un hexágono. El sistema puede intentar pasar a pentágono uniendo dos de los vértices (eliminando así uno de los lados y la celda convectiva asociada). Si para ello una de las líneas frías que unen los vértices con la pared lateral se aproxima a otra, la contigua que la “ve.” alejarse puede tratar de aproximarse a ella para mantener la distancia que las separa. Cuando el movimiento se transmite sucesivamente a las líneas frías contiguas, se consigue que la estructura gire. En otros casos, dos vértices conseguirán unirse consumando la transición a pentágono. Esta situación se verá con mayor detalle en el apartado de transiciones entre patrones poligonales.

Rotaciones

Utilizando aceite de 100 cSt, observamos movimiento convectivo a partir de $\Delta T = 2,6\text{K}$. Daremos los valores de supercriticalidad tomando este valor como ΔT_c . Cerca del umbral, se observa la estructura consistente en dos rollos convectivos concéntricos, que se parte para formar un patrón pentagonal. El pentágono puede rotar e incluso dar paso a un hexágono.

Para valores de ΔT ligeramente superiores, observamos una rotación en las estructuras convectivas hexagonal y heptagonal. Dicha rotación se pone de manifiesto en un diagrama espacio-temporal a través de la inclinación de las líneas brillantes. Este tipo de dinámica puede describirse como el resultado de la ruptura de la simetría impuesta por el contorno, siempre que no haya ninguna simetría remanente en el contorno que fije la posición de la estructura. Este mecanismo, descrito en la referencia [66] para condiciones experimentales similares a las de nuestro problema pero en menor relación de aspecto, explica la aparición de ondas viajeras o rotatorias. Vimos en el capítulo anterior que este tipo de soluciones aparecen también en sistemas físicos distintos que presentan las mismas simetrías (láseres, convección con rotación, convección en fluidos binarios,...).

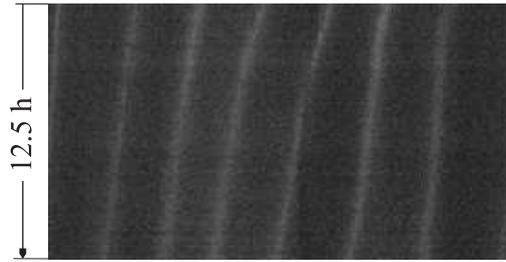


Figura 5.1: Diagrama espacio-temporal tomado para $\epsilon=0.7$. La velocidad de rotación de la estructura es del orden de 2° por hora.

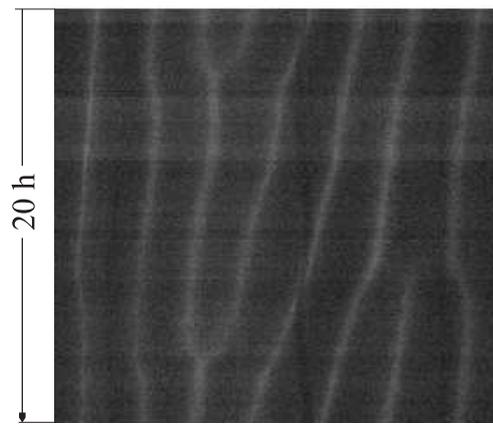


Figura 5.2: Coexistencia de rotación y transición entre polígonos. Serie temporal grabada para $\epsilon=0.7$.

Comprobamos en toda una serie de medidas entre $\epsilon=0.2$ y 0.9 , que la velocidad de rotación no es uniforme para ϵ fijo, ni para las distintas zonas de la estructura. Dicha velocidad no superó en ningún caso los 4° por hora. Por otra parte, se observó en ese rango de ϵ que el sentido de rotación no es siempre el mismo, con lo que no puede ser debido a una inclinación no detectada del recipiente. De hecho, se llegó a observar en un mismo diagrama espacio-temporal (obtenido para $\epsilon=0.4$) cambios en el sentido de giro de la estructura. Esta dinámica recuerda la solución de *Direction Reversing Traveling Wave* que se puede obtener en sistemas con simetría $O(2)$ a partir de una bifurcación secundaria [63].

En figura 5.1 se muestra un ejemplo en que la velocidad de *rotación* es del orden de 2° por hora. Este tipo de comportamiento ya había sido observado por H. Mancini [55], que en su figura 3.17 muestra distintas etapas en el giro del hexágono, junto con la gráfica de la evolución del ángulo de giro en función del tiempo.

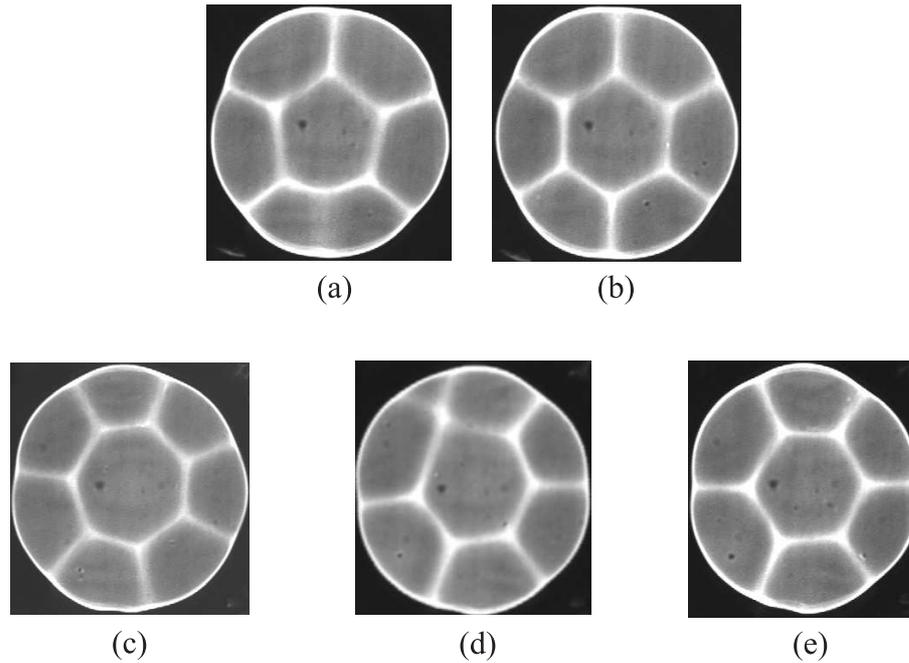


Figura 5.3: Transiciones entre polígonos: (a),(b) Paso de pentágono a hexágono: un lado aumenta y se curva hasta dividirse en dos. (c),(d),(e) Paso de heptágono a hexágono: dos lados se unen. El proceso comienza en la parte central y se extiende hasta el contorno del recipiente.

Transiciones entre patrones poligonales

Al aumentar ΔT , la dinámica de rotación aparece junto con transiciones entre distintas estructuras poligonales, o queda reemplazada por éstas. En la figura 5.2 se muestra un ejemplo en que las transiciones entre polígonos incluyen una rotación del orden de 2° por hora, conseguido con aceite de 100 cSt.

La secuencia de estructuras mostrada en la figura 5.3 ilustra el proceso de cambio del número de lados. El de formación de una estructura con número mayor de lados se muestra en las figuras 5.3(a) y (b): uno de los lados del polígono aumenta de tamaño y se curva hacia el exterior deformando la figura. Después de algunos minutos, surge una nueva línea fría dividiendo en dos partes la zona caliente externa que previamente había aumentado de tamaño. En un tiempo del orden de 30 minutos desde el comienzo del proceso, la nueva línea fría se ve tan brillante como las demás en la ombroscopía. El lado alargado se ha partido en dos, formando una nueva figura poligonal que poco a poco se va haciendo más regular.

Cuando el número de lados disminuye [Fig. 5.3(c),(d) y (e)], uno de los lados del polígono se contrae hasta que los dos vértices asociados a él colapsan en uno solo. Las dos líneas frías que parten desde dichos vértices hacia la pared del recipiente se van uniendo, formando una única línea en un proceso que se inicia en el nuevo vértice formado y finaliza en la zona más próxima a la pared.

El aumento del número de lados de los polígonos (esto es, las transiciones entre ellos) puede interpretarse desde un punto de vista puramente geométrico. Hemos observado que el tamaño del hexágono (en general de cualquier polígono), disminuye con la supercriticalidad. Dicho tamaño puede cuantificarse utilizando un “número de onda equivalente” k definido a partir del perímetro p de la estructura [27]: $k = \frac{8\pi d}{p}$, donde d es el espesor de la capa de fluido, utilizado para adimensionalizar las longitudes. Esta definición no es directamente aplicable a los restantes polígonos, ya que con ellos no se puede formar una red regular extensa. Hemos medido valores de k del hexágono entre 2.17 y 2.4 (próximos al 2.1 predicho por Nield [6] para relación de aspecto infinita), en el rango de supercriticalidades de 2.3 a 5. El aumento de k con ϵ concuerda con el observado para gran relación de aspecto una vez superada la región más próxima al umbral [34, 67].

Supongamos que para unos ciertos valores de Γ y ϵ , nuestro sistema forma una estructura hexagonal estable con un determinado valor de k . Si aumentamos ϵ , el hexágono disminuirá pasando de este valor de k a otro menos favorable para la estabilidad de la estructura considerada. En estas condiciones, el sistema puede optar por dar paso a una estructura poligonal con mayor número de lados. En este cambio, se comprueba que el perímetro de la estructura aumenta, lo que equivaldría a una disminución de k en una red regular. Durante el proceso de formación de la nueva estructura, los puntos de subida de fluido próximos a la pared lateral se ven desplazados ligeramente hacia ella, y sus posiciones se reajustan para dar cabida al nuevo punto caliente de la estructura. Hemos comprobado que los patrones poligonales no permanecen estables indefinidamente. Las alternancias entre ellos pueden ser debidas a que los valores de Γ , d y ϵ no son los más adecuados para que se establezca una u otra estructura, sino intermedios a éstos, con lo que pequeñas perturbaciones pueden dar el paso de una estructura a otra.

Otra solución que puede adoptar el sistema ante la disminución de tamaño de la estructura, es el desplazamiento de ésta hacia un lado para dar cabida a polígonos adyacentes, formando el inicio de una red poligonal extensa. Estamos interesados en el primer caso, las transiciones entre los distintos polígonos, que analizaremos a partir de los diagramas espacio-temporales obtenidos.

En los diagramas espacio-temporales, se observan períodos de tiempo en que la estructura presente permanece estable (normalmente del orden de horas, días en casos muy estables) seguidos de un intervalo de tiempo en que la separación entre líneas se reajusta hasta dar la del nuevo patrón (del orden de media hora). Como tiempo de referencia con el que comparar el de esta dinámica, contamos con el tiempo de difusión térmica en la dirección vertical. Este tiempo es $t_{\theta}=11.87$ minutos para el aceite de 350 cSt, 12.57 minutos para el de 100 cSt.

Los datos que presentamos a continuación, fueron tomados usando aceite de silicona de 350 cSt (el uso de uno u otro aceite no cambia cualitativamente ni la formación de patrones ni su dinámica). Aumentamos la diferencia de temperatura entre el fondo y la superficie mediante pequeños escalones de voltaje, aplicados a la resistencia eléctrica del fondo del recipiente. De este modo, aumentamos ϵ en pasos discretos cubriendo el rango

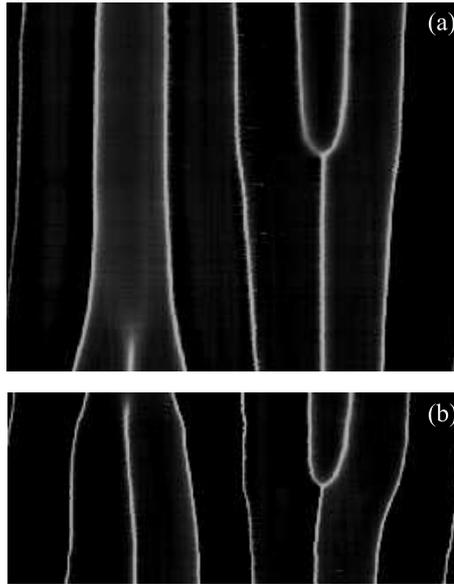


Figura 5.4: Transiciones entre polígonos: (a) Paso de heptágono a hexágono, y viceversa. Serie temporal de 7 horas tomada para $\epsilon=1.6$. (b) Paso de heptágono a octógono, y vuelta a heptágono ($\epsilon=2.1$). Serie temporal de 5 horas y 27 minutos.

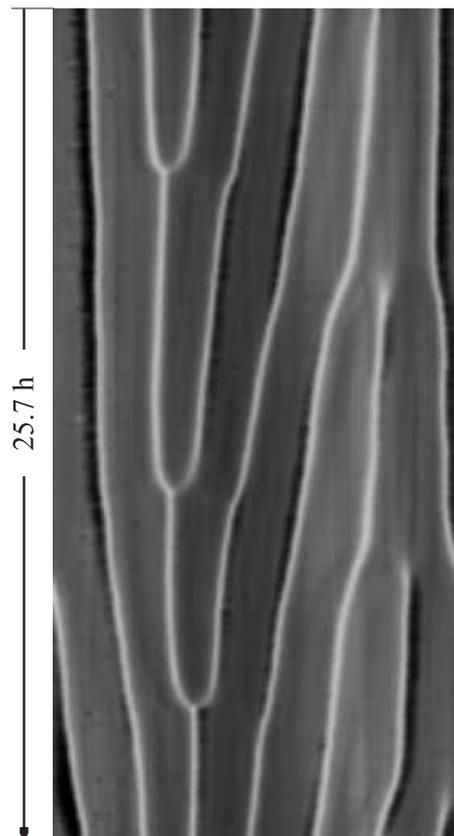


Figura 5.5: Serie temporal obtenida en la bajada, para $\epsilon=1.2$.

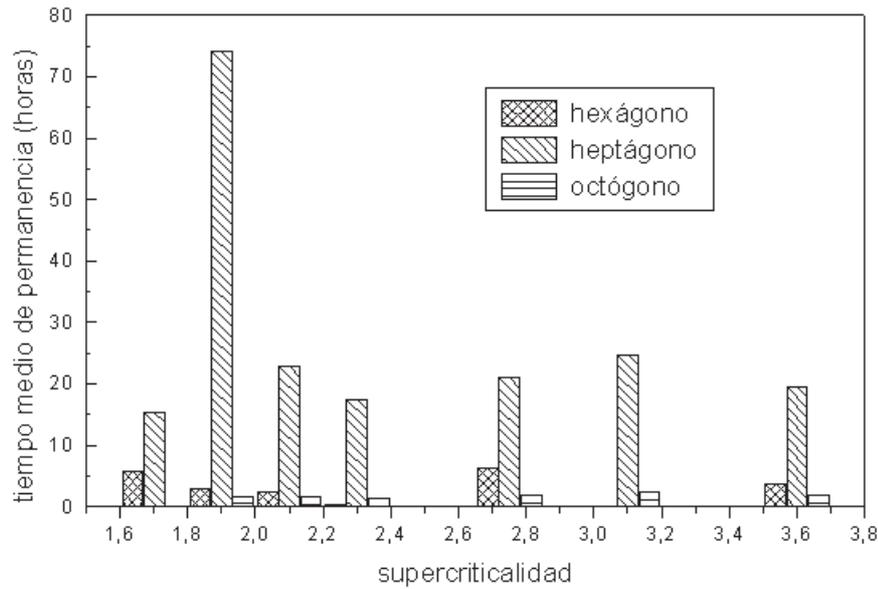


Figura 5.6: Duración media de las estructuras poligonales en alternancia, representada frente a la supercriticalidad. Para cada valor de ϵ , se representan las barras asociadas a las estructuras presentes. La correspondiente al heptágono está centrada en el valor de ϵ considerado.

desde $\epsilon=1.7$ hasta $\epsilon=3.6$. La bajada se realizó únicamente en tres pasos, desde $\epsilon = 3,6$ hasta $\epsilon = 1,2$.

En la subida, a partir de $\epsilon=1.7$ se observaron sólo transiciones de dos tipos: hexágono-heptágono, y heptágono-octógono. En el diagrama espacio-temporal de Fig. 5.4(a), se observan alternancias heptágono-hexágono, en concreto dos transiciones separadas por 3.5 horas aproximadamente. En la figura 5.4(b), el octógono permanece durante un tiempo del orden de 2 horas antes de dar paso al patrón heptagonal.

En algunos casos, se observó que la formación y desaparición de lados dentro de una misma serie temporal se produce en dos zonas concretas de la estructura, dando lugar a lo que podría denominarse “fuentes “sumidero”. Esta descripción puede aplicarse a la figura 5.5.

Los datos tomados para los distintos valores de ϵ se muestran en los gráficos de las figuras 5.6 y 5.7. En la primera de ellas, se representa el tiempo medio de permanencia de cada estructura (media de los tiempos en que está presente antes de dar paso a otro patrón) para los distintos valores de supercriticalidad. En general, la estabilidad de los polígonos con mayor número de lados aumenta con la supercriticalidad, a pesar de que la estructura de mayor tiempo medio de duración para todos los valores de ϵ considerados es la heptagonal. El del octógono es bastante reducido (no superó en ningún caso las 4 horas), y el de la estructura hexagonal sufrió una disminución drástica a partir del segundo valor de ϵ y llegó a desaparecer, pero reapareció para dos valores de ϵ superiores. El tiempo total de medida para cada ϵ no fue el mismo: varió entre 132 y 159 horas.

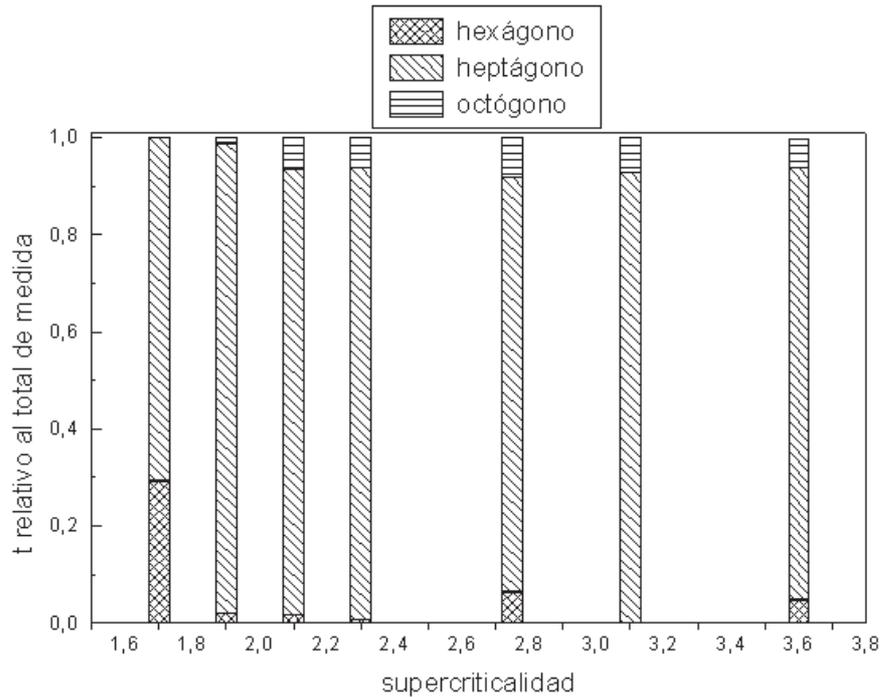


Figura 5.7: Tiempo relativo de permanencia de cada estructura respecto al tiempo total de medida.

En la figura 5.7 se representan los tiempos relativos de permanencia de cada estructura frente al tiempo total de medida (suma de los tiempos en que está presente una estructura, normalizada al tiempo total) para el valor de ϵ considerado. Esta normalización permite comparar la persistencia de cada estructura frente a las demás para distintos valores de ϵ . El hexágono está presente en prácticamente todo el rango, aunque en menor medida para valores mayores de ϵ (de hecho, no fue observado para $\epsilon=3.1$). El octógono no apareció hasta $\epsilon=1.9$, supercriticalidad para la que el heptágono estuvo presente durante más de 148 horas.

Dinámicas presentes para valores de ϵ mayores

En la figura 5.8, mostramos un diagrama espacio-temporal obtenido con aceite de 100 cSt para $\epsilon=1.4$. En él se observa un nuevo tipo de comportamiento temporal, que no está presente justo sobre el umbral convectivo. Podríamos denominarlo *partición en dominios espaciales* con distinta dinámica: una parte del patrón (la correspondiente a la parte izquierda de la figura) permanece estable, mientras que en la derecha, la aparición y desaparición de lados fuerza cambios de orientación en las líneas del diagrama temporal y defectos.

Para valores mayores de ϵ , la dinámica del sistema gana en complejidad, con saltos entre estructuras cuyo número de lados difiere en más de una unidad en algunos casos.

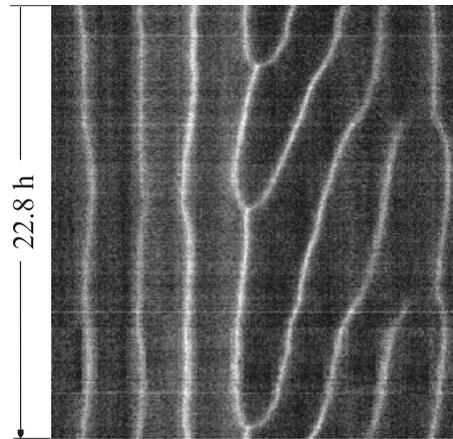


Figura 5.8: Transiciones entre polígonos en una zona del patrón mientras la otra permanece inalterada. Serie temporal obtenida para $\epsilon=1.4$.

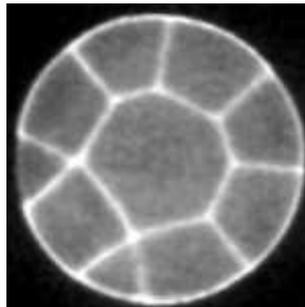


Figura 5.9: Ombroscopía de un heptágono muy irregular en transición, encontrada para $\epsilon=2.9$.

La figura 5.9 puede servir como ejemplo de estructura irregular. Fue observada de nuevo con aceite de 100 cSt, para $\epsilon=2.9$.

5.1.2. Dinámicas similares obtenidas en un sistema óptico

Volvamos a los trabajos de Ramazza y colaboradores [40] y de Pampaloni y colaboradores [41] introducidos en el capítulo anterior. En ellos, se describen bifurcaciones secundarias que conducen a comportamientos dinámicos de los patrones estacionarios descritos previamente. Modificando de forma leve alguno de los parámetros de control (alineamiento, diámetro de la apertura impuesta, frecuencia y/o amplitud del voltaje aplicado a la *LCLV*), obtuvieron tres tipos de comportamientos temporales distintos: oscilación o rotación de un patrón, y alternancias entre dos patrones correspondientes a dos grupos D_m consecutivos.

Verificaron que un pequeño aumento de la excitación puede ser suficiente para tener por encima del umbral más de una solución, lo que puede conducir a la alternancia entre dos especies que compiten, o a inducir una frecuencia temporal que se manifieste en forma de una rotación o de una oscilación de un patrón. En concreto, observaron:

- Patrones triangulares oscilando coherentemente en el tiempo ($m=3$).
- Patrones de $m=3$, 5 y 6 rotando. En ellos, registraron la intensidad de la luz sobre una circunferencia en función del tiempo para obtener diagramas espacio-temporales.
- Alternancias entre $m=5$ y 6, y entre $m=6$ y 7. Ajustando convenientemente la amplitud del voltaje, alcanzaron un régimen de *alternancia periódica* entre dos patrones. Este tipo de alternancia periódica ya había sido observado por Arechi y colaboradores [70], y había sido descrita en términos de una órbita heteroclina que conecta los dos estados en [71].

A pesar de que en nuestro experimento no hemos observado alternancias periódicas, resulta patente la similaridad entre los resultados obtenidos con la *LCLV* y en nuestro experimento en convección de fluidos, cuando únicamente coinciden en el tipo de simetrías del sistema.

5.2. Relaciones de tamaño mayores

En el capítulo anterior, se han descrito los distintos tipos de estructuras formadas en el sistema láser (anillos sencillos o dobles; con lóbulos, continuos, o mezcla de ambas situaciones) y la interpretación que se da a este tipo de estructuras en otros trabajos (superposiciones de ondas azimutales que viajan en sentidos opuestos, con amplitudes y fases iguales o distintas). Esta sección se centra en los aspectos dinámicos asociados a dichos patrones.

El estudio de la dinámica temporal de las estructuras se ha abordado registrando la evolución temporal de la intensidad de luz en un punto de ellas, con la ayuda de un detector

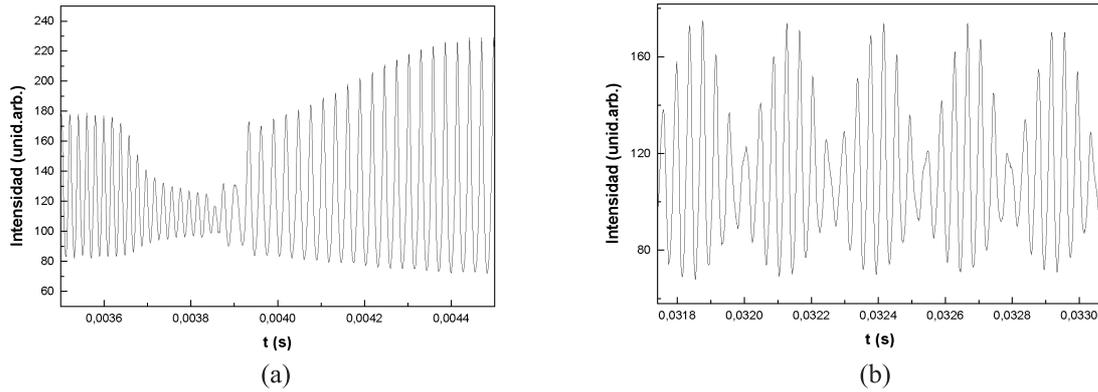


Figura 5.10: Comportamientos temporales ($I = 18$ mA, $p = 23$ mbar). (a) Cambio de frecuencia de oscilación, de 51.4 a 35.6 kHz. (b) Modulación de amplitud que resulta de la combinación de dos frecuencias próximas, 23 y 28 kHz.

rápido y un osciloscopio. Distinguiremos entre dos casos, correspondientes a valores del parámetro de control en que se obtienen estructuras estables, y a los que por el contrario dan una situación de competición entre estructuras. En el primer caso, se comprueba que para los valores del parámetro de control en que una estructura es estable, las medidas conducen sea a una intensidad independiente del tiempo (ausencia de oscilaciones), sea a oscilaciones regulares con una frecuencia comprendida entre 20 y 200 kHz. En los estudios de D'Angelo y Huyet [43, 47], ya se hizo referencia a la existencia de este tipo de soluciones oscilatorias y no oscilatorias. Las primeras se asociaron a bifurcaciones secundarias tipo Hopf.

La dinámica temporal se complica durante la coexistencia de dos (o más) estructuras, situación posible para los valores de parámetro de control en que se da el paso de una estructura a otra. En los casos más sencillos, la transición de un patrón a otro puede reflejarse únicamente en un cambio de frecuencia de oscilación [Fig. 5.10(a)], o en un paso de oscilación a ausencia de oscilación. También puede observarse una modulación en amplitud de la intensidad [Fig. 5.10(b)]. Este tipo de oscilación modulada ha sido descrito previamente, por ejemplo en el trabajo de D'Angelo y colaboradores [43], o en el de López y colaboradores [44]. Sin embargo, no todas las transiciones presentan este tipo de comportamiento: con bastante frecuencia se encuentran ventanas de comportamiento irregular dentro de un régimen oscilatorio perfectamente regular. Presentamos a continuación resultados que exhiben este tipo de comportamiento [54], que no ha sido analizado en trabajos de otros autores.

En la figura 5.11, se muestra la evolución temporal de la intensidad de salida durante la coexistencia de más de dos estructuras de un anillo. En estas condiciones, se observó en la pantalla térmica una sucesión rápida de estructuras de un único anillo ($p = 0$) con distinto número de lóbulos (l distinto). La gráfica de la figura 5.11(a) muestra los mínimos locales de intensidad en un punto del patrón en función del tiempo (en ésta y en las restantes gráficas de intensidad en función del tiempo, el eje y está invertido, esto es, los mínimos de

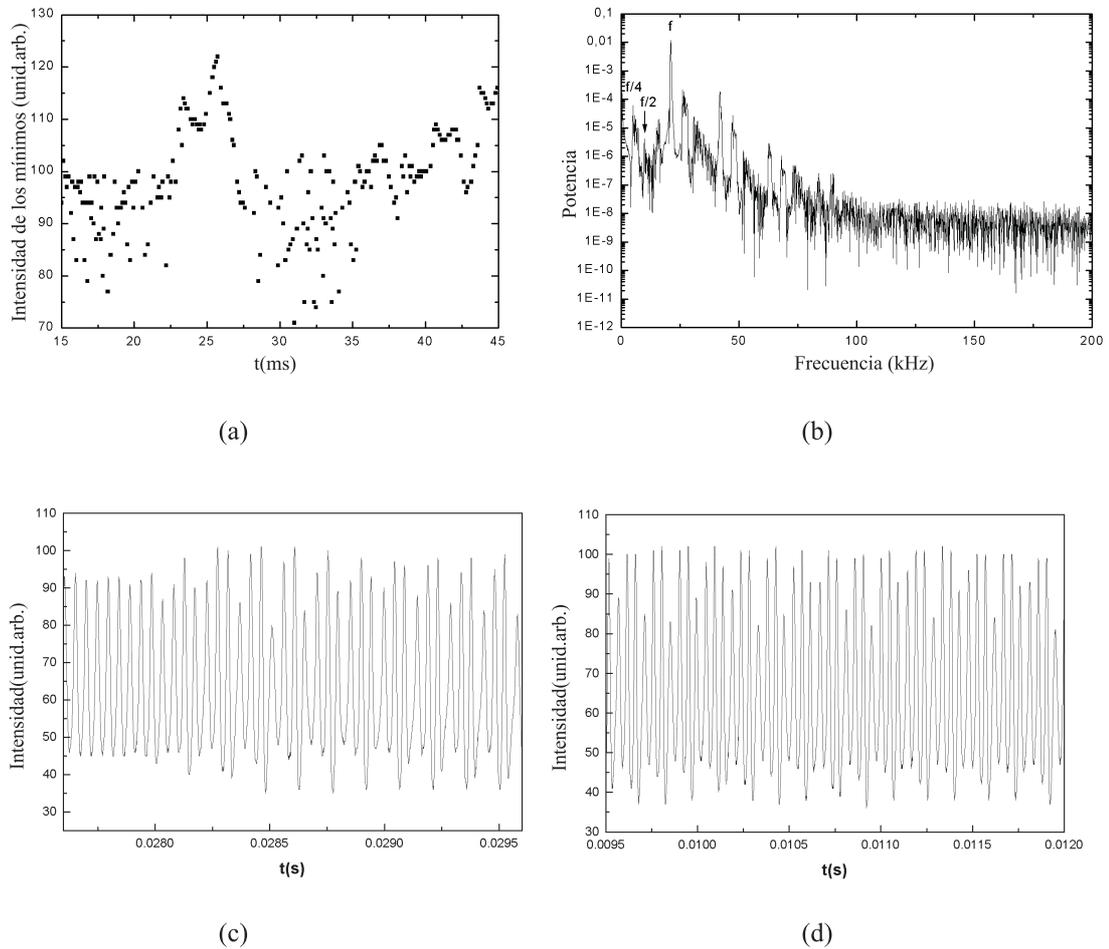


Figura 5.11: Comportamiento temporal durante la coexistencia de más de dos estructuras de un único anillo. (a) Registro estroboscópico de la señal temporal, que muestra una alternancia entre distintos tipos de dinámica. (b) Espectro de potencias de la evolución temporal de la intensidad. (c) y (d) Dos secuencias de la dinámica temporal: paso de oscilación regular a un período 4, y oscilaciones irregulares.

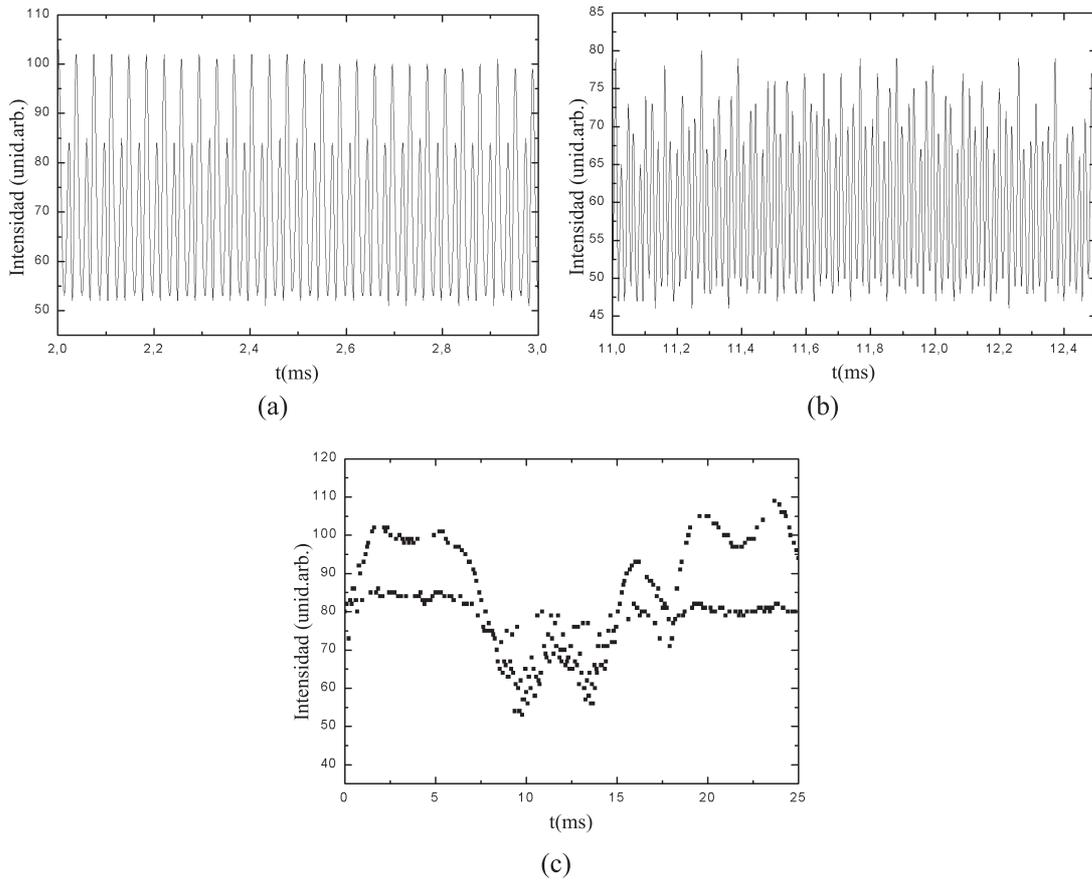


Figura 5.12: Comportamiento temporal durante la coexistencia del anillo de 24 lóbulos y el doble de 34. (a) Régimen de período 2. (b) Oscilaciones caóticas. (c) Alternancia entre los distintos regímenes vista a través de un registro estroboscópico de la intensidad en un punto del patrón.

la curva se corresponden con las intensidades máximas). En este tipo de representación, que no es sino un registro estroboscópico, se localizan fácilmente las bifurcaciones que dan paso a ventanas de comportamiento irregular. Así, en la figura 5.11(a) se observa un régimen de período uno en torno a $t=0.025$ s, encerrado entre zonas de comportamiento irregular en que aparecen subarmónicos de la frecuencia fundamental ($f \approx 21$ kHz). La figura 5.11(b) da el espectro de potencias de la señal, que muestra la frecuencia fundamental f junto con distintos subarmónicos, entre los que se distinguen claramente $f/4$ y $3f/4$. Las figuras 5.11(c) y (d) son dos secuencias distintas de la evolución temporal de la intensidad. La primera muestra el paso de una oscilación regular al inicio de un régimen irregular, y la segunda oscilaciones irregulares. Esta figura y las sucesivas (salvo que se indique explícitamente lo contrario), se obtuvieron para $I = 18$ mA y $p = 23$ mbar.

Durante las transiciones y coexistencia de anillos sencillos y dobles, se observa esencialmente el mismo tipo de dinámica, con todas las variantes vistas anteriormente. Hemos encontrado regímenes temporales altamente irregulares en estos casos.

En la figura 5.12 mostramos registros temporales tomados durante la coexistencia del doble anillo de 34 lóbulos y el sencillo de 24. En la figura 5.12(a) se presenta una duplicación de período, que fue reemplazada por un régimen de comportamiento caótico [Fig. 5.12(b)]. Las alternancias entre estos tipos de comportamiento se muestran en la figura 5.12(c), a través de la representación de los mínimos locales de intensidad. Es interesante la figura 5.13, en que se muestran alternancias entre período 6 y período 8 [Fig. 5.13(a)] obtenidas en las mismas condiciones. Mediante una transformada rápida de Fourier, obtuvimos el espectro de potencias del registro temporal: en él [Fig. 5.13(b)], se distinguen la frecuencia fundamental ($f \simeq 53$ kHz), sus múltiplos, y algunos subarmónicos, entre los que destacan $f/2$, $f/3$ y distintas combinaciones suyas. Con el subarmónico $f/3$ se ve que el sistema ha entrado en una ventana de intermitencia a partir de un régimen caótico.

Una evolución temporal irregular puede encontrarse también en estructuras más complejas, como por ejemplo el doble anillo con tres zonas más marcadas mostrado en la figura 5.14(a). La transformada de Fourier de la evolución temporal de la intensidad en un punto de esta estructura aparece en la figura 5.14(b). En ella se reconocen la frecuencia fundamental ($f \approx 38.8$ kHz) junto con el subarmónico $f/5$ y distintos múltiplos. La alternancia entre oscilaciones regulares e irregulares se aprecia claramente en el registro estroboscópico de los mínimos de la curva temporal de la intensidad [Fig. 5.14(c)].

5.2.1. Selección y estabilización de patrones

En el capítulo 2, se introdujo el método de estabilización de estados inestables propuesto por Wang *et al.* [48], que ha sido utilizado con éxito en láseres de CO_2 para seleccionar y estabilizar patrones hexagonales [72]. Implementando este método, hemos comprobado que basta con situar un hilo metálico de 50 ó 100 μm de diámetro en una posición diametral dentro de la cavidad óptica, para seleccionar las estructuras sin componente continua

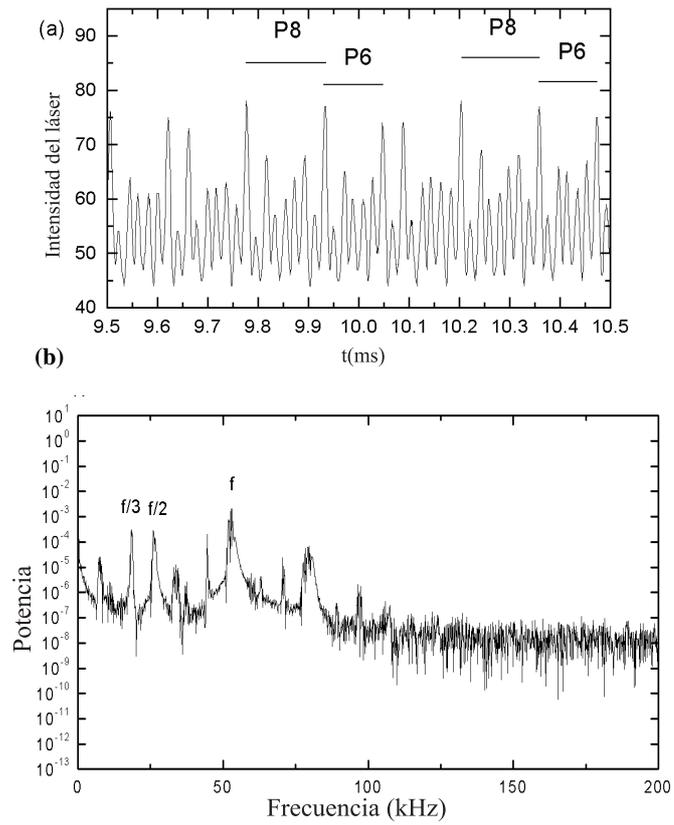


Figura 5.13: Comportamiento temporal durante la coexistencia del anillo de 24 lóbulos y el doble de 34. (a) Comportamiento temporal de la intensidad: alternancia entre períodos 6 y 8. (b) Espectro de potencias de la evolución temporal de la intensidad. En él se aprecia claramente la frecuencia $f/3$ junto a otros subarmónicos de la frecuencia fundamental f .

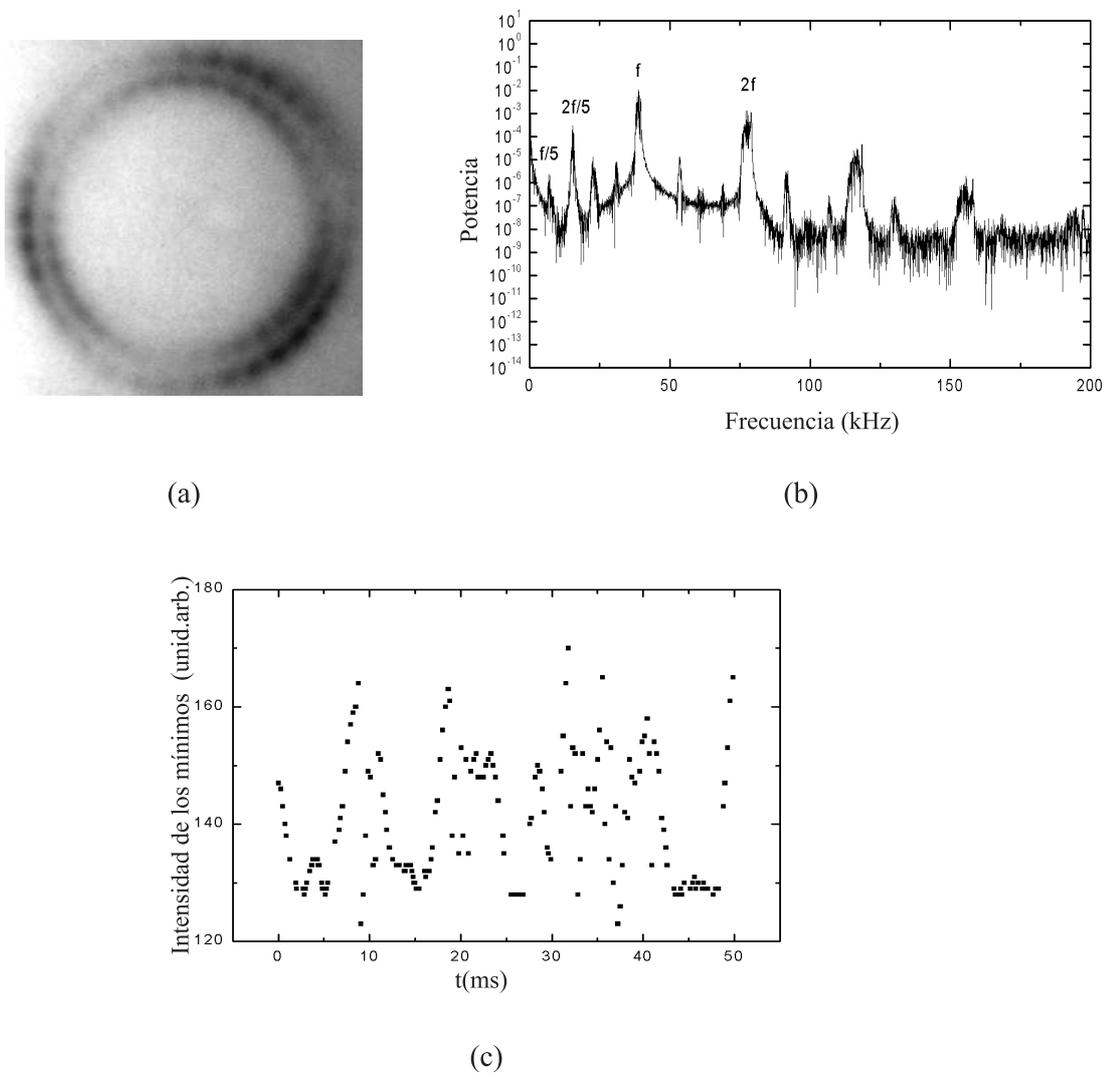


Figura 5.14: Comportamiento temporal irregular. (a) Patrón observado con tres zonas más marcadas. (b) Transformada de Fourier de la evolución temporal. (c) Alternancia entre los distintos regímenes vista mediante un registro estroboscópico de la intensidad en un punto del patrón.

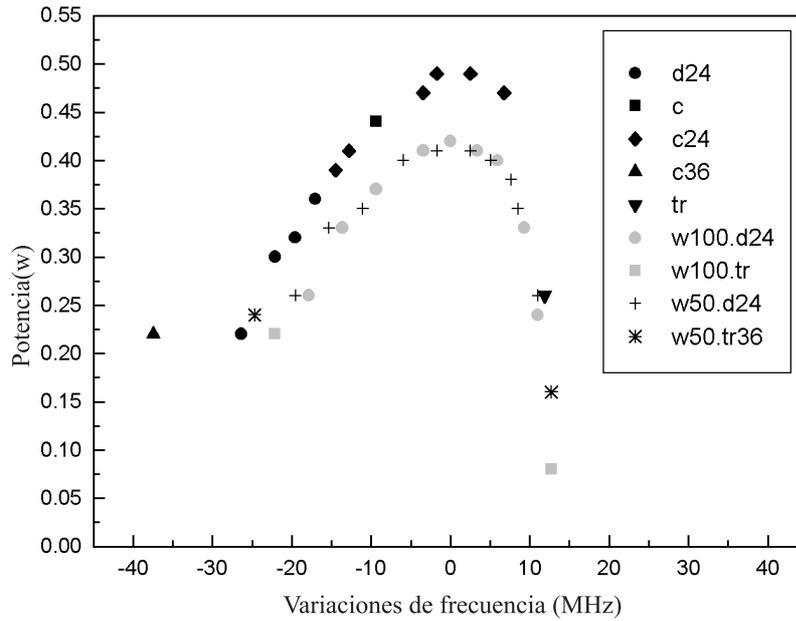


Figura 5.15: Curvas de estabilidad obtenidas para una corriente de 14.5 mA, a una presión media de 25.5 mbar. Se ha tomado el origen de las frecuencias de la cavidad en el máximo de la curva. Se representan las estructuras para los valores de potencia en que se han observado: las figuras negras representan estructuras obtenidas sin perturbaciones espaciales, las grises se obtuvieron con un hilo de 100 micras, y las restantes (+ y *) con uno de 50 micras. Notación: $(wx)l(n)$ = figura obtenida con hilo de x micras, l puede ser d = discreta, c = continua, tr = transiciones de una estructura a otra. n = número de lóbulos del patrón, cn = n lóbulos superimpuestos sobre un fondo continuo.

(las formadas únicamente por lóbulos), y eliminar un posible comportamiento oscilante, sea regular, irregular o incluso caótico.

Colocamos un hilo metálico en una posición diametral dentro de la cavidad óptica (a unos 11 cm del espejo de salida), y nos centramos en la estructura consistente en 24 lóbulos para comprobar el efecto del filtrado. El resultado puede observarse en la figura 5.15, en la que aparecen tres gráficas superpuestas. La primera muestra la curva de estabilidad en las proximidades de dicha estructura, bajo ligeras variaciones de la longitud de la cavidad. Las otras dos, muestran la misma curva tras introducir dos perturbaciones espaciales distintas: hilos de 100 y 50 μm respectivamente. Con estos filtros espaciales, se logra eliminar cualquier componente continua en las estructuras, así como las oscilaciones temporales de la intensidad. De esta forma, se impide la formación de regímenes temporales irregulares, incluso en situaciones de coexistencia de estructuras.

Por otra parte, se comprueba en la figura 5.15 que la región de estabilidad de la estructura en que nos hemos centrado se ve ampliada al introducir los hilos, ocupando las zonas en que previamente aparecían la estructura continua o la mixta de igual diámetro.

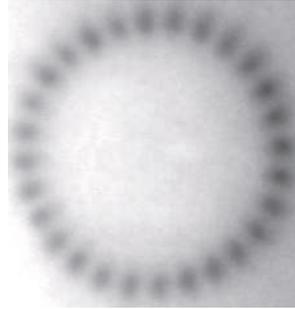


Figura 5.16: Patrón de 28 lóbulos obtenido introduciendo una máscara de 7 hilos metálicos de 50 micras de diámetro en la cavidad óptica.

La estructura de 24 lóbulos sin componente continua no desaparece hasta que se alcanza la zona de estabilidad de estructuras con distinto número de lóbulos (y por tanto distinto diámetro).

Este método perturbativo de estabilización de patrones, produce “efectos secundarios”: se introducen pérdidas en la cavidad que, en las circunstancias más favorables (cuando el hilo está bien centrado), se traducen en pérdidas de potencia no superiores al 10%. Además, se produce un ligero desplazamiento de la posición del máximo de la curva (no más de 10 MHz) respecto a su localización sin hilo. En la gráfica 5.15 hemos evitado este último efecto desplazando las curvas hasta hacer coincidir los máximos (para así poder comparar directamente las regiones de estabilidad).

Es importante resaltar que la presencia de esta pequeña perturbación espacial no da lugar a nuevas estructuras, ni siquiera a versiones modificadas de las anteriores: se obtienen las mismas estructuras de lóbulos observadas previamente.

Si en vez de utilizar como filtro espacial un único hilo metálico se introducen máscaras con varios hilos equiespaciados (siempre en posiciones diametrales), el efecto es análogo. Evidentemente, con el número de hilos aumentan las pérdidas, y se llega a un punto en que las pérdidas superan a la ganancia impidiendo el efecto láser. Este tipo de máscaras permiten la selección de patrones más específicos: aquéllos cuyo número de lóbulos es un múltiplo del número de obstáculos radiales. Así por ejemplo, con una máscara formada por 6 diámetros equiespaciados, se encuentran estructuras con 24, 30 ó 36 lóbulos, mientras que con otra de 7 diámetros sólo será posible la selección del patrón de 28 lóbulos, tal y como se muestra en la figura 5.16 (recordemos que en las condiciones de nuestro experimento, se observan patrones de 22 a 36 lóbulos).

Simulación numérica del efecto del filtrado

Utilizando el algoritmo de Fox y Li [23] en la simulación del campo eléctrico dentro de la cavidad, se puede reproducir el efecto de un hilo metálico en la selección de pa-

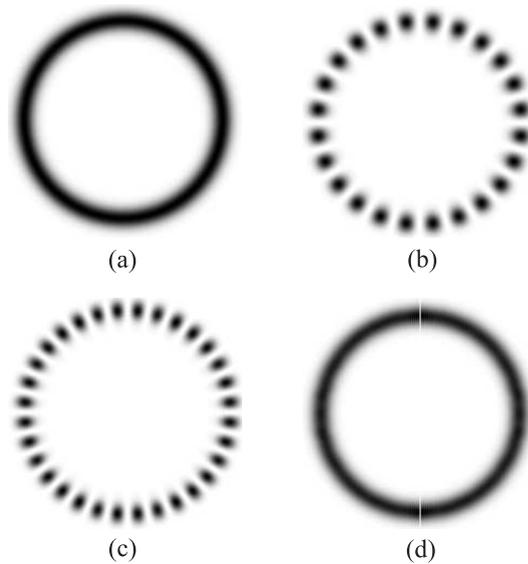


Figura 5.17: Patrones obtenidos utilizando un programa de simulación basado en el algoritmo de Fox y Li [23]. Se puede encontrar la explicación de las condiciones en que se obtuvo cada estructura en el texto.

trones sin componente continua. En esta simulación, se han utilizado los valores de los parámetros geométricos del experimento, y el plano transversal se ha representado con una matriz cuadrada de 512×512 puntos (cada punto de $100 \mu\text{m}$ de lado). Se ha despreciado el comportamiento dinámico del medio activo reemplazándolo por un factor de amplificación constante. Esta aproximación no permite estudiar el efecto de la introducción de pequeñas variaciones en la longitud de la cavidad. Como resultado, se hace necesario elegir apropiadamente las distribuciones iniciales de intensidad y fase para seleccionar distintos modos de la cavidad.

Si tomamos como condiciones iniciales un plano de amplitud y fase uniformes, tras pasar 500 veces por la cavidad se obtiene la imagen 5.17(a): se encuentra el patrón continuo con amplitud y fase uniformes, y unas pérdidas de la cavidad (esto es, el autovalor del modo correspondiente) estimadas en un 0.005% .

El resultado se modifica al cambiar la fase inicial uniforme por otra alternada entre los valores 0 y π en un número par de sectores angulares iguales: Si se eligen 24 sectores, se obtiene un patrón de 24 lóbulos [véase la figura 5.17(b)], en que las pérdidas son del 0.12% . Si en cambio se parte de 32 particiones angulares, se llega a la estructura de 32 lóbulos de la figura 5.17(c). En este caso, las pérdidas son aún mayores (del 0.26%). Queda patente con estos y otros casos que las pérdidas menores están asociadas al patrón continuo, tal y como ocurre experimentalmente. Las pérdidas obtenidas son muy pequeñas debido a que se han despreciado gran parte de los factores que introducen pérdidas en un experimento; por ejemplo, se ha supuesto que los espejos son totalmente reflectantes. Esta aproximación no altera cualitativamente los resultados, ya que las pérdidas no consideradas afectan por igual a todo el plano transversal de la cavidad, y no contribuyen a la selección de modos.

Para incluir el efecto del hilo metálico, se añadió a la simulación un obstáculo de un punto de anchura ($100 \mu\text{m}$). Se comprobó que la distancia al espejo de salida de este obstáculo no altera apreciablemente los resultados. Repitiendo las experiencias de antes, se encontró en el primer caso (amplitud y fase uniformes) la figura mostrada en 5.17(d). No es exactamente el patrón continuo: está dividido en dos partes iguales. Además, las pérdidas en esta nueva estructura han aumentado considerablemente, hasta un 0.74%. Por el contrario, los patrones con lóbulos no se vieron alterados por la presencia del hilo: se llegó a las mismas figuras y con las mismas pérdidas. De este modo queda patente que las estructuras sin componente continua pasan a ser las más favorables energéticamente al introducir un alambre en la cavidad.

A pesar de que este método no permite una comparación cuantitativa con los resultados experimentales, concuerda con ellos en que la introducción del hilo conduce a la selección de patrones no continuos.

Capítulo 6

Simulación numérica de la dinámica en el láser

En el apartado de relaciones de aspecto mayores de los capítulos 5 y 6, se han expuesto resultados obtenidos sobre formación de estructuras y dinámica temporal en un láser de CO_2 . En el presente capítulo, se muestra un modelo sencillo que permite reproducir numéricamente estos resultados experimentales.

6.1. Modelo teórico

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell–Bloch, se ha buscado un modelo sencillo que reproduzca numéricamente los patrones observados y su dinámica temporal. Estas ecuaciones, junto con la descripción de los parámetros que involucran, pueden encontrarse en el apéndice. En el modelo, las ecuaciones deben incluir el término de gradiente espacial del campo eléctrico, ya que estamos interesados en la competición entre distintos modos transversales. Utilizaremos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\partial_t E - i\alpha \nabla^2 E &= -kE + gP \\ \partial_t P &= -\gamma_{\perp} P + gEN \\ \partial_t N &= -\gamma_{\parallel} (N - N_0) - \frac{g}{2}(E^* P + P^* E)\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde $\alpha = c^2/2\omega$, con c = velocidad de la luz en el vacío y ω = frecuencia angular. Se obtienen combinando las ecuaciones de Maxwell para el campo eléctrico con las de Bloch para el material activo (considerando la contribución principal de onda plana con frecuencia ω y sólo variaciones espacio-temporales residuales para E y P).

En lo que sigue, se asume que $\gamma_{\perp} \gg \gamma_{\parallel}$, k en un láser de CO_2 [68]. En estas condiciones, la evolución temporal de P es mucho más rápida que la de E y N , con lo que se

puede considerar que P varía para adaptarse “instantáneamente.^a las variaciones de las otras dos variables. Así, se supondrá válida la aproximación $\partial_t P \approx 0$, y se podrá eliminar adiabáticamente la segunda de las ecuaciones (6.1).

Por otra parte, hemos trabajado cerca del umbral (esto es, con intensidades próximas al valor umbral en que se inicia el efecto láser). Gracias a ello, se puede suponer que $\partial_t N \approx 0$ [13], tal y como se explica en el apéndice. En él, definiendo el campo de saturación E_{sat} , suponiendo que se trabaja con valores del campo eléctrico tales que $|E|^2 \ll |E_{sat}|^2$ y sustituyendo las expresiones de P y N , se llega a una única ecuación para E :

$$\partial_t E - i\alpha \nabla^2 E = -kE + \frac{g^2}{\gamma_\perp} \frac{N_0 E}{(1 + \frac{|E|^2}{|E_{sat}|^2})} \quad (6.2)$$

Basta con definir $k_1 = -k + (g^2/\gamma_\perp)N_0$, y $k_2 = g^2 N_0 / (\gamma_\perp |E_{sat}|^2)$, y hacer la aproximación $\frac{1}{1 + \frac{|E|^2}{|E_{sat}|^2}} \simeq 1 - \frac{|E|^2}{|E_{sat}|^2}$, para conseguir:

$$\partial_t E - i\alpha \nabla^2 E = k_1 E - k_2 |E|^2 E \quad (6.3)$$

Falta elegir una expresión para el campo eléctrico, que se va a suponer igual a la suma de todos los modos E_k compatibles con la simetría del sistema y con la distancia entre las frecuencias de los distintos modos. Se supondrá que cada modo queda constituido por la interacción de dos ondas azimutales que viajan en sentidos opuestos, esto es, dos modos transversales con momento angular opuesto. En adelante, se considerará descrito por una expresión de este tipo: $E_k = P_k(r) e^{i\omega t} (z_{k1} e^{il_k \theta} + z_{k2} e^{-il_k \theta})$, en la que se han desacoplado la parte radial $P_k(r)$, y la angular (entre paréntesis) de la expresión. La dependencia temporal está presente en las amplitudes de los modos (las z_{ij}). Se ha separado de ellas la exponencial $e^{i\omega t}$, que da cuenta de la frecuencia fundamental del campo eléctrico.

La notación utilizada es la usual: en coordenadas polares, $r =$ distancia al centro, $\theta =$ variable azimutal; l_k es el índice azimutal de la estructura (la mitad del número de lóbulos en el caso de estructuras no continuas), y las z dan la amplitud compleja de cada una de las ondas viajeras (variables complejas dependientes del tiempo).

Si se considera un caso sencillo en que sólo hay dos modos presentes, con distinto perfil radial e índice azimutal, la expresión resultante es:

$$E = P_1(r) e^{i\omega t} (z_{11} e^{il_1 \theta} + z_{12} e^{-il_1 \theta}) + P_2(r) e^{i\omega t} (z_{21} e^{il_2 \theta} + z_{22} e^{-il_2 \theta}). \quad (6.4)$$

Introduciendo esta expresión de E en la ecuación (6.3), operando y agrupando los términos con la misma resonancia angular, se obtienen cuatro ecuaciones para las amplitudes complejas de los modos:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{11} &= A_1 z_{11} - B_1 z_{11} (|z_{11}|^2 + 2|z_{12}|^2) - C_1 z_{11} (|z_{21}|^2 + |z_{22}|^2) - C_1 z_{22} z_{12}^* z_{21} \\ \dot{z}_{12} &= A_1 z_{12} - B_1 z_{12} (|z_{12}|^2 + 2|z_{11}|^2) - C_1 z_{12} (|z_{21}|^2 + |z_{22}|^2) - C_1 z_{22} z_{11}^* z_{21} \\ \dot{z}_{21} &= A_2 z_{21} - B_2 z_{21} (|z_{21}|^2 + 2|z_{22}|^2) - C_2 z_{21} (|z_{11}|^2 + |z_{12}|^2) - C_2 z_{12} z_{22}^* z_{11} \\ \dot{z}_{22} &= A_2 z_{22} - B_2 z_{22} (|z_{22}|^2 + 2|z_{21}|^2) - C_2 z_{22} (|z_{11}|^2 + |z_{12}|^2) - C_2 z_{12} z_{21}^* z_{11} \end{aligned} \quad (6.5)$$

en las que los puntos denotan derivación con respecto al tiempo. Las expresiones de los parámetros A , B y C son las siguientes:

$$A_n = -i\omega + i(\alpha/\alpha_n)(\beta_n + \gamma_n + \delta_n) + k_n,$$

$$B_n = \mu_n/\alpha_n,$$

$$C_n = 2\nu_n/\alpha_n,$$

donde n hace referencia al modo considerado ($n=1$ ó 2). Los parámetros A son complejos, mientras que los B y C son reales. Respecto a los valores de α , β , γ , δ , μ y ν , están dados por:

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(r) dr$$

$$\beta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 P_n(r)}{dr^2} dr$$

$$\gamma_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{dP_n(r)}{dr} dr$$

$$\delta_n = l_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(r)}{r^2} dr;$$

$$\mu_n = k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^3(r) dr$$

$$\nu_1 = k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(r) P_2^2(r) dr$$

$$\nu_2 = k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(r) P_1^2(r) dr.$$

Falta separar las ecuaciones (6.5) en expresiones para las partes real e imaginaria de las amplitudes complejas. Considerando para cada z que $z_{jk} = \rho_{jk} e^{i\varphi_{jk}}$ ($j, k = 1, 2$), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= \Re(A_1)\rho_{11} - B_1\rho_{11}(\rho_{11}^2 + 2\rho_{12}^2) - C_1\rho_{11}(\rho_{21}^2 + \rho_{22}^2) - C_1\rho_{22}\rho_{12}\rho_{21}\cos\Delta \\ \dot{\rho}_{12} &= \Re(A_1)\rho_{12} - B_1\rho_{12}(\rho_{12}^2 + 2\rho_{11}^2) - C_1\rho_{12}(\rho_{21}^2 + \rho_{22}^2) - C_1\rho_{22}\rho_{11}\rho_{21}\cos\Delta \\ \dot{\rho}_{21} &= \Re(A_2)\rho_{21} - B_2\rho_{21}(\rho_{21}^2 + 2\rho_{22}^2) - C_2\rho_{21}(\rho_{11}^2 + \rho_{12}^2) - C_2\rho_{12}\rho_{22}\rho_{11}\cos\Delta \\ \dot{\rho}_{22} &= \Re(A_2)\rho_{22} - B_2\rho_{22}(\rho_{22}^2 + 2\rho_{21}^2) - C_2\rho_{22}(\rho_{11}^2 + \rho_{12}^2) - C_2\rho_{12}\rho_{21}\rho_{11}\cos\Delta \\ \dot{\varphi}_{11} &= \Im(A_1) - C_1(\rho_{22}\rho_{12}\rho_{21}/\rho_{11})\sen\Delta \\ \dot{\varphi}_{12} &= \Im(A_1) - C_1(\rho_{22}\rho_{11}\rho_{21}/\rho_{12})\sen\Delta \\ \dot{\varphi}_{21} &= \Im(A_2) + C_2(\rho_{12}\rho_{22}\rho_{11}/\rho_{21})\sen\Delta \\ \dot{\varphi}_{22} &= \Im(A_2) + C_2(\rho_{12}\rho_{21}\rho_{11}/\rho_{22})\sen\Delta \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde $\Delta = \varphi_{21} + \varphi_{22} - \varphi_{11} - \varphi_{12}$.

Estas ecuaciones describen, dentro de las aproximaciones consideradas, la dinámica cerca del umbral de un láser de CO₂ con una simetría cilíndrica perfecta.

6.1.1. Ruptura de simetría

En el sistema experimental real, es inevitable la presencia de pequeñas imperfecciones que rompen la simetría del sistema. Una forma sencilla de tener en cuenta este factor clave en la dinámica, consiste en añadir a las ecuaciones (6.5) de las amplitudes complejas z_{ij} un término perturbativo de ruptura de simetría, como por ejemplo el producto ϵz_{ik} ($j \neq k$). Se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{11} &= A_1 z_{11} - B_1 z_{11} (|z_{11}|^2 + 2|z_{12}|^2) - C_1 z_{11} (|z_{21}|^2 + |z_{22}|^2) - C_1 z_{22} z_{12}^* z_{21} + \epsilon z_{12} \\ \dot{z}_{12} &= A_1 z_{12} - B_1 z_{12} (|z_{12}|^2 + 2|z_{11}|^2) - C_1 z_{12} (|z_{21}|^2 + |z_{22}|^2) - C_1 z_{22} z_{11}^* z_{21} + \epsilon z_{11} \\ \dot{z}_{21} &= A_2 z_{21} - B_2 z_{21} (|z_{21}|^2 + 2|z_{22}|^2) - C_2 z_{21} (|z_{11}|^2 + |z_{12}|^2) - C_2 z_{12} z_{22}^* z_{11} + \epsilon z_{22} \\ \dot{z}_{22} &= A_2 z_{22} - B_2 z_{22} (|z_{22}|^2 + 2|z_{21}|^2) - C_2 z_{22} (|z_{11}|^2 + |z_{12}|^2) - C_2 z_{12} z_{21}^* z_{11} + \epsilon z_{21}\end{aligned}$$

donde $\epsilon = \rho_\epsilon e^{i\varphi_\epsilon}$ aporta dos nuevos parámetros reales al problema (ρ_ϵ y φ_ϵ). Es importante señalar que este sumando en ϵ es el único que no se ha extraído directamente de las ecuaciones de Maxwell–Bloch; se introduce heurísticamente para dar cuenta de las condiciones experimentales reales. Se puede comprobar que este nuevo sumando rompe la simetría rotacional del sistema, pero sigue conservando la de reflexión. El mismo procedimiento fue utilizado en [46] para estudiar el efecto de la ruptura de simetría en la dinámica de los modos de índice azimutal ± 1 en un láser de CO₂ similar al nuestro.

De nuevo, se separa en ecuaciones para las partes reales e imaginarias de las amplitudes complejas de cada modo, y las expresiones (6.6) quedan reemplazadas por:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{11} &= \Re(A_1)\rho_{11} - B_1\rho_{11}(\rho_{11}^2 + 2\rho_{12}^2) - C_1\rho_{11}(\rho_{21}^2 + \rho_{22}^2) - C_1\rho_{22}\rho_{12}\rho_{21}\cos\Delta \\ &+ \rho_\epsilon\rho_{12}\cos(\varphi_\epsilon + \varphi_{12} - \varphi_{11}) \\ \dot{\rho}_{12} &= \Re(A_1)\rho_{12} - B_1\rho_{12}(\rho_{12}^2 + 2\rho_{11}^2) - C_1\rho_{12}(\rho_{21}^2 + \rho_{22}^2) - C_1\rho_{22}\rho_{11}\rho_{21}\cos\Delta \\ &+ \rho_\epsilon\rho_{11}\cos(\varphi_\epsilon + \varphi_{11} - \varphi_{12}) \\ \dot{\rho}_{21} &= \Re(A_2)\rho_{21} - B_2\rho_{21}(\rho_{21}^2 + 2\rho_{22}^2) - C_2\rho_{21}(\rho_{11}^2 + \rho_{12}^2) - C_2\rho_{12}\rho_{22}\rho_{11}\cos\Delta \\ &+ \rho_\epsilon\rho_{22}\cos(\varphi_\epsilon + \varphi_{22} - \varphi_{21}) \\ \dot{\rho}_{22} &= \Re(A_2)\rho_{22} - B_2\rho_{22}(\rho_{22}^2 + 2\rho_{21}^2) - C_2\rho_{22}(\rho_{11}^2 + \rho_{12}^2) - C_2\rho_{12}\rho_{21}\rho_{11}\cos\Delta \\ &+ \rho_\epsilon\rho_{21}\cos(\varphi_\epsilon + \varphi_{21} - \varphi_{22}) \tag{6.7} \\ \dot{\varphi}_{11} &= \Im(A_1) - C_1(\rho_{22}\rho_{12}\rho_{21}/\rho_{11})\sen\Delta + (\rho_\epsilon\rho_{12}/\rho_{11})\sen(\varphi_\epsilon + \varphi_{12} - \varphi_{11}) \\ \dot{\varphi}_{12} &= \Im(A_1) - C_1(\rho_{22}\rho_{11}\rho_{21}/\rho_{12})\sen\Delta + (\rho_\epsilon\rho_{11}/\rho_{12})\sen(\varphi_\epsilon + \varphi_{11} - \varphi_{12})\end{aligned}$$

$$\dot{\varphi}_{21} = \Im(A_2) + C_2(\rho_{12}\rho_{22}\rho_{11}/\rho_{21})\text{sen}\Delta + (\rho_\epsilon\rho_{22}/\rho_{21})\text{sen}(\varphi_\epsilon + \varphi_{22} - \varphi_{21})$$

$$\dot{\varphi}_{22} = \Im(A_2) + C_2(\rho_{12}\rho_{21}\rho_{11}/\rho_{22})\text{sen}\Delta + (\rho_\epsilon\rho_{21}/\rho_{22})\text{sen}(\varphi_\epsilon + \varphi_{21} - \varphi_{22})$$

Los términos multiplicados por B representan el acoplamiento entre las dos componentes de cada modo, que ya había sido considerado en otros trabajos [45, 46, 47]. Nuestra aportación son los términos multiplicados por C . Estos términos, que se obtienen directamente de las ecuaciones de Maxwell–Bloch, dan la interacción entre modos con distinto índice azimutal (el acoplamiento de los modos 1 y 2).

6.1.2. Parte radial

Para estar en condiciones de simular las estructuras observadas en nuestro experimento, falta completar la expresión del campo eléctrico con una relación funcional para la parte radial de los modos. Como ya hemos adelantado, se han elegido con este propósito las funciones de Gauss–Laguerre, consideradas una base sensata sobre la que proyectar las ecuaciones de los láseres [69]. Eliminando de ellas el factor del ángulo azimutal, ya incluido en la expresión del campo eléctrico, están dadas por:

$$P(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(2r^2)^{l/2} \sqrt{\frac{p!}{(l+p)!}} L_p^l(2r^2) e^{-r^2},$$

donde $L_p^l(\dots)$ representa los polinomios de Laguerre, y p y l son los índices radial y azimutal respectivamente. En nuestro caso, p sólo podrá tomar dos valores: $p = 0$ para un único anillo, y $p = 1$ para un anillo doble. En cuanto a l , es el mismo índice azimutal introducido anteriormente, igual a la mitad del número de lóbulos del patrón considerado.

Respecto a los polinomios de Laguerre, se puede comprobar en libros de tablas matemáticas que: $L_0^l(x) = 1$, y $L_1^l(x) = -x + l + 1$, para todo valor de x y l . Sustituyéndolo en la expresión anterior, se obtiene que la parte radial en una estructura de un único anillo, está dada por:

$$P_i(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(2r^2)^{l_i/2} \sqrt{\frac{p_i!}{(l_i+p_i)!}} e^{-r^2},$$

mientras que para los anillos dobles,

$$P_i(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(-2r^2 + l_i + 1)(2r^2)^{l_i/2} \sqrt{\frac{p_i!}{(l_i+p_i)!}} e^{-r^2}.$$

Dando valores a los distintos parámetros e integrando las ocho ecuaciones (6.7), se obtiene una expresión para campo eléctrico. A partir de ella, con algún cálculo adicional se puede construir el patrón en un instante dado, un fichero con los datos de intensidad en un punto dado en función del tiempo,... en definitiva, reproducir numéricamente el experimento. Mostramos en la figura 6.1 distintas estructuras que hemos obtenido usando este método (patrones de un anillo sencillo con 24 y 28 lóbulos, y uno doble de 34 lóbulos en cada anillo). Como vemos, la utilización de las funciones de Gauss–Laguerre conduce

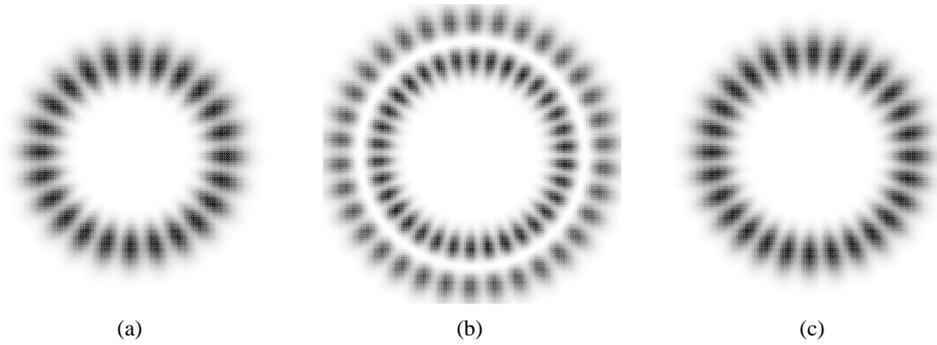


Figura 6.1: Patrones obtenidos a partir de las funciones de Gauss–Laguerre. (a), (c) Anillos sencillos de 24 y 28 lóbulos. (b) Anillo doble de 34 lóbulos en cada aro.

a resultados bastante satisfactorios.

6.1.3. Elección de los parámetros

Interesa extraer de las ecuaciones (6.7) la máxima información posible antes de decidir los valores de los parámetros. Revisemos cada uno de los términos presentes:

El primer sumando está dando la ganancia de la componente considerada de un modo. Por tanto A (en realidad su parte real, que será la que tenga sentido físico) puede interpretarse como la ganancia efectiva de cada componente.

Los parámetros B dan cuenta de la interacción entre las dos componentes del mismo modo radial (las dos ondas de igual índice azimutal que viajan en sentidos opuestos). Son números reales que supondremos positivos para que el término asociado no aumente las ganancias del modo.

Los términos multiplicados por C dan el acoplamiento entre los dos modos de índice azimutal distinto. Al igual que hemos hecho con los B , vamos a suponer estos parámetros positivos. Por otra parte, se pretende estudiar con estas ecuaciones la competición entre dos modos, así que las C deberán ser siempre distintas de cero.

Las expresiones de B y C son funciones más o menos complicadas de la parte radial del modo implicado. Cuando los dos modos elegidos tengan parte radial muy similar (caso de dos modos de un único anillo e índice azimutal muy próximo), se deberá dar valores tales que $B_1 \approx B_2$ y $C_1 \approx C_2$. En cuanto a ϵ , se han tomado los mismos valores que en [46]: $\rho_\epsilon=0.5$ y $\varphi_\epsilon=1.059$. Se puede comprobar que basta con igualar el parámetro C a cero para reproducir las ecuaciones de la referencia [46].

6.2. Programa que realiza la simulación

Para realizar la simulación numérica de la dinámica durante la competición de dos patrones, se ha elaborado un programa en Fortran. Dicho programa incluye un integrador Runge-Kutta 5, en el que han sido implementadas las ecuaciones (6.7). En la simulación, se han ido variando los siguientes datos: los valores de los índices p y l de los modos, los parámetros A (parte real e imaginaria), B y C , y los valores iniciales de las variables ρ_{ij} y φ_{ij} , con $i, j = 1, 2$. Los resultados dinámicos más interesantes fueron obtenidos para valores iniciales elegidos al azar.

El integrador trabaja con los valores de las variables ρ_{ij} y φ_{ij} , y sus derivadas (se deja correr un bucle inicial de un mínimo de 60000 pasos para evitar la observación de transitorios). Sin embargo, estos datos no sirven para comparar con el experimento: la variable física que se ha medido es la intensidad I . Para calcularla a partir de ρ_{ij} y φ_{ij} , se necesita la expresión completa de campo eléctrico, ya que, salvo constantes, $I = |E|^2$. Se ha completado el programa del integrador para que calcule, a partir de los valores de p y l , la parte radial de cada modo para cada punto del patrón considerado. Con la parte radial y los datos aportados por el integrador, ya se puede calcular la intensidad en cualquier punto e instante.

El programa consta de dos bucles:

- Bucle espacial: permite obtener la intensidad en todos los puntos de la estructura en un instante dado, y con ella dibujar el patrón tal y como se vería en un experimento. De esta forma se han obtenido todas las imágenes de patrones que se muestran en este capítulo.
- Bucle temporal: construye un fichero con los valores de la intensidad en un punto (el propio programa selecciona el de intensidad máxima para un valor de tiempo predeterminado) para distintos instantes de tiempo. Para facilitar la posterior obtención de transformadas rápidas de Fourier, se toma siempre una potencia de 2 (nunca menor que 16384) como número de datos. Este bucle temporal proporciona resultados análogos a las medidas de intensidad obtenidas con el detector rápido en el experimento. Se obtuvieron a partir de ellos todas las gráficas temporales de la intensidad y los espectros de potencia que mostramos en el apartado siguiente.

Una adaptación de este programa permite recopilar en un mismo archivo imágenes de los patrones tomadas a intervalos regulares de tiempo. Con este archivo y un código programado en Matlab, se puede observar la evolución temporal del patrón. De este modo se completa la información obtenida con el otro programa.

6.3. Resultados de la simulación

6.3.1. Sin término de ruptura de simetría

Una versión previa del programa descrito en el apartado anterior que no incluye el término en ϵ , permitió establecer un término de comparación con el que comprobar el efecto debido a la introducción de la ruptura de simetría. Veamos algunos aspectos de los resultados obtenidos con dicha versión:

- Existe dependencia con las condiciones iniciales: si damos igual valor a todas las ρ_{ij} y lo mismo con las φ_{ij} , observamos o uno de los patrones perfectos con lóbulos asociados a los modos que compiten, o bien situaciones intermedias entre ellos, pero sin componente continua. Sin embargo, si los valores son elegidos al azar, aparecen aros continuos y situaciones mixtas.
- De las cuatro amplitudes ρ_{ij} , en los aros continuos perfectos sólo sobrevive una (dando una onda viajera), mientras que en los patrones con lóbulos perfectos sobreviven las dos asociadas a un mismo índice azimutal. En los patrones mixtos, se ve que la situación cambia dependiendo de las condiciones iniciales: para ρ_{ij} iguales y φ_{ij} iguales, están presentes todas las amplitudes, mientras que para condiciones al azar, quedará sólo una amplitud para cada índice azimutal.
- El radio de cada modo con lóbulos perfecto es constante, y aumenta con el número de lóbulos. En situaciones mixtas que combinan los dos modos en competición, el radio toma un valor intermedio a los de los modos perfectos involucrados.
- En patrones formados por un único anillo, se comprueba que los continuos asociados al mismo índice azimutal tienen un radio ligeramente superior.

6.3.2. Introduciendo un término de ruptura de simetría

Dentro del marco general descrito en el apartado anterior, se puede analizar el efecto que supone introducir en las ecuaciones un término perturbativo de ruptura de simetría.

Comprobamos que, a pesar de utilizar condiciones iniciales elegidas al azar, ya no se forman patrones continuos (efecto de selección de patrones discretos similar al conseguido con la introducción de un alambre en la cavidad óptica). Todas las estructuras formadas, regulares o irregulares (veremos ejemplos de patrones con unas zonas más claras que otras) incluyen una componente discreta. En los casos irregulares, se encuentran comportamientos temporales complejos del tipo de los descritos en el capítulo anterior.

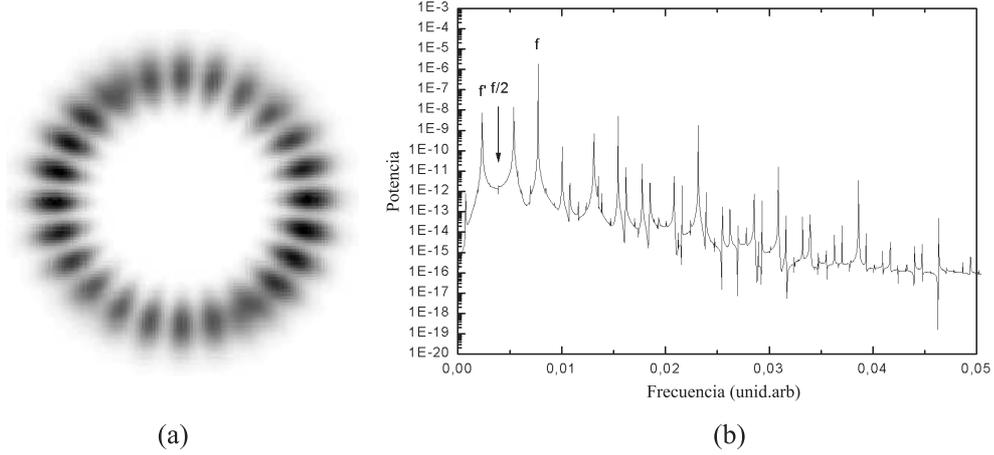


Figura 6.2: Comportamiento en la competición entre los patrones de un único anillo con 24 y 28 lóbulos ($l_1 = 12, l_2 = 14, p_1 = p_2 = 0$). (a) Patrón formado para $A_1^r = A_2^r = 1,4489, A_1^i = 13, A_2^i = 12, B_1 = 0,5, B_2 = 1,0, C_1 = C_2 = 0,1$. (b) Transformada de Fourier de la evolución temporal de la intensidad en un punto de dicho patrón. Se distinguen las frecuencias f y f' junto con distintas combinaciones de ambas.

En lo que sigue, se analizan en detalle algunos ejemplos de este tipo de comportamiento, conseguidos únicamente con condiciones iniciales elegidas al azar.

Para seguir el mismo orden del capítulo 5, comencemos por el caso de interacción entre varias estructuras de un único aro. La competición entre dos anillos de 24 y 28 lóbulos respectivamente ($l_1 = 12, l_2 = 14, p_1 = p_2 = 0$) da lugar a la estructura mostrada en la figura 6.2(a). Fue obtenida para los siguientes valores de los parámetros: $A_1^r = A_2^r = 1,4489, A_1^i = 13, A_2^i = 12, B_1 = 0,5, B_2 = 1,0, C_1 = C_2 = 0,1$. El espectro de potencias de la evolución temporal de la intensidad se muestra en la figura 6.2(b). En él aparecen dos frecuencias distintas ($f/f' \simeq 3.4$) y combinaciones de ellas.

Respecto a la interacción entre el anillo doble y el sencillo de 24 lóbulos ($l_1 = 12, p_1 = 0, l_2 = 17, p_2 = 1$), se ha encontrado una situación análoga a la de la figura experimental 5.14, con tres zonas más marcadas [Fig. 6.3(a)]. Fue conseguida para $A_1^r = A_2^r = 1,4489, A_1^i = 1, A_2^i = 4, B_1 = 1,05, B_2 = 0,15, C_1 = C_2 = 0,1$. En la figura 6.3(b) aparece el espectro de potencias de la señal temporal, que incluye el subarmónico $f/3$ de la frecuencia fundamental, una frecuencia distinta de f y distintas combinaciones de ellas. Se muestra una secuencia de la evolución temporal de la intensidad en un punto del patrón en la figura 6.3(c).

Para los mismos valores de los parámetros de la figura 6.2, pero con los patrones de 24 lóbulos sencillo y de 34 doble, se ha encontrado un patrón con cinco zonas más marcadas [Fig. 6.4(a)]. La evolución temporal de la intensidad en un punto y el correspondiente espectro de potencias están representados en las figuras 6.4(c) y (b) respectivamente. En la transformada de Fourier no se observa esta vez un subarmónico $f/3$ de la frecuencia fundamental, sino una frecuencia ligeramente inferior y combinaciones de ésta con f .

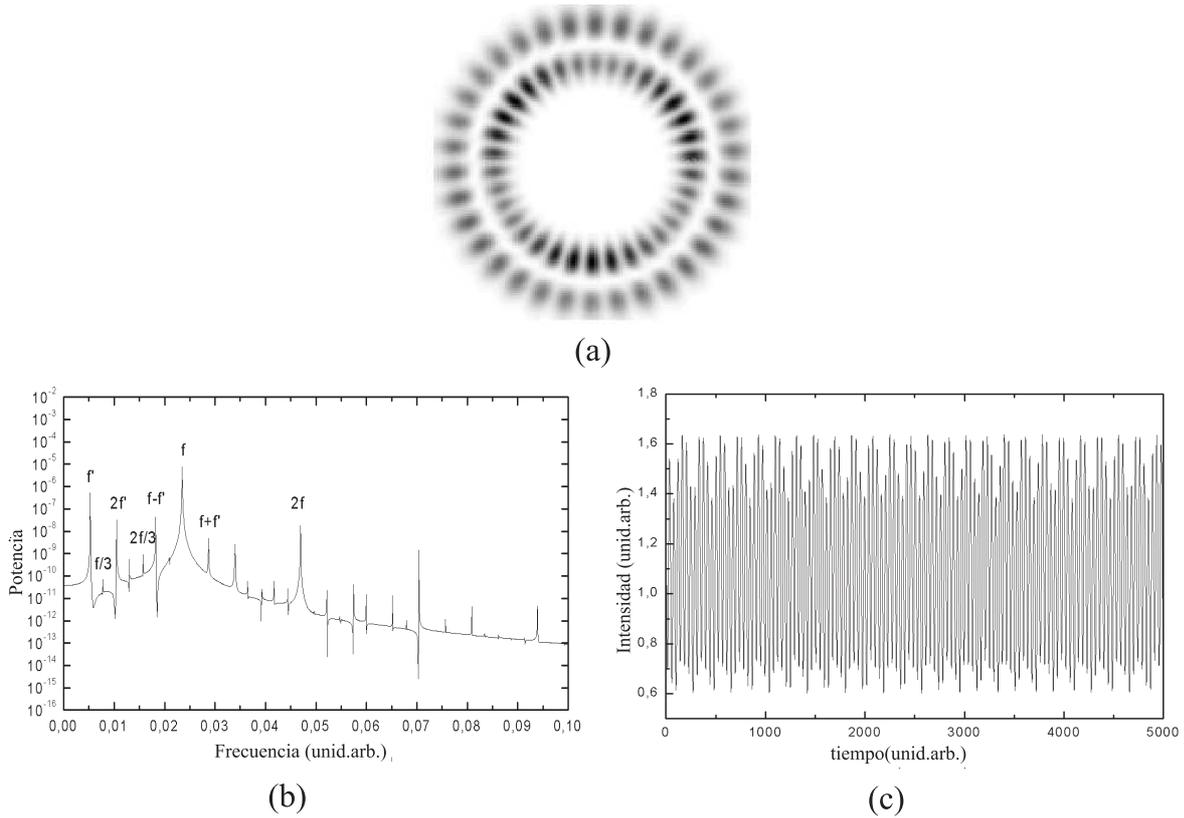


Figura 6.3: Comportamiento en la competición entre el anillo sencillo de 24 lóbulos y el doble de 34 ($l_1 = 12$, $l_2 = 17$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$). (a) Patrón con tres zonas más marcadas, formado para $A_1^r = A_2^r = 1,4489$, $A_1^i = 13$, $A_2^i = 12$, $B_1 = 0,5$, $B_2 = 1,0$, $C_1 = C_2 = 0,1$. (b) Transformada de Fourier de la evolución temporal de la intensidad en un punto de dicho patrón. Se distinguen las frecuencias f y f' junto con distintas combinaciones de ambas y los subarmónicos de f , incluido $f/3$. (c) Fragmento de la señal temporal obtenida en las mismas condiciones.

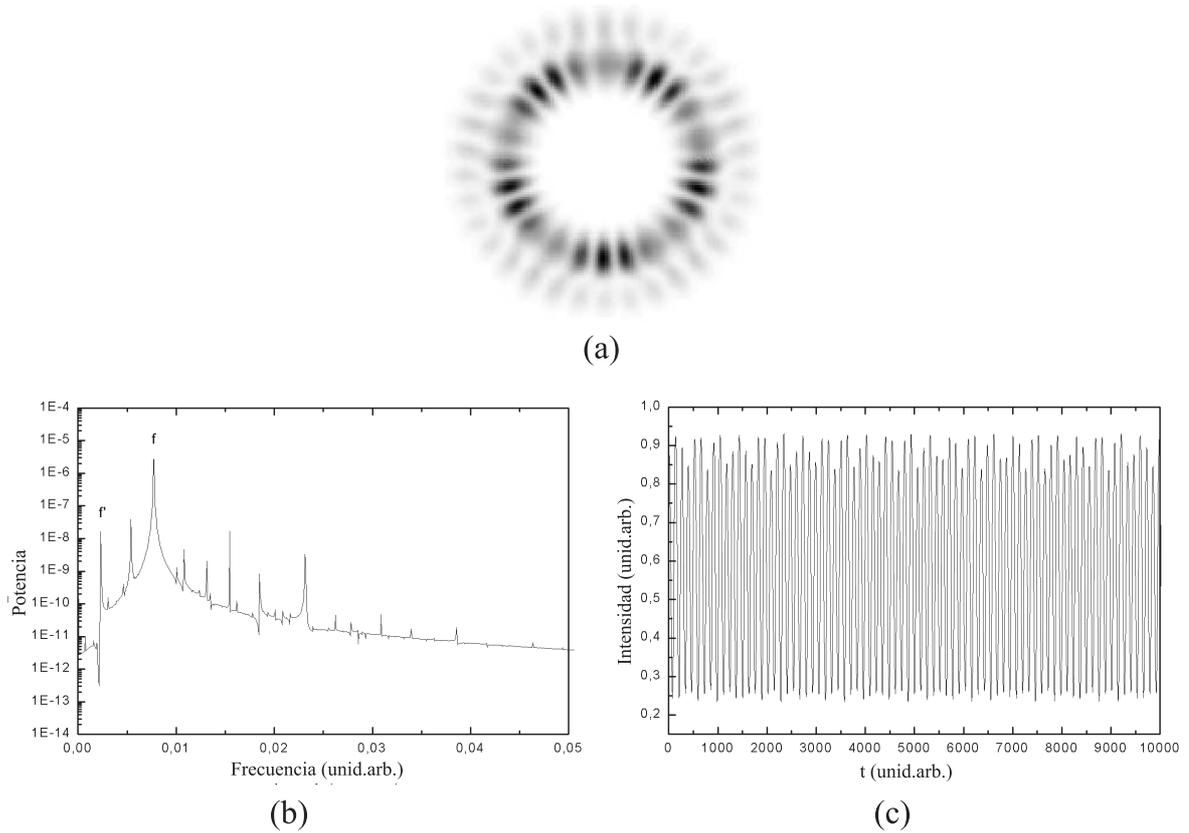


Figura 6.4: Comportamiento en la competición entre el anillo sencillo de 24 lóbulos y el doble de 34 ($l_1 = 12, l_2 = 17, p_1 = 0, p_2 = 1$). (a) Patrón con cinco zonas más marcadas, obtenido para $A_1^r = A_2^r = 1,4489, A_1^i = 13, A_2^i = 12, B_1 = 0,5, B_2 = 1,0, C_1 = C_2 = 0,1$. (b) Transformada de Fourier de la evolución temporal de la intensidad en un punto de dicho patrón. Se aprecian las frecuencias f y f' junto con distintas combinaciones de ambas. (c) Señal temporal obtenida en las mismas condiciones.

Con este método numérico, se pueden obtener comportamientos temporales altamente irregulares. En ningún caso hemos observado alternancia entre tipos de comportamiento distintos (oscilación–no oscilación, período 1–período 2,...) como los descritos en la parte experimental, a pesar de haber realizado pruebas insertando ruido aditivo en el programa con ruptura de simetría: en las ecuaciones ($\dot{Y} = f(Y) + ruido$), lo que puede interpretarse físicamente como el resultado de la emisión espontánea; directamente en las ρ_{ij} ($\rho_{ij} + ruido$), suponiendo que cada paso por la cavidad altera los modos de una forma apenas apreciable; y en uno de los parámetros del programa.

Capítulo 7

Conclusiones

Resumamos brevemente los principales resultados presentados en esta memoria.

En convección, se han mostrado algunas de las estructuras que se forman en recipientes cilíndricos de pequeña relación de aspecto. Son muy pocos los trabajos experimentales realizados en este rango de pequeña relación de aspecto. Uno de los más citados es el de Koschmieder y Prahl [26], que trató de reproducir las predicciones del análisis lineal de Rosenblat y colaboradores [17] situándose en condiciones en que el efecto de la tensión superficial domina sobre el del empuje. Sin embargo, no encontró todas las estructuras asociadas a los modos del análisis lineal. En esta memoria y en la referencia [21], mostramos para el rango de relaciones de aspecto menores estructuras asociadas a los distintos modos presentes en la curva de estabilidad marginal del trabajo de Rosenblat y colaboradores (Fig. 2.5). Los resultados obtenidos concuerdan en gran medida con las predicciones del análisis lineal [17, 18], no sólo en el tipo de estructuras presentes, sino también en el orden en que aparecen, a pesar de que nuestras condiciones experimentales imponen un dominio claro del efecto del empuje sobre el de la tensión superficial (el análisis de la referencia [18] incluye el empuje como causa de desestabilización, pero con una proporción $Ra/Ma \leq 20$). El efecto de trabajar con paredes no deslizantes, no incluido en el análisis lineal citado, da lugar a ciertas diferencias en la configuración de las estructuras.

Para valores de Γ mayores que 4, se ha comprobado que el número de celdas convectivas aumenta con Γ : se forman particiones azimutales en todo el volumen del fluido, o bien divisiones azimutales superpuestas sobre una división radial (que forma un círculo central y una corona circular externa). En este último caso, se han visto particiones azimutales sea en el círculo interno dando los patrones con lóbulos, sea en el anillo exterior formando patrones poligonales. Queda pendiente para futuros trabajos comprobar si el patrón con dos rollos convectivos concéntricos y las estructuras con lóbulos, son modos propios del análisis lineal con las condiciones de contorno adecuadas.

En el láser de CO_2 , se describe la formación de patrones que mantienen una clara dependencia respecto a la simetría anular impuesta por uno de los espejos de la cavidad:

estructuras anulares continuas o formadas por un número par de lóbulos, de un anillo o dobles. En ellas, se ha comprobado la eficacia de colocar dentro de la cavidad un pequeño obstáculo difractivo (un alambre metálico de 50 ó 100 micras) para conseguir la selección y estabilización de patrones sin componente continua. Estos resultados confirman la influencia de la simetría del sistema en los patrones formados, así como el efecto estabilizador de una ruptura adecuada de la simetría en algunos de ellos.

Adentrándonos en el comportamiento temporal, en convección se ha descrito una rica dinámica asociada a los patrones poligonales: rotaciones, transiciones entre patrones distintos, la combinación de ambas dinámicas, o incluso la separación dentro del polígono en zonas estáticas y zonas con una dinámica del tipo de las descritas. Para las transiciones entre polígonos, queda pendiente estudiar en profundidad la influencia de las simetrías sobre esta dinámica, que ha sido analizada en este trabajo utilizando argumentos geométricos sencillos. En cuanto a las rotaciones, en otros trabajos (ver Ref. [66] y las referencias que incluye) se han descrito rotaciones en sistemas cilíndricos en condiciones análogas a las de nuestro experimento. Dichas rotaciones se explican como el resultado de una ruptura de la simetría $O(2)$ del sistema. En el láser, que comparte esta misma simetría, se encuentran comportamientos temporales similares. Se han descrito como el resultado de la superposición de ondas azimutales que viajan en sentidos opuestos, formando ondas estacionarias (lo que en fluidos se correspondería con una estructura estacionaria) o viajeras (polígonos en rotación).

En nuestro experimento con el láser, la alternancia entre patrones da lugar a una dinámica muy rica, especialmente en las condiciones en que coexisten varios de ellos, en las transiciones de uno a otro. Se muestran ejemplos en que la evolución temporal de la intensidad es altamente irregular, llegando en algún caso a comportamientos caóticos. Se propone un modelo sencillo, obtenido a partir de las ecuaciones de Maxwell–Bloch, para analizar esta dinámica temporal en la coexistencia de dos patrones. La integración numérica de las ecuaciones obtenidas, que incluyen la interacción entre modos de índice azimutal distinto y un término de ruptura de simetría, proporciona resultados que concuerdan cualitativamente con los experimentales.

Concluyendo, las simetrías de un sistema influyen de forma patente en la formación y dinámica de los patrones que hemos observado. Sistemas confinados muy distintos microscópicamente, proporcionan resultados análogos cuando presentan simetrías comunes.

Apéndice A

Ecuaciones básicas

A.1. Ecuaciones que rigen la CBM

En la descripción de un fluido, se necesita una ecuación de estado. Se va a suponer una relación lineal entre ρ y T : $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$, donde T_0 es la temperatura de referencia a la que $\rho = \rho_0$. A esta ecuación de estado, deben añadirse las ecuaciones de conservación, y unas condiciones de contorno adecuadas al problema que se quiere estudiar.

Las ecuaciones de conservación que rigen el flujo de un fluido viscoso son las siguientes:

- **Ecuación de continuidad.** A partir de la ecuación de conservación de la masa, se obtiene:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{A.1})$$

donde \mathbf{v} representa el campo de velocidades del fluido. En el caso de fluidos incompresibles ($\rho = \text{constante}$), la ecuación se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.2})$$

- **Ecuación de Navier–Stokes.** Se deduce a partir de la ecuación de conservación del momento lineal. En su forma más general:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \mu/3) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (\text{A.3})$$

donde $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ es lo que se conoce como derivada material; p es la presión en el punto considerado, μ la viscosidad dinámica del fluido y η su viscosidad volumétrica. En general, el factor $\eta + \mu/3$ suele ser muy pequeño, lo que permite despreciar el sumando en que aparece frente a los demás. En cualquier caso, si el fluido es incompresible, se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, con lo que la expresión de la también

conocida como ecuación dinámica se reduce a:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (\text{A.4})$$

Aplicando la aproximación de Boussinesq¹ y dividiendo por ρ_0 , se obtiene:

$$D_t \mathbf{v} = \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (\text{A.5})$$

donde $\nu = \mu/\rho_0$ es la viscosidad cinemática del fluido.

- **Ecuación de balance de la energía.** La ecuación de balance de la energía interna u del sistema está dada por:

$$\rho D_t u = -\nabla \mathbf{q} + \Phi, \quad (\text{A.6})$$

donde \mathbf{q} es el calor (que será positivo si entra al sistema), y Φ es la función de disipación viscosa, que en el caso de fluidos incompresibles se convierte en

$$\Phi = 2\mu (\nabla \mathbf{v})_s^{\circ 2}, \quad (\text{A.7})$$

donde el último factor es la parte simétrica y sin traza del tensor $\nabla \mathbf{v}$ elevada al cuadrado.

Se supone válida la ley de Fourier, que relaciona el calor con la temperatura a través de la expresión $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$, donde λ es la conductividad térmica (usaremos que $\lambda = \kappa \rho c_p$, con c_p = calor específico a presión constante). Un fluido incompresible cumplirá la ecuación de estado térmica $u = c_p T$. Sustituyendo estas expresiones y considerando que c_p y λ permanecen constantes durante la experiencia, la ecuación de balance de la energía queda:

$$D_t T = \nabla^2 T + \Phi. \quad (\text{A.8})$$

Usualmente, el calor generado por disipación puede despreciarse frente al otro término. De este modo, se obtiene:

$$D_t T = \nabla^2 T, \text{ que equivale a } (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (\text{A.9})$$

Las consideraciones y resultados que se muestran a continuación, forman parte de los trabajos [17, 18]. Se corresponden en buena medida a las condiciones de nuestro experimento: CBM en recipientes cilíndricos de pequeña relación de aspecto.

Resulta conveniente adimensionalizar las variables del problema, ya que de este modo puede comprobarse la magnitud relativa de cada término, y comparar los resultados con los

¹En la aproximación de Boussinesq [73], los coeficientes μ, c_p, α y λ se suponen constantes, y se considera que el fluido se comporta como incompresible (esto es, $\rho = \rho_0$ constante) en todos los términos excepto en el de empuje de la ecuación dinámica. Esta excepción es esencial, ya que considerar ρ constante en ese término supondría eliminar el efecto del empuje.

obtenidos en sistemas experimentales de dimensiones muy distintas. Para ello, se dividen las variables espaciales por d , el tiempo por d^2/κ , la velocidad por κ/d y la temperatura por ΔT . Sustituyendo las nuevas variables en las ecuaciones, se llega a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$Pr^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + RaT \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla^2 T, \quad (\text{A.12})$$

donde Pr y Ra son los números de Prandtl y Rayleigh respectivamente.

Consideraremos las siguientes condiciones de contorno mecánicas y térmicas:

- El fondo se supone rígido y buen conductor

$$\mathbf{v} = 0, T = T_0 \text{ en } z = 0. \quad (\text{A.13})$$

- La superficie superior se considera no deformable (razonable para los valores de d con que trabajamos) y parcialmente conductora. Para la transferencia de calor por la superficie libre, utilizaremos la que se conoce como *condición de Marangoni*:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + Ma \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Ma}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} = w = \frac{\partial T}{\partial z} + Bi(T - T_{ref}) = 0 \text{ en } z = 1, \quad (\text{A.14})$$

donde T_{ref} da una temperatura de referencia, y (u, v, w) son las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) .

- Las paredes laterales se suponen adiabáticas:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ en } r = \Gamma/2. \quad (\text{A.15})$$

- Para conseguir que el problema analítico sea separable, es necesario considerar las paredes laterales deslizantes (no deformables y con vorticidad tangencial nula en ellas):

$$u = \frac{\partial}{\partial r}(rv) = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \text{ en } r = \Gamma/2. \quad (\text{A.16})$$

Esta condición no se satisface en nuestro experimento, pero veremos que permite obtener resultados que concuerdan cualitativamente con los nuestros.

Para resolver las ecuaciones, se parte de la solución conductiva ($\mathbf{v}_{cond} = 0, T_{cond} = -z + T_0$) y se le aplican las siguientes perturbaciones: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r})e^{\sigma t}$ para la velocidad, $\theta(\mathbf{r}, t) = \theta(\mathbf{r})e^{\sigma t}$ para el campo de temperaturas, y $\pi(\mathbf{r}, t) = \pi(\mathbf{r})e^{\sigma t}$ para la presión. σ es lo que se conoce como tasa de crecimiento, que en un caso general puede ser compleja. La aparición de estados distintos del conductivo requiere que existan soluciones en que

la parte real de esta tasa sea cero o positiva. En nuestro caso, estudios numéricos han mostrado que en la bifurcación, $\Im(\sigma) = 0$ [74, 75], con lo que σ puede considerarse real.

Para resolver el problema, se impondrá $\sigma = 0$, esto es, el caso de *estabilidad marginal*. Conservando únicamente los términos lineales, las ecuaciones quedan:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = Pr(-\nabla \pi + Ra\theta \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{v}) \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \nabla^2 \theta, \quad (\text{A.19})$$

con condiciones de contorno:

$$\mathbf{v} = \theta = 0 \text{ en } z = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial y} = w = \frac{\partial \theta}{\partial z} + Bi\theta = 0 \text{ en } z = 1 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(rv) = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \text{ en } r = \Gamma/2. \quad (\text{A.22})$$

En el caso de estabilidad marginal ($\sigma = 0$), se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= 0 \\ -\nabla \pi + Ra\theta \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{v} &= 0 \\ \nabla^2 \theta + w &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

cuyas soluciones están dadas por:

$$\begin{aligned} u_{mij}(r, \phi, z) &= \frac{1}{k_{mi}} \cos(m\phi + \phi_m) J'_m(k_{mi}r) DW_{mij}(z) \\ v_{mij}(r, \phi, z) &= -\frac{m}{k_{mi}^2 r} \sin(m\phi + \phi_m) J_m(k_{mi}r) DW_{mij}(z) \\ w_{mij}(r, \phi, z) &= \cos(m\phi + \phi_m) J_m(k_{mi}r) W_{mij}(z) \\ \theta_{mij}(r, \phi, z) &= \cos(m\phi + \phi_m) J_m(k_{mi}r) \Theta_{mij}(z) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

donde: $D = d/dz$; J_m es la función de Bessel de primera especie de orden m ; $m = 0, 1, 2, \dots$ es el número de onda azimutal, y el número de onda radial es $i = 0, 1, 2, \dots$; k es el *número de onda*, cuyos valores permitidos quedan determinados por la ecuación $J'_m(k\Gamma/2) = 0$ (k toma valores discretos por tratarse de un problema con relación de aspecto finita). Se puede comprobar que $J'_m(\dots) = \frac{1}{2}[J_{m-1}(\dots) - J_{m+1}(\dots)]$, donde ' indica derivación con respecto a la variable de J , en este caso respecto a la coordenada radial.

Estas expresiones, originalmente obtenidas por Rosenblat y colaboradores [17], fueron completadas por Echebarría y colaboradores [18] añadiendo una fase ϕ_m . Debido a la

simetría del problema, no hay ninguna condición de contorno para esta fase, lo que la deja libre. En cuanto a las funciones $W_{mij}(z)$ y $\Theta_{mij}(z)$ son solución de

$$(D^2 - k^2)W - Ra k^2\Theta = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$(D^2 - k^2)\Theta + W = 0 \quad (\text{A.26})$$

con condiciones de contorno

$$W = DW = \Theta = 0 \text{ en } z = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$W = D\Theta + Bi\Theta = D^2W + Ma k^2\Theta = 0 \text{ en } z = 1. \quad (\text{A.28})$$

Las ecuaciones que rigen la dinámica, tienen soluciones para diversos valores de la tasa de crecimiento σ . Sin embargo, por comodidad, se puede optar por utilizar el número de Marangoni Ma (como en [17]) o el de Rayleigh Ra (como en [18]) para expresar las soluciones. Si elegimos por ejemplo Ma , al fijar los demás parámetros (Ra , Bi , m , i , Γ), las ecuaciones tendrán solución para ciertos valores del número de Marangoni, que denotaremos $Ma_j(Ra, Bi, m, i, \Gamma)$, donde el subíndice j es lo que se conoce como número de onda vertical. En el apartado de trabajos previos del capítulo 2, se muestra la curva de estabilidad marginal para este modelo lineal (Fig. 2.5). Representa el número de Marangoni crítico Ma_c en función de la relación de aspecto Γ .

A.2. Ecuaciones que rigen la dinámica del láser

La evolución de un campo electromagnético que se propaga por un medio material, queda descrita por las **ecuaciones de Maxwell** completadas con las **relaciones de constitución** del medio. Deben añadirse a ellas las correspondientes condiciones de contorno. En las relaciones constitutivas, intervienen los parámetros que caracterizan al medio, como son la constante dieléctrica ϵ , la permeabilidad magnética μ , y la conductividad eléctrica σ .

Si nos centramos en el caso de medios no magnéticos, eléctricamente neutros y sin portadores de carga libres, el estudio se simplifica considerablemente. En esta situación, la **ecuación de ondas** (que se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell) se reduce a:

$${}^2\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (\text{A.29})$$

donde ${}^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, \mathbf{E} es el vector campo eléctrico, y \mathbf{P} es el vector polarización (que no es sino el resultado de la orientación que experimentan las cargas eléctricas de los átomos y moléculas del material, al someterlo a un campo eléctrico externo).

La relación entre el campo eléctrico y la polarización está dada por: $\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}$, donde χ es la susceptibilidad magnética del medio, y ϵ_0 la constante dieléctrica del vacío. Debe

señalarse que para medios isotrópicos, χ es una magnitud escalar, con lo que la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} es lineal. Sin embargo, en el caso de medios anisótropos o cuando se aplican campos eléctricos intensos, la polarización varía con la dirección del campo eléctrico aplicado, y χ pasa a ser un tensor. En el caso de los láseres se manejan campos eléctricos intensos, con lo que χ es un tensor y nos encontramos claramente dentro de la óptica no lineal.

Llegados a este punto, resulta conveniente buscar aproximaciones que simplifiquen el problema. La más usual se conoce con el nombre de SVEA, iniciales de *Slowly Varying Envelope Approximation* (aproximación de la envolvente que varía lentamente). Consiste en suponer para el campo eléctrico (y también para la polarización que induce en el medio) una dependencia funcional del tipo $f(x, y, z, t)e^{i(kz-wt)}$ (donde z es la dirección de propagación del haz, y (x, y) el plano transversal), que satisfaga las condiciones:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \ll k |f|, \text{ y } \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \ll w |f|. \quad (\text{A.30})$$

Expresándolo con palabras: se supone que los dos vectores están dados por una onda plana de frecuencia w y vector de ondas k , que se desplaza en la dirección z y está modulada por una envolvente f que varía lentamente con z y t . Esta aproximación es bastante sensata; es válida incluso en situaciones en que las escalas rápida y lenta de evolución temporal difieren en un factor menor que 10 [68].

En adelante, se supondrá que los módulos de \mathbf{E} y \mathbf{P} están dados por las expresiones:
 $E(\mathbf{r}, t) = E_0(x, y, z, t)e^{i(kz-wt)}$
 $P(\mathbf{r}, t) = P_0(x, y, z, t)e^{i(kz-wt)}$,
 en que las envolventes E_0 y P_0 varían lentamente respecto a z y t .

Introduciendo estas expresiones en la ecuación de ondas, se obtiene:

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} + c \frac{\partial E_0}{\partial z} - \frac{ic^2}{2w} \nabla_{\perp}^2 E_0 = \frac{\mu wc^2}{2i} P_0, \quad (\text{A.31})$$

ecuación válida para una onda plana propagándose dentro de la cavidad óptica (suprimiremos en ella el subíndice 0 por comodidad). Se denomina **ecuación de Maxwell**.

A esta expresión, le falta un término que dé cuenta de las pérdidas no difractivas (pérdidas por reflexión no total o por absorción en los espejos, dispersión, etc.). Se suele añadir heurísticamente un nuevo sumando para salvar esta deficiencia:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{ic^2}{2w} \nabla_{\perp}^2 E = -kE + \frac{\mu wc^2}{2i} P, \quad (\text{A.32})$$

donde k denota la tasa de decaimiento del campo eléctrico en la cavidad. Utilizaremos la notación $g = \frac{\mu wc^2}{2i}$; esta constante es el coeficiente de acoplamiento.

Para conseguir un sistema de ecuaciones que describa completamente lo que ocurre dentro de la cavidad, deben añadirse ecuaciones que modelen el comportamiento del medio

activo. Promediando estadísticamente las ecuaciones cuánticas de evolución de la polarización y de la inversión de población para aplicarlas a un sistema macroscópico, se llega a las dos ecuaciones que se muestran a continuación. Son llamadas **ecuaciones de Bloch**:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma_{\perp}P + gEN \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_{\parallel}(N - N_0) - \frac{g}{2}(E^*P + P^*E), \quad (\text{A.34})$$

donde N denota la inversión de población, y N_0 es el valor de N proporcionado por el bombeo; γ_{\perp} y γ_{\parallel} son las tasas de decaimiento de P y N respectivamente, y $*$ denota el complejo conjugado de E o P en cada caso.

Agrupando las ecuaciones de E , P y N , se obtienen las **ecuaciones de Maxwell-Bloch**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + c\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{ic^2}{2w}\nabla_{\perp}^2 E &= -kE + gP \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\gamma_{\perp}P + gEN \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel}(N - N_0) - \frac{g}{2}(E^*P + P^*E) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

En la ecuación de Maxwell, se pueden desprestigiar en casos concretos unos sumandos frente a otros. Así, el sumando del operador laplaciano transversal ($\frac{-ic^2}{2w}\nabla_{\perp}^2 E$) que da cuenta de la dependencia transversal del campo eléctrico, podrá suprimirse cuando N sea menor que 1, ya que en ese caso no hay contribución de modos transversales a la radiación láser.

Por su parte, el sumando $c\frac{\partial E}{\partial z}$ da la dependencia longitudinal del campo eléctrico. Si la anchura σ de la curva de ganancia es menor que el rango espectral libre, esa derivada parcial será muy pequeña y se podrá eliminar de la ecuación. Se obtiene como resultado de estas simplificaciones que, para un láser monomodo, las ecuaciones de Maxwell-Bloch se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= -kE + gP \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\gamma_{\perp}P + gEN \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel}(N - N_0) - \frac{g}{2}(E^*P + P^*E) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Si en las ecuaciones (A.36) se hiciera $g = 0$, las soluciones del sistema serían tres exponenciales: $E = E_0e^{-kt}$, $P = P_0e^{-\gamma_{\perp}t}$ y $N = N_0e^{-\gamma_{\parallel}t}$, en las que se ve que k , γ_{\perp} y γ_{\parallel} se comportan como las tasas de decaimiento de E , P y N respectivamente. Sus inversas, nos proporcionan los tiempos de decaimiento de las tres variables del problema, que pueden ser considerados tres tiempos característicos del láser. k está relacionada con las pérdidas no difractivas del campo dentro de la cavidad. Su valor depende en gran medida de los espejos empleados. En cuanto a γ_{\perp} y γ_{\parallel} , la primera se debe en parte a las colisiones entre átomos, mientras que la segunda tiene que ver con la disminución de inversión de

población debida a procesos de emisión espontánea. Los valores de estas tasas pueden variar en varios órdenes de magnitud de unos láseres a otros.

En los láseres de CO_2 , la tasa de decaimiento de la polarización puede considerarse bastante mayor que la de las otras dos variables ($\gamma_{\perp} \gg \gamma_{\parallel}, k$) [68]. Siendo así, la evolución de la polarización será mucho más rápida que la de E y N . Esto hará que P decaiga *instantáneamente* a un estado estacionario, lo que permitirá eliminar adiabáticamente esta variable:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \approx 0 \Rightarrow P = \frac{g}{\gamma_{\perp}} EN.$$

Sustituyendo la expresión de P en las ecuaciones (A.36), se llega a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= -kE + \frac{g^2}{\gamma_{\perp}} EN; \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel}(N - N_0) - \frac{g^2}{\gamma_{\perp}} N |E|^2. \end{aligned}$$

Con un cambio de variables que pase de E a I (=intensidad= $|E|^2$), se llega a lo que se conoce como **ecuaciones de balance**:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -kI + \frac{g^2}{\gamma_{\perp}} IN \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_{\parallel}(N - N_0) - \frac{g^2}{\gamma_{\perp}} N |E|^2. \quad (\text{A.38})$$

Hemos trabajado con potencias próximas a la umbral. En esta región cercana al umbral, actúa lo que en la literatura se conoce como *critical slowing down* (*frenado crítico*). Cerca del umbral de bifurcación, la interacción del campo eléctrico con el medio es decisiva, lo que hace que la evolución de E no pueda describirse con k , sino que varíe mucho más lentamente. En estas condiciones, la evolución de N será mucho más rápida, lo que le permitirá adaptarse “instantáneamente” a las variaciones de E . Así, podremos realizar una eliminación adiabática del tipo de la realizada para P , suponiendo que $\frac{\partial N}{\partial t} \simeq 0$ [13].

$$\frac{\partial N}{\partial t} \approx 0 \Rightarrow N = \frac{\gamma_{\parallel} N_0}{\gamma_{\parallel} + \frac{g^2}{\gamma_{\perp}} |E|^2} = \frac{N_0}{1 + \frac{|E|^2}{|E_{sat}|^2}},$$

donde $|E_{sat}|^2 = \frac{\gamma_{\parallel} \gamma_{\perp}}{g^2}$. E_{sat} recibe el nombre de **campo de saturación**. Sustituyendo la expresión de N en la ecuación del campo eléctrico, queda una única ecuación con una variable:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -kE + \frac{g^2}{\gamma_{\perp}} N_0 \frac{E}{1 + \frac{|E|^2}{|E_{sat}|^2}}. \quad (\text{A.39})$$

Se han aprovechado algunas de estas simplificaciones para desarrollar un modelo numérico sencillo que permite analizar situaciones de competencia entre dos patrones distintos. En él, se considera que cada patrón anular está formado por dos ondas de igual índice radial y azimutal que viajan con dirección azimutal en sentidos opuestos. Como se

ve en el capítulo dedicado al modelo, en las condiciones apropiadas (que requieren la inclusión de un término de ruptura de simetría), la coexistencia de varios de estos patrones puede conducir a comportamientos dinámicos muy complejos.

Bibliografía

- [1] L. Koschmieder, *Bénard cells and Taylor vortices* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [2] H. Bénard, *Rev. Gén. Sci. Pure Appl.* **11** (1900) 1261.
- [3] Rayleigh (Lord), *Philos. Mag.* **32** (1916) 529.
- [4] M.J. Block, *Nature* **178** (1956) 650.
- [5] J.R.A. Pearson, *J. Fluid Mech.* **4** (1958) 489.
- [6] D.A. Nield, *J. Fluid Mech.* **19** (1964) 341.
- [7] W.W. Rigrod, *Appl. Phys. Lett.* **2** (1963) 51.
- [8] J.R. Tredicce, E.J. Quel, A.M. Ghazzawi, C. Green, M.A. Pernigo, L.M. Narducci y L.A. Lugiato, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989) 1274.
- [9] J.B. Swift y P.C. Hohenberg, *Phys. Rev. A* **15** (1977) 319.
- [10] H.S. Greenside y M.C. Cross, *Phys. Rev. A* **31** (1985) 2492.
- [11] H. Hakens, *Advanced Synergetics* (Springer-Verlag, Berlín, 1987).
- [12] M.C. Cross y P.C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65** (1993) 851.
- [13] H. Solari y R. Gilmore, *J. Opt. Soc. Am. B* **7** (1990) 828.
- [14] G. Dangelmayr y E. Knobloch, *Nonlinearity* **4** (1991) 399.
- [15] F. Papoff, G. D'Alessandro, G.L. Oppo y W.J. Firth, *Phys. Rev. A* **48** (1993) 634.
- [16] P. Manneville, *Dissipative Structures and Weak Turbulence* (Academic Press, San Diego, 1990).
- [17] S. Rosenblat, S.H. Davis y G.M. Homsy, *J. Fluid Mech.* **120** (1982) 91.
- [18] B. Echebarria, D. Krmpotiç y C. Pérez García, *Physica D* **99** (1997) 487.

- [19] C. Pérez García, B. Echebarria y M. Bestehorn, *Phys. Rev. E* **57** (1998) 475.
- [20] B. Echebarria, *Inestabilidades termocapilares en una capa de fluido*, Tesis Doctoral. Universidad de Navarra, España (1998).
- [21] M.L. Ramón, D. Maza y H. Mancini, *Phys. Rev. E* **60** (1999) 4193.
- [22] J. Casas Peláez, *Óptica* (Librería General, Zaragoza, 1994).
- [23] A.G. Fox y T. Li, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961) 453.
- [24] G.D. Boyd y J.P. Gordon, *Bell Syst. Tech. J.* **40** (1961) 489.
- [25] S. Rosenblat, G. M. Homsy y S. H. Davis, *J. Fluid Mech.* **120** (1982) 123.
- [26] E. L. Koschmieder y S. A. Prahl, *J. Fluid Mech.* **215** (1990) 571.
- [27] P. Cerisier, C. Pérez-García, C. Jamond y J. Pantaloni, *Phys. Lett.* **112A** (1985) 366.
- [28] T. Ondarçuhu, J. Millán-Rodríguez, H. L. Mancini, A. Garcimartín, y C. Pérez-García, *Phys. Rev. E* **48** (1993) 1051.
- [29] D. Johnson y R. Narayanan, *J. Colloid Interface Sci.* **54** (1996) R3102.
- [30] T. Ondarçuhu, G.B. Mindlin, H.L. Mancini, y C. Pérez-García, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 3892.
T. Ondarçuhu, J. Millán-Rodríguez, H. Mancini, A. Garcimartín y C. Pérez-García, *Phys. Rev. E* **48** (1993) 1051.
T. Ondarçuhu, G.B. Mindlin, H.L. Mancini, y C. Pérez-García, *J. Phys.: Condens. Matt.* **6** (1994) A427.
M. Huerta, D. Krmpotič, G.B. Mindlin, H. Mancini, D. Maza, y C. Pérez-García, *Physica D* **96** (1996) 200.
- [31] A. A. Zaman y R. Narayanan, *J. Colloid Inteface Sci.* **179** (1996) 151.
- [32] P. C. Dauby, G. Lebon y E. Bouhy, *Phys. Rev. E* **56** (1997) 520.
- [33] L. Koschmieder y M.I. Biggerstaff, *J. Fluid Mech.* **167** (1986) 49.
- [34] L. Koschmieder y D.W. Switzer, *J. Fluid Mech.* **240** (1992) 533.
- [35] K. Nitsche y A. Thess, *Phys. Rev. E* **52** (1995) R5772.
- [36] M.F. Schatz, S.J. VanHook, W.D. McCormick, J.B. Swift y H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1938.
- [37] K. Eckert, M. Bestehorn y A. Thess, *J. Fluid Mech.* **356** (1998) 155.
- [38] P. Cerisier, S. Rahal y N. Rivier, *Phys. Rev. E* **54** (1996) 5086.
P. Cerisier, S. Rahal y B. Billia, *Phys. Rev. E* **54** (1996) 3508.

- [39] S.J. VanHook, M.F. Schatz, W.D. McCormick, J.B. Swift y H.L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4397.
- [40] P.L. Ramazza, S. Boccaletti, y F.T. Arecchi, *Opt. Commun.* **136** (1997) 267.
- [41] E. Pampaloni, P.L. Ramazza, S. Residori, y F.T. Arecchi, *Europhys. Lett.* **25** 587.
E. Pampaloni, P. L. Ramazza, S. Residori, y F. T. Arecchi, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 258.
- [42] C. Green, G.B. Mindlin, E.J. D'Angelo, H.G. Solari, y J.R. Tredicce, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 3124.
- [43] E.J. D'Angelo, E. Izaguirre, G.B. Mindlin, G. Huyet, L. Gil, y J.R. Tredicce, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 3702.
- [44] R. López Ruiz, G.B. Mindlin, C. Pérez García y J.R. Tredicce, *Phys. Rev. A* **47** (1993) 500.
- [45] R. López Ruiz, G.B. Mindlin, C. Pérez García y J.R. Tredicce, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 4916.
- [46] A. Labate, M. Ciofini, R. Meucci, S. Boccaletti, y F.T. Arecchi, *Phys. Rev. A* **56** (1997) 2237.
- [47] G. Huyet, C. Mathis, y J.R. Tredicce, *Opt. Commun.* **127** (1996) 257.
- [48] P.-Y. Wang, P. Xie, J.-H. Dai, y H.-J. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4669.
- [49] M. Ciofini, A. Labate, R. Meucci y P.-Y. Wang, *Opt. Commun.* **154** (1998) 307.
- [50] D. Dangoisse, D. Hennequin, C. Lepers, E. Louvergneaux, y P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 5955.
- [51] E. Louvergneaux, D. Hennequin, D. Dangoisse, y P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **53** (1996) 4435.
- [52] G.K. Harkness, W.J. Firth, J.B. Geddes, J.V. Moloney y E.M. Wright, *Phys. Rev. A* **50** (1994) 4310.
- [53] M.L. Ramón, R. Meucci, M. Ciofini, A. Labate y L. Calero, pendiente de publicación en *EPJD*.
- [54] M.L. Ramón, R. Meucci, E. Allaria y S. Boccaletti, pendiente de publicación en *EPJD*.
- [55] H. L. Mancini, *Osciladores Térmicos de Bénard–Marangoni*, Tesis Doctoral. Universidad de Navarra, España (1994).
- [56] D. Malacara Ed., *Optical Shop Testing* (J. Wiley & Sons, New York, 1977).

- [57] W. Merzkirch, *Flow Visualization*, 2nd Ed. (Academic Press, Orlando, 1987).
- [58] M. Morin y P.-A. Bélanger, *Appl. Opt.* **31** (1992) 1942.
- [59] M.A. Alonso Maleta, *Convección térmica en un anillo cilíndrico en rotación*, Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña, España (1999).
- [60] F.H. Busse, *J. Fluid Mech.* **44** (1970) 441.
- [61] F.H. Busse, *J. Fluid Mech.* **173** (1986) 545.
- [62] E. Knobloch, “Bifurcations in rotating systems”, en *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*, ed. M.R.E. Proctor y A.D. Gilbert (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [63] E. Knobloch, *Phys. Fluids* **8** (1996) 1446.
- [64] A.S. Landsberg y E. Knobloch, *Phys. Lett. A* **159** (1991) 17.
- [65] D.R. Ohlsen, S.Y. Yamamoto, y C.M. Surko, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1431.
- [66] D. Maza, B. Echebarria, C. Pérez García y H. Mancini, *Physica Scripta* **T67** (1996) 82.
- [67] E.L. Koschmieder, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **10** (1991) 233.
- [68] F.T. Arecchi, S. Boccaletti y P.L. Ramazza, *Physics Reports* **318** (1999) 1-83.
- [69] G. D’Alessandro y G.L. Oppo, *Opt. Commun.* **88** (1992) 130.
Ver también el artículo de revisión de F. Prati, M. Brambilla y L.A. Lugiato, *Pattern Formation in Lasers*, *Rivista del Nuovo Cimento* **7** (1994) 1.
- [70] F.T. Arecchi, G. Giacomelli, P.L. Ramazza y S. Residori, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 2531.
- [71] F.T. Arecchi, S. Boccaletti, G.B. Mindlin y C. Pérez García, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 3723.
- [72] M. Ciofini, A. Labate, R. Meucci, y P.-Y. Wang, *Opt. Commun.* **154** (1998) 307.
R. Meucci, A. Labate, M. Ciofini, y P.-Y. Wang, *Quantum Semiclass. Opt.* **10** (1998) 803.
- [73] J. Boussinesq, *Théorie Analytique de la Chaleur*, vol. II (Gauthier–Villars, Paris, 1903).
- [74] A. Vidal y A. Acrivos, *Phys. Fluids* **9** (1966) 615.
- [75] M. Takashima, *J. Phys. S. Japan* **50** (1981) 2751.