

ESTUDIO TEÓRICO DE ALGUNAS INESTABILIDADES EN CONVECCIÓN TÉRMICA

Memoria presentada por
D. Santiago Madruga Sánchez
para optar al grado de doctor en Física

Septiembre 2003

Depto. de Física y Matemática Aplicada,
Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra,
E-31080 Pamplona, España

Tesis doctoral de la Facultad de Ciencias
Universidad de Navarra, Pamplona (España)
Santiago Madrugá Sánchez (smadruga@fisica.unav.es)
Estudio teórico de algunas inestabilidades en convección térmica
Pamplona, 2003.

Este documento ha sido elaborado con PDF \LaTeX , Versión 3.14.

D. Carlos Pérez García, Catedrático del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra

CERTIFICA: que la presente Memoria, “Estudio teórico de algunas inestabilidades en convección térmica” ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra por D. Santiago Madruga Sánchez.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmo la presente certificación en Pamplona, el ocho de septiembre de dos mil tres.

Fdo.: Carlos Pérez García

A mis padres y mi novia

Agradecimientos

Quisiera agradecer y reconocer de forma especial la ayuda y guía que me ha dispensado mi director de tesis Carlos Pérez García durante estos años, con quien estoy en deuda por su disponibilidad, trabajo, buenos consejos, y enorme paciencia conmigo.

También quiero agradecer de forma especial a Georgy Lebon la hospitalidad, amabilidad, y facilidades de todo tipo que me ha dado en la Universidad de Lieja.

A Mireille Dondlinger y Thomas Desaive quiero agradecerles su amistad y simpatía, además del agradable entorno de trabajo que me proporcionaron durante mi estancia en Lieja. También le debo reconocimiento a Michael Besthorn por su cordialidad y ayuda con los métodos numéricos en la Universidad de Cotbus.

Quiero agradecer también sus ánimos a todos los miembros del Departamento de Física y Matemática Aplicada. A mis antiguos compañeros de fatigas en Pamplona, Miguel Ángel Pelacho, Sergio Casado, Begoña Peña, María Luisa Ramón, y Andrea Vallone. A los doctorandos Cecilia Wolluschek, Iker Zuriguel, Montserrat Miranda, Angela Bernardini, María Yoldi. A Pedro Elizalde con quien he pasado tantos buenos ratos. A los sénior Héctor Mancini, Emilio Díaz, y Carmen Palacios. A los matemáticos Antonio Peláez, María Jesús Chasco, y Sergio Ardanza. A Jean Bragard, Stefano Boccaletti, Diego Valladares, Javier Burguete, Wenceslao González, Ángel Garcimartín, Diego Maza. A las secretarias María José Collados y Pilar Ayúcar.

Debo agradecer a la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra las becas que me ha otorgado durante varios años y que han hecho posible esta tesis, también agradezco la beca que he recibido durante dos años en mi estancia en la Universidad de Lieja a través del programa ICOPAC de la Unión Europea con contrato HPRN-CT-2000-00136.

Índice General

Notación	xi
Introducción	1
I Convección con rotación	5
1 Ecuaciones de un fluido en convección con rotación	7
1.1 Ecuaciones básicas	7
1.1.1 Ecuaciones hidrodinámicas fundamentales	7
1.1.2 Ecuaciones hidrodinámicas en convección con rotación	8
1.1.3 Aproximación de Oberbeck–Boussinesq	9
1.2 Análisis lineal de un fluido en convección con rotación	10
1.2.1 Adimensionalización de las ecuaciones	10
1.2.2 Solución conductiva	11
1.2.3 Ecuaciones de evolución de las perturbaciones y linealización	11
1.2.4 Condiciones de contorno	12
1.3 Análisis lineal: caso libre–libre	13
2 Efectos no–Boussinesq	15
2.1 Introducción	15
2.2 Formalismo de las ecuaciones de amplitud	19
2.3 Modelo no–Boussinesq	20
2.3.1 Análisis lineal	21
2.3.2 Análisis débilmente no lineal	22
2.3.3 Diagramas de estabilidad	25
2.3.4 Inestabilidades de amplitud	25
2.3.5 Ecuación de la fase	26
2.4 Conclusiones	29
3 Convección con rotación	31
3.1 Inestabilidad de Küppers–Lortz	32
3.2 Modelo de Busse–Heikes	34
3.3 Ecuaciones de amplitud en convección con rotación	35

3.3.1	Simetrías	35
3.4	Estabilidad de patrones	36
3.5	Ecuaciones de amplitud de un fluido no-Boussinesq: viscosidad dependiente de la temperatura	38
3.5.1	Análisis lineal	40
3.5.2	Análisis débilmente no lineal	40
3.5.3	Ecuación de la fase: longitud de onda larga	46
3.5.4	Inestabilidades de la fase: perturbaciones arbitrarias	49
3.6	Conclusiones	53
 II Calentamiento lateral		55
 4 Inestabilidad convectiva/absoluta en capas líquidas calentadas lateralmente		57
4.1	Inestabilidades termocapilares	57
4.1.1	Inestabilidad de Bénard-Marangoni en la superficie libre de un fluido	58
4.1.2	Inestabilidades en flujos termocapilares	59
4.2	Calentamiento lateral en capas líquidas horizontales	60
4.2.1	Mecanismos de inestabilidad termocapilar en capas líquidas	61
4.3	Formulación del problema: ecuaciones básicas	64
4.3.1	Ecuaciones adimensionales	66
4.4	Estado base	67
4.5	Ecuaciones de evolución de las perturbaciones	68
4.6	Método numérico de resolución del problema de valores propios.	69
4.7	Inestabilidades convectivas/absolutas	70
4.8	Resultados del análisis absoluto de estabilidad	72
4.9	Experimentos con aceite de silicona de 0.65 cSt	74
4.9.1	Geometría rectangular	74
4.9.2	Geometría cilíndrica	76
4.10	Comparación con los resultados experimentales	77
4.11	Conclusiones	80
 5 Inestabilidades convectivas en dos líquidos superpuestos calentados lateralmente		83
5.1	Acoplamiento de fluidos en sistemas bicapa	84
5.2	Formulación del problema	85
5.3	Estado base	88
5.3.1	Perfiles de temperatura y velocidad del estado base	89
5.4	Ecuaciones de evolución para las perturbaciones	92
5.4.1	Resultados del análisis de estabilidad	93
5.5	Influencia de las condiciones de contorno térmicas	102
5.6	Conclusiones	103

III Conclusiones generales	107
Apéndices	113
A Modelo de Segel	113
B Ecuación de la fase para hexágonos en presencia de rotación	117
C Fluido no-Boussinesq en convección con rotación	123
D Perfiles de velocidad y temperatura del estado base de una bicapa calentada lateralmente	129
E Inestabilidades absolutas y convectivas	131

Notación

A_i	amplitud del modo i
Bi	número de Biot
Bo	número de Bond
c_p	calor específico a presión constante
F	dependencia en z de la velocidad vertical
\mathbf{f}	fuerza externa sobre el fluido
g	aceleración de la gravedad
g_1, g_2, g_i	coeficientes cúbicos en la ecuación de amplitud
H	amplitud de los hexágonos
h	profundidad del líquido
\mathbf{k}	vector de onda
k	número de onda
k_x	componente x del vector de onda
k_y	componente y del vector de onda
L	operador lineal
Ma	número de Marangoni
N	operador no lineal
NS	Navier-Stokes
n	número entero
$\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$	vectores unitarios
OB	Oberbeck-Boussinesq
Pr	número de Prandtl
\mathcal{P}	parámetro no-Boussinesq en la teoría de Busse
p	presión
\mathbf{q}, \mathbf{Q}	vectores de onda pequeños
R	amplitud de los rollos
\mathbf{r}	vector de posición
Ra	número de Rayleigh
$s = s_{\Re} + i s_{\Im}$	autovalor con tasa de crecimiento temporal s_{\Re}
T	temperatura
T_a	número de Taylor
ΔT	diferencia de temperatura impuesta externamente
U	dependencia en z de la velocidad en la dirección x

\mathcal{U}	campo genérico
\mathcal{U}_{int}	energía interna
\mathbf{u}	velocidad
u	componente x de la velocidad
V	dependencia en z de la velocidad en la dirección y
v	componente y de la velocidad
w	componente z de la velocidad
$\hat{\mathbf{x}}$	vector de onda unitario en la dirección x
$\hat{\mathbf{y}}$	vector de onda unitario en la dirección y
(x, y, z)	coordenadas cartesianas
Z	dependencia en z de la componente vertical de la vorticidad
$\hat{\mathbf{z}}$	vector de onda unitario en la dirección vertical
Letras griegas y símbolos matemáticos	
α	coeficiente de dilatación cúbica
α_1	coeficiente cuadrático espacial en la ecuación de amplitud
β	gradiente de temperatura
β_1, β_2	coeficientes cuadráticos espaciales en la ecuación de amplitud
γ	variación de la tensión interfacial con la temperatura
Γ	parámetro no-Boussinesq adimensional
$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$	operador nabla
$\nabla_h = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$	operador nabla horizontal
δ	coeficiente cuadrático de la ecuación de amplitud
ϵ	parámetro pequeño
ϵ_{ijk}	tensor de Levi-Civita
ζ	componente vertical de la vorticidad
η	viscosidad dinámica
Θ	dependencia en z de la temperatura
θ	perturbación de temperatura
κ	difusividad térmica
λ	conductividad térmica
μ	parámetro real que da la distancia al umbral de convección
ν	viscosidad cinemática
ξ_0^2	longitud de coherencia
φ	ángulo
ρ	densidad
σ	tensión interfacial del líquido
∂_τ	derivada temporal lenta
$\hat{\tau}_i$	vectores unitario normal a \hat{n}_i
τ_{ij}	tensor de tensiones
τ_{visc}	escala temporal de difusión viscosa
τ_{term}	escala temporal de difusión térmica
τ_{cap}	escala temporal de los fenómenos termocapilares

Υ	parámetro no-Boussinesq
χ_{ij}	tensor de tensiones viscosas
Ω	velocidad angular
$\omega = \omega_r + i \omega_i$	frecuencia compleja
ω_i	tasa de crecimiento
ω_r	frecuencia de oscilación
ϖ	coeficiente cúbico en la ecuación de amplitud
Subíndices	
0	relativo a un valor de referencia
1	relativo al líquido inferior en el problema bicapa
2	relativo al líquido superior en el problema bicapa
c	valor crítico
F	relativo a un sistema de referencia inercial
R	relativo a un sistema de referencia en rotación
T	relativo al sistema total del problema bicapa
Superíndices	
'	relativo a las perturbaciones
†	relativo al problema adjunto
*	relativo a relaciones de magnitudes entre dos líquidos

Introducción

Las inestabilidades en sistemas no lineales dan lugar, a menudo, a una transición de un estado uniforme a otro que varía periódicamente en el tiempo o en el espacio al que se denomina patrón. Los patrones aparecen en sistemas físicos muy diversos, como por ejemplo en las ondas de las arenas, en las dunas del desierto, en la morfología de plantas y animales, en las reacciones químicas, en las formaciones geológicas, en láseres, en convección de Rayleigh–Bénard, o en flujos de Taylor–Couette, por citar algunos casos representativos.

La formación de patrones está estrechamente relacionada con el concepto de inestabilidad. En un sistema en equilibrio cualquier perturbación se atenúa exponencialmente, pero al aplicarle un campo externo se aparta progresivamente del estado inicial. Se dice entonces que el sistema sufre una bifurcación, a consecuencia de uno o varios modos que se desestabilizan. Al aumentar el forzado aparecen nuevas inestabilidades, secundarias, terciarias, etc., cada una de las cuales rompe alguna simetría del estado original, y la dinámica se vuelve tan compleja que el análisis lineal resulta insuficiente.

Se dan patrones similares en sistemas muy dispares, de modo que se ha tratado de encontrar una explicación unificada [1]. La dinámica de estos sistemas se basa en conjuntos de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, y se sabe que cerca del umbral de inestabilidad tiene lugar una separación de escalas espaciales y temporales. Como resultado, se pueden eliminar adiabáticamente los modos estables y reducir la dinámica a la de la amplitud (parámetro de orden) de los modos inestables. Se han estudiado reducciones de las ecuaciones básicas enfocadas a distintos aspectos de la formación de patrones. La aproximación más simple está dedicada a patrones perfectos, en la que el parámetro de orden obedece a una ecuación de tipo Landau. Cuando se tienen en cuenta variaciones espaciales lentas del parámetro de orden se utilizan ecuaciones de tipo Ginzburg-Landau, que son muy similares a las usadas para describir fenómenos de transiciones de fase. Lejos del umbral, en el régimen fuertemente no lineal, es posible derivar a menudo las llamadas ecuaciones de fase. También se han mostrado útiles las ecuaciones de tipo Swift–Hohenberg, que poseen la misma parte lineal que el problema original y admiten variaciones espaciales rápidas. Sin embargo, para el análisis detallado de sistemas físicos concretos no basta una comprensión general, sino que es esencial conocer el mecanismo que da lugar a la selección de patrones.

La convección en una capa horizontal de fluido ha sido uno de los ejemplos canónicos para estudiar la formación de patrones en sistemas espacialmente extendidos. Ésta se halla presente en una gran variedad de fenómenos naturales de la atmósfera, de los océanos, del manto terrestre, o industriales como en procesos de secado, mezclas, etc. H. Bénard en 1900 [2] mostró el primer patrón regular en un sistema fuera del equilibrio térmico, calentando una capa de aceite de ballena por su parte inferior. Cuando la diferencia de temperatura entre la placa inferior y superior supera un valor crítico el estado

conductor se desestabiliza y surge la convección. Este fenómeno se debe a una competición entre los efectos estabilizantes de la disipación y desestabilizantes del empuje arquimédico, tal como mostró Lord Rayleigh una década después [3]. La convección debida al empuje se denomina convección de Rayleigh–Bénard. El patrón más sencillo consiste en rollos paralelos, cuya longitud de onda es del orden del doble de la profundidad de la capa de fluido. Sin embargo, el comportamiento dinámico puede ser mucho más rico. Así, cuando aumenta el calentamiento surgen nuevas inestabilidades que pueden conducir a un régimen turbulento por duplicación de periodo. También se ha encontrado un estado denominado caos espiral, gobernado por espirales rotantes, dislocaciones y fronteras de grano [4].

El problema clásico de Rayleigh–Bénard se hace aún más complejo si se toma en cuenta la rotación. El problema de la convección con rotación es de enorme importancia geofísica, pues está presente desde el núcleo terrestre hasta la atmósfera. Su estudio teórico fue abordado por Chandrasekhar [5] en la década de los sesenta, quien realizó el análisis de estabilidad lineal, y posteriormente por Veronis [6], que desarrolló el primer estudio no lineal. La fuerza de Coriolis inhibe el comienzo de la convección, pero añade características nuevas. En concreto, para tasas de rotación suficientemente elevadas aparece un estado de caos espacio–temporal al inicio de la convección, que puede ser analizado perturbativamente mediante ecuaciones de tipo Ginzburg–Landau. El mecanismo de la inestabilidad fue descrito por Küppers y Lortz [7]. Estos autores descubrieron que, superado un valor crítico de la rotación, un conjunto de rollos se desestabiliza por la acción de otro con el que forman un ángulo cercano a los 60° . Debido a la isotropía, el nuevo conjunto de rollos es también inestable y se produce una dinámica persistente. Busse y Heikes [8] confirmaron experimentalmente esta inestabilidad, y propusieron un modelo de tres ecuaciones de amplitud acopladas que reproducía algunas propiedades importantes de la inestabilidad. Posteriormente, Tu y Cross [9] extendieron el modelo añadiendo gradientes espaciales para reproducir los dominios de rollos de distintas orientaciones observados experimentalmente. Además se han encontrado otros fenómenos debidos a la rotación, como el caos espiral estudiado por Ecke [10], en el que aparecen espirales que giran en el mismo sentido que la rotación, o la formación de cuadrados [11] al inicio de la convección para tasas de rotación elevadas. Este último hallazgo resulta inesperado y no ha recibido todavía una explicación teórica plausible.

Algunos autores han investigado una extensión natural del modelo de Busse–Heikes [12, 13], considerando en las ecuaciones de amplitud un término que rompe la simetría de reflexión y favorece la aparición de patrones hexagonales. Esto ha permitido estudiar la influencia de la rotación sobre un patrón hexagonal en lugar de sobre rollos. Para diferencias de temperatura grandes se dan variaciones de las propiedades de los fluidos, que se conocen como efectos no–Boussinesq. Éstos hacen que surjan patrones hexagonales al inicio de la convección, formados por tres rollos superpuestos que se describen mediante tres ecuaciones reales acopladas.

La mayoría de los estudios de caos espacio–temporal se han realizado en sistemas que forman rollos. Es de esperar que la dinámica compleja y los defectos que surjan de los hexágonos difieran cualitativamente del caso de rollos, por tratarse de simetrías diferentes. Se ha encontrado que en el estado de hexágonos oscilantes, las perturbaciones finitas pueden excitar defectos dando lugar a un estado de caos espacio–temporal persistente, muy distinto del caos de dominios en rollos [14].

Los hexágonos oscilantes son más adecuados para comparar cuantitativamente el caos de defectos con experimentos, ya que se describen a través de ecuaciones Ginzburg–Landau complejas cuyos coeficientes se pueden calcular directamente de las ecuaciones originales. Estas características indican

que los fluidos con efectos no-Boussinesq en rotación son buenos candidatos para estudiar caos en patrones hexagonales.

La parte I de la tesis está dedicada al estudio de fluidos en convección con rotación en condiciones no-Boussinesq. En el capítulo primero, se detalla la aproximación Oberbeck-Boussinesq y repasamos las ecuaciones hidrodinámicas fundamentales y estabilidad de un fluido en *convección con rotación*. En el capítulo segundo, hacemos una recapitulación de los principales trabajos sobre efectos *no-Boussinesq*. Un modelo sencillo de convección en presencia de efectos no-Boussinesq nos sirve para introducir el formalismo de las ecuaciones de amplitud, y deducir de forma analítica, paso a paso, sus ecuaciones de amplitud con los términos no variacionales asociados. Se determinan las regiones de estabilidad para los hexágonos y rollos con respecto a perturbaciones en su amplitud, así como las condiciones de coexistencia entre ambos patrones. También estudiamos la estabilidad de los hexágonos frente a perturbaciones de larga longitud de onda mediante *la ecuación de la fase*. Se discute la influencia de los términos espaciales no lineales, generados por los efectos no-Boussinesq, en la estabilidad de hexágonos y rollos. En el capítulo tercero, deducimos de forma analítica la ecuación de amplitud de un fluido no-Boussinesq en convección con rotación, a partir de las ecuaciones hidrodinámicas fundamentales. Veremos como la rotación introduce nuevos términos no lineales en la ecuación de amplitud, y determinamos la influencia de la rotación sobre sus coeficientes. Estudiamos la estabilidad de rollos, hexágonos, y el umbral de los hexágonos oscilantes en función de la rotación. Se discute la influencia de la rotación en la ecuación de la fase para los hexágonos, y se determina la estabilidad de los hexágonos frente a perturbaciones de fase de larga longitud de onda y arbitrarias. También contrastamos los rangos de estabilidad obtenidos con simulaciones numéricas de las ecuaciones de amplitud.

En la parte II de la tesis, abordamos otro tipo de inestabilidades termoconvectivas, denominadas inestabilidades termocapilares. Éstas tienen lugar en líquidos sometidos a un gradiente de temperatura a lo largo de su interfase y dan lugar, a diferencia de los problemas estudiados en la primera parte, a *ondas propagativas*. Son importantes en procesos de crecimiento cristalino mediante la técnica de la zona flotante, en procesos de solidificación en metales líquidos, en la producción de películas fotográficas, o en soldaduras metálicas, donde las inestabilidades termocapilares alteran la calidad del producto final.

Cuando una capa líquida abierta al aire se somete a un gradiente vertical de temperatura, la variación de la tensión superficial con la temperatura puede desestabilizar el estado conductivo en reposo del sistema, dando lugar a la convección de Marangoni, como describió Pearson [15] por primera vez, y a la formación de hexágonos en el umbral. Si la capa líquida se somete a un gradiente de temperatura en la dirección de su interfase, el estado base no es estático, sino que forma un flujo estacionario que puede sufrir inestabilidades termocapilares y dar, a menudo, a fenómenos oscilatorios. Estos fenómenos se producen también con un calentamiento localizado en la interfase, debido, por ejemplo, a un haz láser que incide en un líquido absorbente o a un hilo caliente sumergido [16].

Smith y Davis [17] estudiaron por primera vez la estabilidad lineal de una capa líquida sometida a calentamiento lateral, cuando sólo actúan fuerzas termocapilares. Mostraron la existencia de un nuevo tipo de inestabilidad oscilatoria en el umbral conocida como *ondas hidrotermales*, cuyos ángulos de propagación dependen del número de Prandtl. Estas ondas fueron observadas por primera vez por Daviaud y Vince [18] en un aceite de silicona de $0.65 cSt$ ($Pr = 10$).

Las ondas hidrotermales se dan en presencia de un flujo de base capaz de arrastrar las pertur-

baciones. Un flujo es absolutamente inestable si las perturbaciones localizadas se extienden con el tiempo a todo el fluido, y si son arrastradas por la corriente sin afectar al flujo de base se denomina convectivamente inestable. La distinción es importante en múltiples sistemas físicos; por ejemplo, un flujo intenso provoca detrás de un cilindro una zona de inestabilidad absoluta que genera más lejos una serie de oscilaciones periódicas conocidas como vórtices de von Karman. Es necesario distinguir entre la naturaleza absoluta o convectiva de la inestabilidad, porque la evolución de los sistemas depende de ello.

En el capítulo cuarto, hacemos una recopilación de los principales trabajos sobre inestabilidades termocapilares. Tras una introducción al fenómeno, se plantean las ecuaciones de una capa líquida sometida a calentamiento lateral y se estudian sus umbrales convectivos y absolutos. Tratamos de explicar por qué aparecen las ondas hidrotermales y sus propiedades en función de las inestabilidades absolutas.

La extensión de la investigación de los problemas de convección a capas líquidas superpuestas se inició con estudios sobre el manto terrestre, en los que se utilizaba un modelo bicapa para tener en cuenta la discontinuidad de unos 700 km que existe en su composición química [19]. Los sistemas bicapa son considerablemente más ricos que el problema de Bénard de un líquido en contacto con un gas. En particular, debido al acoplamiento de la dinámica de los campos de temperatura y velocidad de ambas capas pueden surgir patrones estacionarios, oscilatorios, o comportamientos más complejos sin contrapartida en sistemas monocapa, como por ejemplo la existencia de puntos de codimensión dos en los que compiten ondas con patrones estacionarios.

El problema de dos líquidos superpuestos sometidos a calentamiento lateral ha recibido bastante menos atención que el más clásico de calentamiento vertical. Este problema se presenta, por ejemplo, en procesos de crecimiento cristalino en los que se usa la técnica del encapsulado líquido. Dada la dificultad de este problema sólo se han realizado algunos trabajos parciales [20, 21, 22]; sin embargo, desde el punto de vista básico, de forma análoga a como los fenómenos termoconvectivos, con gradiente vertical, son muchos más complejos en bicapas que en monocapas es razonable esperar que el estudio de líquidos superpuestos con un gradiente horizontal deparará fenómenos inesperados.

En el capítulo quinto, estudiamos las inestabilidades convectivas de dos capas líquidas inmiscibles superpuestas con un gradiente de temperatura horizontal. Teniendo en cuenta que las fuerzas que actúan son la tensión interfacial y la gravedad, determinamos y discutimos los tipos de flujos de base que se establecen. Se efectúa un análisis de estabilidad con respecto a perturbaciones en dos y tres dimensiones. Discutiremos los mecanismos de inestabilidad, y daremos una interpretación cualitativa de los comportamientos posibles en esa configuración. En algunas situaciones se encuentran puntos de codimensión dos formados por la interacción de dos modos Hopf con diferentes frecuencias y números de onda. En nuestro análisis tomamos algunos líquidos que ya se han utilizado en experimentos de Bénard–Marangoni con calentamiento vertical, con el objetivo de motivar la realización de futuros experimentos.

Parte I

Convección con rotación

Capítulo 1

Ecuaciones de un fluido en convección con rotación

Consideremos una capa de fluido, contenida entre dos planos horizontales de extensión infinita, rotando a velocidad angular constante en torno a un eje fijo. Se calienta el fluido uniformemente por su parte inferior de forma que, superado un umbral, se desarrolla la convección. En ausencia de tensión superficial, ésta se conoce como convección de Rayleigh–Bénard, en la que el fluido se ve sometido a dos efectos antagónicos: uno estabilizante debido a la disipación y otro desestabilizante producido por el empuje arquimediano.

Para describir este sistema, precisamos de las ecuaciones de conservación de la masa, energía y momento. Los efectos de la rotación se introducen a través de la fuerza de Coriolis y la centrífuga [5].

1.1 Ecuaciones básicas

1.1.1 Ecuaciones hidrodinámicas fundamentales

Ecuación de continuidad. Expresa la conservación de la masa. Para un fluido con densidad $\rho = \rho(x, y, z)$ y con velocidad $\mathbf{u} = (u, v, w)$ la conservación de la masa se escribe, en ausencia de fuentes y sumideros, de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.1)$$

desarrollando la divergencia tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (1.2)$$

que en el caso de un fluido incompresible se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

es decir, el campo de velocidades es solenoidal.

Ecuación de balance de momento. La variación de momento de un elemento de volumen $\rho \mathbf{u}$ se debe a la fuerza total que actúa sobre el fluido

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (1.4)$$

donde \mathbf{f} designa las fuerzas externas (gravedad, Lorentz, etc.) y las internas quedan englobadas en el tensor de tensiones $\boldsymbol{\tau}$, cuya forma depende del tipo de fluido. Este tensor contiene dos contribuciones: una debida a la presión termodinámica p y otra a las tensiones viscosas χ_{ij}

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \chi_{ij} \quad (1.5)$$

La ley de Newton es una relación constitutiva lineal entre la tensión y las deformaciones que, para un fluido incompresible, establece que

$$\chi_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.6)$$

siendo η la viscosidad dinámica. Si la viscosidad es constante, sustituyendo esta relación en (1.4) se obtiene

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.7)$$

que corresponde a la forma original de las *ecuaciones de Navier–Stokes* (NS).

Ecuación de la energía. De manera análoga, se deduce la ecuación de conservación de la energía como un balance entre el flujo total de energía a través de la superficie de un elemento de volumen, y el cambio en la suma de energías cinética, potencial, y de disipación que experimenta. Para un fluido incompresible, la ecuación de estado relaciona la energía interna y la temperatura $\mathcal{U}_{int} = c_p T$, siendo c_p el calor específico a presión constante. La ecuación de conservación se expresa como

$$\rho \frac{\partial c_p T}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla c_p T = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (1.8)$$

donde Φ indica la disipación viscosa. Además consideramos los efectos de dilatación en la densidad a través de la ecuación de estado

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (1.9)$$

siendo α el coeficiente de dilatación y T_0 una temperatura de referencia.

1.1.2 Ecuaciones hidrodinámicas en convección con rotación

La relación entre las velocidades en un sistema inercial F y otro en rotación R a velocidad angular constante Ω está dada por

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_F}{Dt} \right)_F = \left(\frac{D\mathbf{u}_F}{Dt} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_F \quad (1.10)$$

donde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ es la derivada material, y para las aceleraciones se tiene

$$\mathbf{a}_F = \mathbf{a}_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.11)$$

donde $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_R$ es la aceleración de Coriolis y $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ la aceleración centrífuga. Sustituyendo las expresiones anteriores en (1.4) la ecuación de movimiento en el sistema de referencia en rotación resulta ser

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \nabla \tau + \frac{\rho}{2} \nabla (|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2) - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \quad (1.12)$$

donde hemos eliminado el subíndice R por claridad. Para el caso incompresible la ecuación anterior se convierte en

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \frac{\rho}{2} \nabla (|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2) - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.13)$$

Por último, debemos señalar que las ecuaciones de continuidad y de energía son invariantes bajo rotaciones por tratarse de magnitudes escalares.

1.1.3 Aproximación de Oberbeck–Boussinesq

Las ecuaciones de los fluidos se simplifican considerablemente en muchas situaciones prácticas aplicando la llamada aproximación de Oberbeck–Boussinesq (OB), que a continuación discutimos:

- Los efectos de la dilatación son despreciables debido a que α es muy pequeño. Por ejemplo, para un gas perfecto $\alpha = \frac{1}{T}$, por tanto a temperatura ambiente $\alpha \sim 2 \times 10^{-3} K^{-1}$, y para líquidos típicos $\alpha \sim 5 \times 10^{-4} K^{-1}$. Por tanto, para diferencias térmicas en el fluido de $10 K$ las dilataciones están en torno al uno por ciento, lo que permite suponer la incompresibilidad. Sin embargo hay una excepción: la dilatación ha de ser considerada en el término de flotabilidad de las ecuaciones de movimiento, debido a que $\delta\rho \mathbf{f}$ puede ser grande en comparación con el término advectivo $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$.
- Las propiedades físicas del fluido, viscosidad dinámica η , conductividad térmica λ , calor específico c_p , y dilatación α no varían con la temperatura.
- El término de disipación viscosa Φ es despreciable frente al de conducción térmica si los gradientes de velocidades no son muy grandes.

Estas aproximaciones son aplicables a flujos lentos y gradientes pequeños, siempre que no se considere la propagación de ondas de sonido.

Con la aproximación OB las ecuaciones de continuidad, movimiento, y energía se escriben

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.14a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{1}{2} \nabla (|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.14b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (1.14c)$$

donde $\kappa = \lambda/\rho_0 c_p$ es la difusividad térmica, $\nu = \eta/\rho_0$ la viscosidad cinemática, y consideraremos como única fuerza externa la gravedad $\mathbf{f} = -g \hat{\mathbf{z}}$.

1.2 Análisis lineal de un fluido en convección con rotación

1.2.1 Adimensionalización de las ecuaciones

Las ecuaciones de los fluidos tienen un gran número de parámetros, que pueden ser reducidos mediante el análisis adimensional. Para ello tomamos como referencia las siguientes escalas: longitud h , velocidad κ/h , temperatura $\frac{\kappa\nu}{\alpha gh^3}$, tiempo h^2/κ , y presión $\rho\kappa\nu/h^2$.

El teorema II de Buckingham afirma que el número de números adimensionales independientes es igual al de parámetros constantes menos el número de magnitudes fundamentales. En convección con rotación nos encontramos con seis parámetros constantes ($h, \alpha g, \Omega, \nu, \kappa, \rho$) y tres magnitudes fundamentales (masa, longitud, tiempo) que nos permiten construir tres números adimensionales. Los que se utilizan con mayor frecuencia son:

Número de Rayleigh: representa la relación del efecto desestabilizante de la fuerza de empuje frente al estabilizante de los efectos disipativos (viscosidad y difusividad).

$$Ra = \frac{g\alpha\beta h^4}{\kappa\nu} \quad (1.15)$$

Número de Prandtl: es la relación entre las escalas de tiempo de la difusión viscosa y la difusión térmica

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (1.16)$$

Número de Taylor: proporciona la relación entre la fuerza centrífuga y la fuerza viscosa

$$Ta = \frac{4\Omega^2 h^4}{\nu^2} \quad (1.17)$$

Con las anteriores definiciones expresamos las ecuaciones (1.14a–1.14c) en forma adimensional

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.18a)$$

$$Pr^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p - f_{eff} \hat{\mathbf{z}} + (T - T_0) \hat{\mathbf{z}} - Ta^{1/2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.18b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (1.18c)$$

donde $f_{eff} = \frac{g h^3}{\nu \kappa}$. En las anteriores ecuaciones hemos despreciado el término no lineal de fuerza centrífuga, pues aunque no contribuye al análisis lineal introduce complicaciones importantes en los cálculos no lineales. De este modo las ecuaciones son válidas cuando la rotación es lenta y el término de fuerza centrífuga es menos influyente que el de la gravedad, es decir

$$\Omega^2 r \ll g \quad (1.19)$$

Para un experimento típico con $r \sim 5 \text{ cm}$ [23], la mayor tasa de rotación que se alcanza es $\Omega = 0.7 \text{ Hz}$, por lo tanto $\Omega^2 r / g \approx 0.1$, en consonancia la condición (1.19).

En lo sucesivo, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, supondremos que el eje de rotación coincide con la vertical.

1.2.2 Solución conductiva

La solución más simple de las ecuaciones hidrodinámicas corresponde a un estado estacionario, donde el fluido está en reposo con respecto al sistema de referencia en rotación, y la temperatura solo varía en la vertical, es decir se encuentra en un estado de rotación rígida. La ecuación de la energía toma la forma

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.20)$$

y por tanto el perfil de temperaturas viene dado por

$$T = -Ra z + T_0 \quad (1.21)$$

teniendo en cuenta la ecuación de movimiento, la distribución de presiones del estado conductivo, en forma adimensionalizada, es

$$p = p_0 - f_{eff} z - \frac{z^2 Ra}{2} \quad (1.22)$$

1.2.3 Ecuaciones de evolución de las perturbaciones y linealización

Cualquier sistema físico real sufre perturbaciones de distinta índole. Analizamos la estabilidad de la solución conductiva frente a perturbaciones infinitesimales

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}' \quad (1.23a)$$

$$T = T_0 - Ra z + \theta' \quad (1.23b)$$

$$p = p_0 - f_{eff} z - \frac{z^2 Ra}{2} + p' \quad (1.23c)$$

en adelante suprimimos las primas por claridad. Sustituyendo en (1.18a-1.18c) se obtienen las ecuaciones de evolución para las perturbaciones [6]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.24a)$$

$$Pr^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \theta \hat{\mathbf{z}} + T_a^{1/2} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.24b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = Ra w + \nabla^2 \theta \quad (1.24c)$$

y despreciando los términos de orden $\geq O(2)$ se obtienen sus ecuaciones linealizadas

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.25a)$$

$$Pr^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \theta \hat{\mathbf{z}} + T_a^{1/2} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.25b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Ra w + \nabla^2 \theta \quad (1.25c)$$

Como p se determina conociendo \mathbf{u} y θ en (1.25b), el término ∇p se puede eliminar aplicando el operador rotacional a esta ecuación. Tras aplicar el operador rotacional dos veces a la ecuación

(1.25b) proyectamos las ecuaciones obtenidas sobre el eje z , de modo que se obtiene un sistema de dos ecuaciones para las componentes verticales de la velocidad w y de la vorticidad $\zeta = \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \mathbf{u}$, que junto con (1.25c) permiten reescribir el sistema (1.25) en función de tres variables

$$Pr^{-1} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial t} = \nabla^4 w + \nabla_h^2 \theta - T_a^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (1.26a)$$

$$Pr^{-1} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nabla^2 \zeta + T_a^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.26b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Ra w + \nabla^2 \theta \quad (1.26c)$$

Estas expresiones resultan más útiles para realizar un análisis de estabilidad.

1.2.4 Condiciones de contorno

Mecánicas

Supongamos el fluido confinado entre los planos $z = 0$ y $z = 1$, la condición de adherencia exige entonces que

$$z = 0, 1 \rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.27)$$

siendo \mathbf{n} un vector unitario normal a la superficie. Si los contornos son *superficies libres* no actuarán tensiones tangenciales, por tanto

$$z = 0, 1 \rightarrow \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.28)$$

Teniendo en cuenta la forma del tensor de esfuerzos, y que la componente vertical de la velocidad es nula en la superficie $w = 0$, la condición anterior se traduce en

$$z = 0, 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1.29)$$

y tras usar la ecuación de continuidad obtenemos

$$z = 0, 1 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (1.30)$$

Por último, de (1.29) se deduce que la vorticidad vertical ha de verificar en una superficie libre la siguiente condición

$$z = 0, 1 \rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (1.31)$$

Térmicas

Además de las condiciones mecánicas, hemos de conocer cómo se realiza el transporte de calor a través de las superficies horizontales que limitan el fluido. Si la superficie es *conductora* la temperatura permanece fija en la interfase, con lo que las perturbaciones de temperatura se han de anular $\theta = 0$.

1.3 Análisis lineal: caso libre-libre

Resumimos a continuación el análisis lineal de estabilidad de Chandrasekhar [5] en un sistema con superficies libres y perfectamente conductoras. Las perturbaciones se descomponen de la forma $S(z)f(x, y, t)$, donde $S(z)$ es una función que verifica las condiciones de contorno, y la parte horizontal $f(x, y, t)$ se puede expresar como una suma de componentes de Fourier al suponer que el sistema es de extensión horizontal infinita

$$f(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) \exp i(k_x x + k_y y) dk_x dk_y \quad (1.32)$$

Las componentes de Fourier $f_k(t)$ se toman de la forma $c_k \exp(\omega t)$, donde ω es la tasa de crecimiento del modo k . Por tanto, se buscan soluciones de las ecuaciones linealizadas de la forma

$$w = F(z) \exp [i(k_x x + k_y y) + \omega t] \quad (1.33a)$$

$$\theta = \Theta(z) \exp [i(k_x x + k_y y) + \omega t] \quad (1.33b)$$

$$\zeta = Z(z) \exp [i(k_x x + k_y y) + \omega t] \quad (1.33c)$$

sustituyéndolas en (1.26a–1.26c) obtenemos

$$(\partial_{z^2} - k^2)(\partial_{z^2} - k^2 - Pr^{-1}\omega)F(z) - T_a^{1/2} \partial_z F(z) = \Theta(z)k^2 \quad (1.34a)$$

$$(\partial_{z^2} - k^2 - Pr^{-1}\omega)Z(z) = -T_a^{1/2} \partial_z F(z) \quad (1.34b)$$

$$(\partial_{z^2} - k^2 - \omega)\Theta(z) = -Ra F(z) \quad (1.34c)$$

donde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

El estado conductivo se reemplaza por uno de convección estacionaria cuando $\omega = 0$, de modo que las ecuaciones anteriores se pueden reducir en el umbral a la forma

$$[(\partial_{z^2} - k^2)^3 + T_a \partial_{z^2}] F(z) = -Ra k^2 F(z) \quad (1.35)$$

que es independiente del número de Prandtl. Para las condiciones de contorno libres (1.30-1.31) y conductoras ($\theta = 0$) en las superficies horizontales, se encuentra para la ecuación (1.35) una solución de la forma $F(z) = C \sin n\pi z$, donde C es una constante y n un entero, y sustituyéndola en (1.35) se llega a la familia de curvas marginales

$$Ra = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3 + n^2\pi^2 T_a}{k^2} \quad (1.36)$$

la más baja de las cuales corresponde a $n = 1$. Si se usa la definición $k^2 = \pi^2 x$ es posible expresar esta última curva marginal como

$$Ra = \pi^4 x^{-1} \left[(1+x)^3 + \frac{T_a}{\pi^4} \right] \quad (1.37)$$

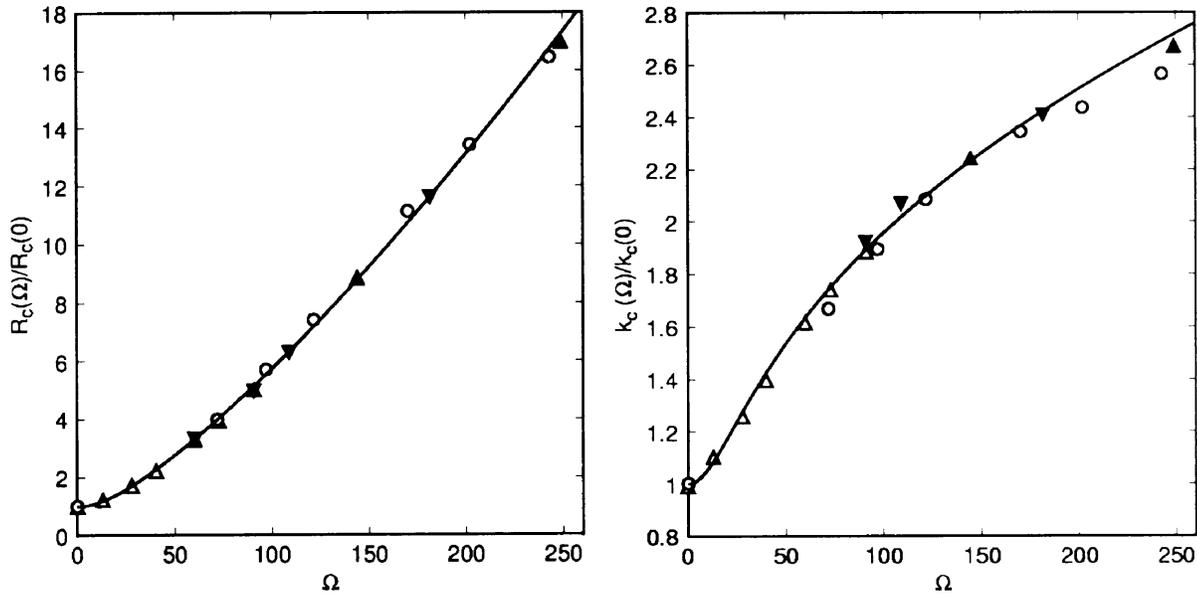


Figura 1.1: Números de Rayleigh críticos $Ra_c(\Omega)/Ra_c(0)$ (figura de la izquierda) y números de onda críticos $k_c(\Omega)/k_c(0)$ (figura de la derecha) en función de la velocidad angular al inicio de la convección. Los puntos experimentales corresponden al agua ($Pr = 5.4$, círculos abiertos), Argón a 20 bares, ($Pr = 0.68$, triángulos abiertos), Argón a 30 bares ($Pr = 0.69$, triángulos negros invertidos), a Argón a 40 bares ($Pr = 0.695$, triángulos negros derechos). Se aprecia que los resultados experimentales coinciden con los del análisis lineal (línea negra continua) para un sistema de extensión infinita. Bajaj *et al.* [11].

cuyo mínimo fija el umbral. La posición del número de Rayleigh crítico depende del número de Taylor a través de la relación

$$2x^3 + 3x^2 = 1 + \frac{T_a}{\pi^4} \quad (1.38)$$

De las relaciones (1.37) y (1.38) se tiene que la rotación retarda el inicio de la convección de Rayleigh–Bénard. El experimento de Bajaj *et al.* [11], cuyos resultados reproducimos en la Fig. 1.1, muestra que los cálculos de la teoría lineal proporcionan unos valores en total acuerdo con los experimentos, además pone de manifiesto la independencia del umbral y número de onda con respecto al número de Prandtl.

Mencionemos que cuando $Pr < 0.67$ los autovalores de (1.34) pueden ser imaginarios, lo cual da lugar a una bifurcación de tipo oscilatorio. Sin embargo, nosotros nos restringiremos a $Pr \rightarrow \infty$, hipótesis plausible para fluidos con viscosidad del orden de la del agua, y no será válida para metales fundidos.

Capítulo 2

Efectos no–Boussinesq

Hemos visto en el capítulo precedente las ecuaciones para un fluido en convección con rotación en la aproximación Oberbeck–Boussinesq, que deja de ser válida cuando alguna propiedad varía sensiblemente con la temperatura. Esta situación se conoce como convección no–Boussinesq (NB).

En este capítulo exponemos las características de los fenómenos NB, introducimos el formalismo de las ecuaciones de amplitud, y estudiamos un modelo hidrodinámico simplificado debido a Segel [24] que nos permite captar las propiedades básicas de la convección NB. Para ello, llevamos a cabo un análisis débilmente no lineal, introducimos la ecuación de la fase para los patrones hexagonales, y estudiamos la estabilidad no lineal de rollos y hexágonos.

2.1 Introducción

La convección térmica en una capa horizontal de fluido calentada por abajo conduce habitualmente a patrones extendidos espacialmente cuando se sobrepasa un valor crítico de calentamiento. En los experimentos de convección de Rayleigh–Bénard se observa un patrón de rollos al inicio de la convección. Sin embargo, cuando se rompe la simetría vertical con respecto a un plano a mitad de altura de la capa, la convección se manifiesta en forma de celdas hexagonales. Esa rotura de simetría vertical sucede, por ejemplo, cuando no es válida la aproximación OB (efectos NB) o con una tensión superficial dependiente de la temperatura (convección de Bénard–Marangoni). En estos casos la convección aparece tras una bifurcación subcrítica, caracterizada por una transición discontinua entre el estado conductivo y el convectivo (véase la Fig. 2.1). Los efectos NB son responsables de fenómenos de histéresis entre hexágonos y rollos, y entre el estado conductivo y hexágonos; en la Fig. 2.2 se muestra esta última transición en un experimento en CO_2 de Bodenschatz *et al* [25], en el que aparecen hexágonos subcríticos. También dan lugar a fenómenos de coexistencia entre hexágonos y rollos, como se muestra en la Fig. 2.3 en un experimento de Pampaloni *et al.* [26] con agua, en el que los hexágonos y rollos son simultáneamente estables. En otros trabajos experimentales se ha tratado la variación del número de Rayleigh crítico en 4He en condiciones no–Boussinesq [27], transiciones entre hexágonos y cuadrados en glicerina, en la cual la viscosidad varía fuertemente con la temperatura [28], o defectos penta-hepta en patrones hexagonales [29], por citar algunos ejemplos. En presencia de efectos no variacionales, como los gradientes no lineales en las ecuaciones de amplitud, no está asegurada la existencia de un estado estacionario, como ponen de manifiesto las espirales rotantes estables encontradas en CO_2 a presión

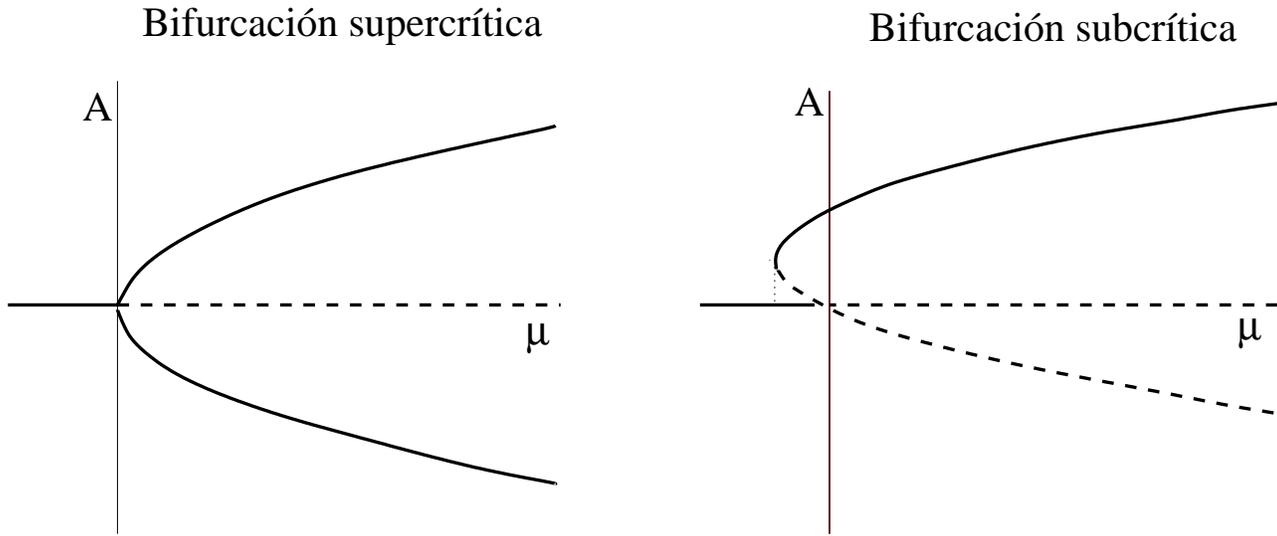


Figura 2.1: Bifurcaciones supercrítica (izquierda) y subcrítica (derecha). Las líneas continuas son estados estables, mientras que las discontinuas representan los inestables. La bifurcación supercrítica es característica de la convección OB. Mientras que los efectos NB dan lugar a una subcrítica, y con ella a fenómenos de biestabilidad e histéresis.

[25]. Assenheimer y Steinberg [30] hallaron una prueba concluyente de la importancia de los efectos no variacionales, debidos a efectos no-Boussinesq, en experimentos de SF_6 (aprovechando la cercanía al punto crítico gas líquido), en los que observaron dianas (targets), espirales rotantes y estados con ambas estructuras incluso al aumentar el número de Prandtl, descartando de este modo los efectos no potenciales debidos al flujo medio (que escalan como P_r^{-1}). Así pues es necesaria la determinación de los términos no variacionales.

El trabajo teórico más completo sobre convección NB, en ausencia de modulaciones espaciales, se debe a Busse [31]. Quien estudia una capa líquida de extensión horizontal infinita, considerando variaciones (a primer orden) en todas las propiedades del líquido y el efecto de un número de Prandtl finito. Un resultado importante de este estudio es la cuantificación de la separación de la aproximación OB mediante un parámetro \mathcal{P} definido como

$$\mathcal{P} = \sum_{i=0}^4 \mathcal{P}_i \gamma_i \quad (2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= -\frac{(\rho_{inf} - \rho_{sup})}{\bar{\rho}}, & \gamma_1 &= -\frac{(\alpha_{inf} - \alpha_{sup})}{\bar{\alpha}}, & \gamma_2 &= -\frac{(\nu_{inf} - \nu_{sup})}{\bar{\nu}}, \\ \gamma_3 &= -\frac{(\lambda_{inf} - \lambda_{sup})}{\bar{\lambda}}, & \gamma_4 &= -\frac{(c_{p_{inf}} - c_{p_{sup}})}{\bar{c}_p} \end{aligned} \quad (2.2)$$

los subíndices inf y sup se refieren a los valores en el fondo (caliente) y en la superficie (fría) de la

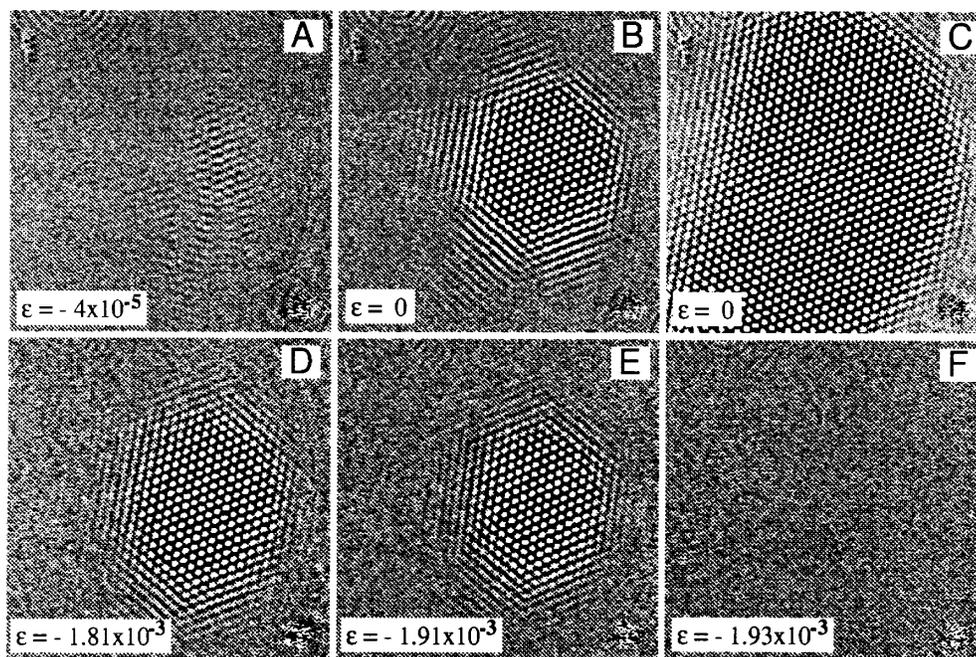


Figura 2.2: Histéresis entre el estado conductivo y hexágonos en $C O_2$ (21.8 bares). (A) Fluctuaciones previas al inicio de la convección. (B) Aparición de hexágonos. (C) Desarrollo de los hexágonos al desaparecer los transitorios. (D)-(F) efecto de la disminución del calentamiento. Bodenschatz *et al.* [25].

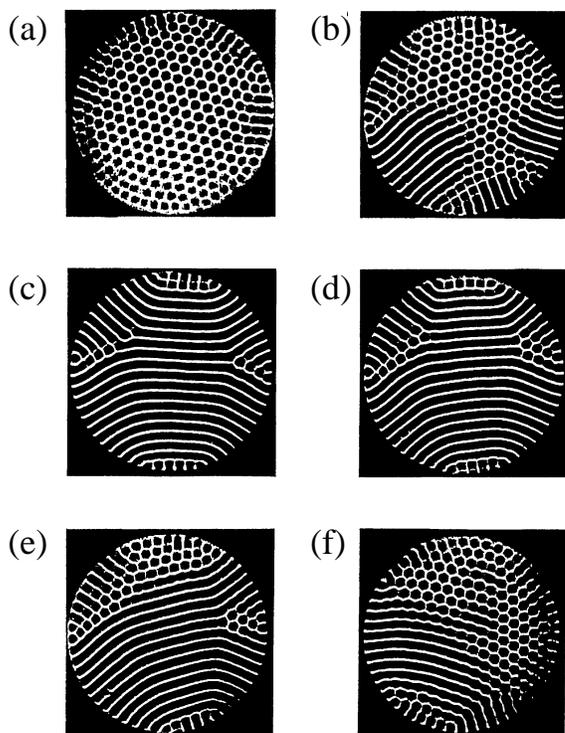


Figura 2.3: Transición entre hexágonos y rollos en agua. (a) ($\mu = 0.015$) Patrón hexagonal regular. (b) ($\mu = 0.035$) Tres sistemas de rollos con diferente orientación invaden la celda. (c) ($\mu = 0.14$) Existen algunas fronteras de grano donde pervive la simetría hexagonal. Las figuras (d) ($\mu = 0.110$), (e) ($\mu = 0.050$), (f) ($\mu = 0.035$) muestran el efecto de la disminución del calentamiento, los hexágonos invaden el patrón desde las fronteras de grano para recuperar el estado original. Pampaloni *et al.* [26].

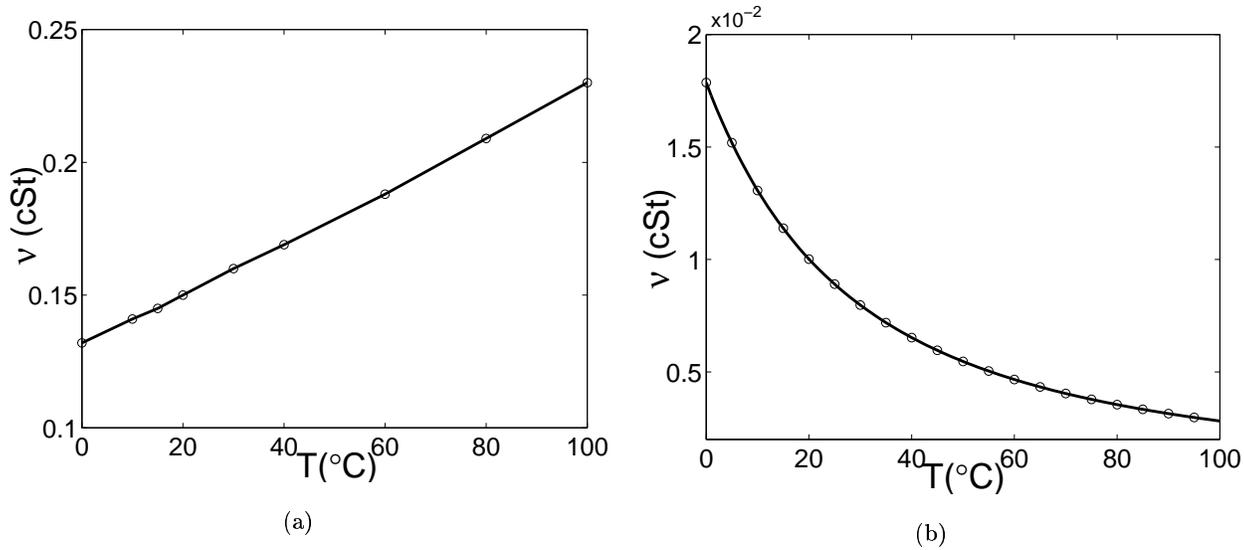


Figura 2.4: Variaciones de la viscosidad del aire (izquierda) y del agua (derecha) con la temperatura.

celda convectiva, respectivamente, y la tilde se refiere a valores medios. Los coeficientes calculados por Busse¹ son

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_0 &= 2.676 - 0.361/Pr \\
 \mathcal{P}_1 &= -6.631 - 0.772/Pr \\
 \mathcal{P}_2 &= 2.765 \\
 \mathcal{P}_3 &= 9.54 \\
 \mathcal{P}_4 &= -6.225 + 3857/Pr
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Una de las propiedades materiales de los líquidos que más varía con la temperatura es la viscosidad. En la Fig. 2.4 se muestra la variación de la viscosidad de dos fluidos comunes, la del aire que aumenta casi linealmente con la temperatura y la del agua que disminuye con ésta. La importancia en la convección de la dependencia de la viscosidad con la temperatura fue puesta en evidencia por Graham [33], quien mostró que la dirección de circulación en celdas hexagonales en los gases es contraria a la de los líquidos, pues en los primeros la viscosidad aumenta con la temperatura, mientras que en los segundos disminuye. Palm *et al.* [34, 35] analizaron teóricamente la convección con efectos NB y la formación de celdas hexagonales para el caso de una viscosidad que varía armónica y linealmente con la temperatura.

Segel [24] propuso un modelo hidrodinámico simplificado sobre convección NB, en el que un parámetro cuantifica la variación de la viscosidad con la temperatura. Este modelo posee los principales ingredientes de la convección Rayleigh-Bénard pero es mucho más simple que las ecuaciones hidrodinámicas.

¹El coeficiente \mathcal{P}_3 fue recalculado por Tschammer [32].

námicas completas. El estudio de los efectos NB en él nos ayudará a abordar en el capítulo siguiente el papel de la rotación en fluidos en convección NB para un caso más complicado.

2.2 Formalismo de las ecuaciones de amplitud

La regularidad de los patrones convectivos permite reducir las ecuaciones básicas en derivadas parciales a un conjunto de ecuaciones en derivadas ordinarias para las amplitudes de los modos críticos.

Consideremos un sistema disipativo gobernado por las ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = L_\mu(\nabla) \cdot \mathcal{U} + N(\nabla, \mathcal{U}) \quad (2.4)$$

donde \mathcal{U} representa un conjunto de campos, $L_\mu(\nabla)$ es un operador lineal, $N(\nabla, \mathcal{U})$ son los términos no lineales, y μ indica un parámetro de control. El estado básico se supone homogéneo, y pierde su estabilidad para un valor crítico de μ determinado por un análisis lineal de estabilidad. Para ello se resuelve el problema de autovalores

$$L_\mu(\nabla) \cdot \mathcal{U} = s \mathcal{U} \quad (2.5)$$

El estado básico es estable cuando todos los autovalores s tienen parte real negativa, y se desestabiliza cuando para algún autovalor (o varios) la parte real se hace positiva. Las correspondientes autofunciones \mathcal{U} del problema lineal con $s = 0$ son los modos críticos. En el umbral de inestabilidad, las amplitudes A de los modos críticos varían en un escala de tiempo mucho más lenta que la de los otros modos, y es posible hacer una separación entre modos amortiguados y excitados atendiendo al valor de la parte real de su tasa de crecimiento. La evolución dinámica de los modos no críticos (rápidos) queda determinada por los críticos (lentos), por lo que aquéllos pueden ser eliminados adiabáticamente [36]. Los modos críticos definen una variedad en el espacio de fases llamada variedad central, levemente atrayente [37], y en la que se desarrolla la dinámica.

Ilustremos este proceso mediante un ejemplo. Sea A_1 un modo crítico y A_2 otro amortiguado que evolucionan según las ecuaciones

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = s_1 A_1 + N_1(A_1, A_2) \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} = s_2 A_2 + N_2(A_1, A_2) \quad (2.6b)$$

Al ser $|s_2| \gg |s_1| \simeq 0$ el segundo modo está muy amortiguado, y después de un rápido transitorio se tiene que

$$A_2 \simeq -\frac{1}{s_2} N_2(A_1, A_2) \quad (2.7)$$

Esta ecuación define la variedad central. Sustituyendo la anterior expresión en (2.6a) se obtiene la relación

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = s_1 A_1 + N(A_1) \quad (2.8)$$

que proporciona la evolución del modo crítico. Éste es el esquema para sistemas confinados cuyo espectro de autovalores es discreto.

En el caso de un solo modo se obtiene la ecuación de Landau, en la que el crecimiento exponencial del modo crítico satura mediante una no linealidad de tipo cúbico

$$\partial_t A = \mu A - A^3 \quad (2.9)$$

donde los coeficientes son reales.

Si se consideran variaciones espaciales lentas, comparadas con la dependencia espacial del estado base, se espera, al orden más bajo, que las modulaciones se comporten de forma difusiva. Esto se puede expresar mediante la ecuación de tipo Ginzburg–Landau

$$\partial_t A = \mu A + \xi_o^2 \partial_{x^2} A - N(A) \quad (2.10)$$

donde ξ_o^2 es la longitud de coherencia.

El formalismo de las ecuaciones de amplitud es el marco adecuado para el estudio de patrones y la competición entre ellos, en sistemas físicos tan dispares como la convección en fluidos [26], la crispación de Faraday [38], las reacciones químicas con patrones de Turing [39], o los medios granulares [40]; por citar algunos ejemplos.

2.3 Modelo no–Boussinesq

En los experimentos sobre convección térmica los patrones no son perfectos, sino que se observan defectos y modulaciones espaciales. Para incluirlos en el formalismo de las ecuaciones de amplitud hay que tener en cuenta las variaciones de los modos normales a gran escala, a través de términos espaciales lineales relacionados con la longitud de coherencia, y de términos espaciales no lineales como los discutidos por Gunaratne *et al.* [41] en reacciones químicas, Kuznetsov *et al.* [42] en convección de Rayleigh–Bénard, o Bragard *et al.* [43] en convección de Bénard–Marangoni. En general, la inclusión de términos espaciales en las ecuaciones de amplitud modifica de forma significativa las regiones de estabilidad y la coexistencia entre distintos patrones.

Nosotros tratamos de estudiar la influencia de las correcciones NB sobre las ecuaciones de amplitud y, en particular, sobre las modulaciones espaciales. Para ello partiremos de una ecuación modelo debida a Segel [24] que simula condiciones NB, y presenta hexágonos estables similares a los de la convección térmica NB. También permite estudiar el acoplamiento entre los modos verticales y horizontales.

La ecuación modelo es

$$W_t - \nabla^6 W + Ra \nabla_h^2 W - 2\Upsilon \cos \pi z W = -W W_z \quad (2.11)$$

donde $\nabla_h^2 = \partial_{x^2} + \partial_{y^2}$, con las condiciones de contorno

$$z = 0 \rightarrow W = W_{zz} = W_{zzzz} = 0 \quad (2.12a)$$

$$W \text{ acotado cuando } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad (2.12b)$$

$$0 \leq z \leq 1 \quad (2.12c)$$

Se pueden establecer las siguientes analogías con el problema de convección térmica: x e y son las coordenadas horizontales y z es la vertical. W se corresponde con la velocidad vertical y Ra es

un parámetro que puede ser identificado con el número de Rayleigh. Por último Υ da cuenta de la variación de la viscosidad con la temperatura, es decir, el término no-Boussinesq. Para $\Upsilon = 0$ se recupera el problema lineal de la convección de Rayleigh-Bénard. El parámetro \mathcal{P} de la teoría de Busse vendría determinado por \mathcal{P}_2 .

2.3.1 Análisis lineal

Las perturbaciones del estado en reposo, $W = 0 + W'$, se pueden desarrollar en modos normales de la forma

$$W'(x, y, z, t) = \exp(s t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) g(z) \quad (2.13)$$

donde

$$g(z) = C_1 \sin \pi z + C_2 \Upsilon \sin 2\pi z + O(\Upsilon^2) \quad (2.14)$$

La función $g(z)$ se obtiene desarrollando la solución vertical exacta en una serie infinita de funciones ortogonales que verifiquen las condiciones de contorno, y truncando a continuación la serie a orden finito. Éste es el denominado método de Galerkin, que utilizamos en lo que sigue tomando senos como funciones de base.

Sustituyendo (2.13) en (2.11) y linealizando nos encontramos con una ecuación que nos permite hallar el valor de las constantes C_1 y C_2 , ya que los coeficientes de $\sin \pi z$ y $\sin 2\pi z$ deben anularse. Despreciando términos de orden superior al segundo en el desarrollo de Galerkin se obtiene

$$C_1(-\pi^6 - k^6 - 3\pi^4 k^2 - 3\pi^2 k^4 + Ra k^2 - s) + C_2 \Upsilon^2 = 0 \quad (2.15a)$$

$$\Upsilon C_1 + C_2(-\Upsilon(2\pi)^6 - \Upsilon k^6 - 3(2\pi)^4 k^2 \Upsilon - 3(2\pi)^2 k^4 \Upsilon + Ra k^2 \Upsilon - \Upsilon s) = 0 \quad (2.15b)$$

que tiene una solución no trivial siempre que se cumpla

$$C_2 = \frac{C_1}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - (k^2 + \pi^2)^3} \quad (2.16)$$

y dos autovalores, uno siempre negativo que no puede inducir una desestabilización del estado en reposo, y otro que puede llegar a ser positivo que viene dado por

$$s = Ra k^2 - (k^2 + \pi^2)^3 + \frac{\Upsilon^2}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - (k^2 + \pi^2)^3} \quad (2.17)$$

Para $s = 0$ se obtiene la curva de estabilidad marginal. El término no-Boussinesq es intrínsecamente pequeño, y como la corrección introducida es cuadrática su efecto sobre la curva marginal es despreciable. El mínimo de esta curva nos permite determinar el valor crítico del número de Rayleigh

$$Ra_c = \frac{27}{4} \pi^4 - 0.02 \pi^{-8} \Upsilon^2 + O(\Upsilon^4) \quad (2.18)$$

que corresponde al número de onda

$$k_c^2 = \frac{\pi^2}{2} - 0.003 \pi^{-10} \Upsilon^2 + O(\Upsilon^4) \quad (2.19)$$

Se puede observar que la corrección NB avanza el inicio de la convección y disminuye el número de onda, aunque el signo de la corrección depende de los efectos NB considerados. De las relaciones anteriores llegamos a que $C_2 \sim 10^{-5}C_1$, y por tanto se justifica el truncamiento a $O(\Upsilon^2)$ en el desarrollo de Galerkin. En este problema los efectos NB rompen la simetría en la dirección vertical a través de Υ en la función $g(z)$.

2.3.2 Análisis débilmente no lineal

El análisis lineal de estabilidad sólo suministra información sobre el inicio de la convección; no informa sobre el tipo de patrones ni sobre su estabilidad una vez ésta se desarrolla. De este modo, el estudio lineal se ha de complementar con un análisis débilmente no lineal, para determinar los patrones estables. A continuación realizamos un análisis de múltiples escalas del modelo de Segel, mostrando cómo se halla la ecuación de amplitud y sus términos espaciales.

Los hexágonos se describen como una superposición de ondas planas

$$H = \sum_{j=1}^3 (A_j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c.) \quad (2.20)$$

donde los vectores de onda satisfacen la condición de resonancia

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

esta selección de vectores de onda corresponde a un patrón hexagonal perfecto, sin embargo, las modulaciones espaciales lentas se incluyen considerando la amplitud como una función envolvente $A_j(x, t)$, que varía en el espacio a escala mucho mayor que la longitud de onda del patrón.

Para realizar el análisis de escalas desarrollamos el campo de velocidad vertical, el número de Rayleigh, y las derivadas en términos de un pequeño parámetro ϵ

$$W = \epsilon W^{(1)} + \epsilon^2 W^{(2)} + \epsilon^3 W^{(3)} + \dots \quad (2.22a)$$

$$Ra = Ra_c + \epsilon Ra^{(1)} + \epsilon^2 Ra^{(2)} + \dots \quad (2.22b)$$

$$\partial_t = \epsilon^2 \partial_\tau + \dots \quad (2.22c)$$

$$\nabla = \nabla_0 + \epsilon \nabla_1 \quad (2.22d)$$

la escala de las derivadas espaciales y temporales se establece por la relación lineal de dispersión.

El operador lineal es

$$L(W) = W_t - \nabla^6 W + Ra \nabla_h^2 W - 2\Upsilon \cos \pi z W \quad (2.23)$$

Si lo desarrollamos en potencias de ϵ

$$L = L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \dots \quad (2.24)$$

obtenemos la jerarquía de ecuaciones

$$L_0 = -\nabla_0^6 + Ra_c \nabla_{h_0}^2 - 2\Upsilon \cos \pi z \quad (2.25a)$$

$$L_1 = -6(\nabla_0 \nabla_1) \nabla_0^4 + 2 Ra_c \nabla_0 \nabla_1 + Ra^{(1)} \nabla_{h_0}^2 \quad (2.25b)$$

$$L_2 = Ra_c \nabla_1^2 + Ra^{(2)} \nabla_{h_0}^2 - 3 \nabla_0^4 \nabla_1^2 - 12(\nabla_0 \nabla_1)^2 \nabla_0^2 + 2 Ra^{(1)} (\nabla_0 \nabla_1) + \partial_\tau \quad (2.25c)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.11), y truncando a orden cúbico encontramos las siguientes ecuaciones a cada orden en ϵ

$$\begin{aligned} O(\epsilon^1) \quad L_0 W^{(1)} &= 0 \\ O(\epsilon^2) \quad L_0 W^{(2)} + L_1 W^{(1)} &= -\partial_{z^2} (W^{(1)} W_z^{(1)}) \\ O(\epsilon^3) \quad L_0 W^{(3)} + L_1 W^{(2)} + L_2 W^{(1)} &= -\partial_{z^2} (W^{(1)} W_z^{(2)} + W^{(2)} W_z^{(1)}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

este conjunto de ecuaciones proporcionan, de manera uniforme, sucesivas aproximaciones de la solución del problema no lineal.

En el apéndice A se muestra de forma detallada la obtención de las soluciones particulares $W^{(2)}$, $W^{(3)}$, y su ecuación de evolución al orden correspondiente. La ecuación de amplitud se obtiene añadiendo las ecuaciones a orden 2 y 3

$$O(A_i^2) \times \epsilon^2 + O(A_i^3) \times \epsilon^3 \quad (2.27)$$

y teniendo en cuenta que

$$A_i = \epsilon A_i^{(1)} + \epsilon^2 A_i^{(2)} \quad (2.28a)$$

$$A_i A_j = \epsilon^2 A_{11}^{(i)} A_{11}^{(j)} + 2\epsilon^3 A_{11}^{(i)} A_{11}^{(j)} + O(\epsilon^4) \quad (2.28b)$$

se llega a la ecuación de evolución de la amplitud

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 Ra_c} \partial_\tau A_1 &= \mu A_1 + v \bar{A}_2 \bar{A}_3 - g |A_1|^2 A_1 - h (|A_2|^2 + |A_3|^2) A_1 \\ &+ \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 A_1 - \frac{2i\alpha_2 k^2 Ra_c}{\sqrt{3}} [\bar{A}_3 \partial_{x_1} \bar{A}_2 + \bar{A}_2 \partial_{x_1} \bar{A}_3] \\ &- ik^2 Ra_c \left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{3}} - \alpha_1 \right) [\bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2 + \bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3] \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde hemos utilizado como notación para las derivadas direccionales $\partial_{x_1} \equiv \hat{n}_1 \cdot \nabla$, con

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 &= (1, 0), & \hat{\tau}_1 &= (0, -1) \\ \hat{n}_2 &= \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}), & \hat{\tau}_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1) \\ \hat{n}_3 &= \frac{1}{2}(-1, -\sqrt{3}), & \hat{\tau}_3 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Simplificamos la expresión (2.29) definiendo una nueva base de vectores unitarios (ver la Fig. 2.5) a lo largo de los cuales descomponemos las modulaciones espaciales

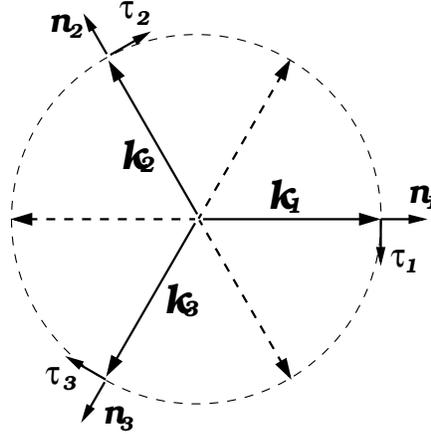


Figura 2.5: Números de onda críticos \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 que satisfacen la condición de resonancia $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{0}$. Los vectores unitarios \hat{n}_i y $\hat{\tau}_i$ son paralelos y perpendiculares a los vectores de onda, respectivamente.

$$\hat{n}_1 = -\frac{1}{2}\hat{n}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\tau}_2, \quad \hat{n}_1 = -\frac{1}{2}\hat{n}_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\tau}_3 \quad (2.31)$$

sustituyendo estas expresiones en (2.29) obtenemos la ecuación de evolución de la amplitud buscada

$$\begin{aligned} \partial_t A_1 &= \mu A_1 + \delta \bar{A}_2 \bar{A}_3 - g_1 |A_1|^2 A_1 - g_2 (|A_2|^2 + |A_3|^2) A_1 \\ &+ \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 A_1 + i \beta_1 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] \\ &+ i \alpha_1 [\bar{A}_2 \partial_{\tau_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{\tau_2} \bar{A}_2] \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde el tiempo se ha renormalizado en la forma $\frac{1}{k^2 Ra_c} \partial_\tau \rightarrow \partial_t$. La expresión analítica de los coeficientes es la siguiente (ver el apéndice A para más detalles):

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\Delta Ra}{Ra_c} \\ \delta &= \frac{1}{k^2 Ra_c} \frac{3 \Upsilon \pi^3}{-(k^2 + \pi^2)^3 + (k^2 + 4\pi^2)^3} \\ g_1 &= \frac{1}{k^2 Ra_c} \left(\frac{1}{32} + \frac{\pi^6}{-4(k^2 + \pi^2)^3 + (4k^2 + 4\pi^2)^3} \right) \\ g_2 &= \frac{1}{k^2 Ra_c} \left(\frac{1}{32} + \frac{2\pi^6}{-(k^2 + \pi^2)^3 + (k^2 + 4\pi^2)^3} + \frac{2\pi^6}{-3(k^2 + \pi^2)^3 + (3k^2 + 4\pi^2)^3} \right) \\ \xi_0^2 &= \frac{12(k^2 + \pi^2)}{Ra_c} \\ \beta_1 &= -\frac{\Upsilon 2}{k^2 Ra_c} \frac{5k^6 + 66k^4\pi^2 + 180k^2\pi^4 + 92\pi^6}{81k\pi(k^4 + 5k^2\pi^2 + 7\pi^4)^2} \\ \alpha_1 &= -\frac{\Upsilon}{k^2 Ra_c} \frac{8k^6 + 111k^4\pi^2 + 315k^2\pi^4 + 185\pi^6}{27\sqrt{3}k\pi(k^4 + 5k^2\pi^2 + 7\pi^4)^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

el coeficiente μ representa el calentamiento y es el parámetro de control del sistema convectivo. Los efectos NB dan lugar a los términos cuadráticos espaciales β_1 y α_1 , y por tanto son responsables de los efectos no variacionales. También rompen la simetría $A \rightarrow -A$ en la ecuación de amplitud a través del término cuadrático δ , que hace posible la aparición de hexágonos. Los términos espaciales cuadráticos satisfacen la simetría hexagonal, como han puesto de relieve Gunaratne *et al.* [41], o Bragard *et al.* [43, 44]. Veremos que los términos espaciales estabilizan patrones hexagonales con números de onda distintos del crítico, y permiten ciertas distorsiones en ellos.

2.3.3 Diagramas de estabilidad

Los patrones convectivos estables en convección NB con paredes conductoras son los rollos y los hexágonos. Estos patrones se pueden obtener como soluciones estacionarias de la ecuación (2.32). A continuación estudiamos la estabilidad de estas soluciones y su coexistencia.

Hexágonos. Las tres amplitudes son iguales y distintas de cero $A_1 = A_2 = A_3 = H \neq 0$. La solución estacionaria y homogénea de (2.32) en forma de hexágonos es

$$H = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(g_1 + 2g_2)\mu}}{2(g_1 + 2g_2)} \quad (2.34)$$

Un sencillo análisis de estabilidad del patrón hexagonal frente a perturbaciones homogéneas en amplitud $A_1 = H + r_1$, $A_2 = H + r_2$, $A_3 = H + r_3$ muestra que los hexágonos son estables en el rango

$$\mu_{sub} = -\frac{\delta^2}{4(g_1 + 2g_2)} < \mu < \mu_H = \frac{\delta^2(g_2 + 2g_1)}{(g_2 - h_1)^2} \quad (2.35)$$

Rollos. Sólo una de las amplitudes es no nula $A_1 = R \neq 0$, $A_2 = A_3 = 0$. La amplitud de los rollos estacionarios y homogéneos viene dada por

$$R = \sqrt{\frac{\mu}{g_1}} \quad (2.36)$$

y los rollos son estables frente a perturbaciones homogéneas $A_1 = R + r_1$, $A_2 = r_2$, $A_3 = r_3$ cuando se verifica la condición

$$\mu > \mu_R = \frac{\delta^2 g_1}{(g_2 - g_1)^2} \quad (2.37)$$

De las regiones de estabilidad anteriores deducimos que la transición entre hexágonos y rollos se observa para valores de μ entre $\mu_R < \mu < \mu_H$. Esto se ha comprobado en algunos experimentos de Rayleigh-Bénard en condiciones NB por Pampaloni *et al.* [26].

2.3.4 Inestabilidades de amplitud

Teniendo en cuenta los términos espaciales en las ecuaciones de amplitud, estudiamos la estabilidad de rollos y hexágonos frente a perturbaciones uniformes en patrones con modificaciones pequeñas $q \ll k_c$ del número de onda crítico $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_c$. Las soluciones periódicas $A = \mathcal{A} \exp i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ corresponden a la banda de patrones con vectores de onda $\mathbf{k}_c - \mathbf{q} \leq \mathbf{Q} \leq \mathbf{q} + \mathbf{k}_c$, y queremos determinar la estabilidad de ésta.

Las amplitudes de los hexágonos estacionarios con un número de onda q distinto del crítico $A_j = H \exp i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}$ vienen dadas por

$$H = \frac{(\delta + 2q\beta_1) + \sqrt{(\delta + 2q\beta_1)^2 + 4(g_1 + 2g_2)(\mu - q^2)}}{2(g_1 + 2g_2)} \quad (2.38)$$

y las de rollos $A_1 = R \exp i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{x}$, $A_2 = A_3 = 0$ por

$$R = \sqrt{\frac{\mu - q^2}{g_1}} \quad (2.39)$$

Efectuamos un análisis de estabilidad similar al de antes, para ello se estudia la estabilidad de los hexágonos frente a perturbaciones de amplitud de la forma $A_j = H(1 + r_j) \exp i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}$. Se obtiene que las estructuras hexagonales son estables si se satisfacen las siguientes condiciones

$$(g_1 - g_2)H^2 + (\delta + 2\beta_1 q)H > 0 \quad (2.40a)$$

$$2(g_1 + 2g_2)H^2 - (\delta + 2\beta_1 q)H > 0 \quad (2.40b)$$

Por su parte, los rollos son estables frente a perturbaciones que favorecen la aparición de hexágonos $A_1 = R(1 + r_1) \exp i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{x}$, $A_2 = r_2 \exp i\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{x}$, $A_3 = r_3 \exp i\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{x}$, si se cumple

$$R^2(g_1 - g_2) + (\delta + 2\beta_1 q)R > 0 \quad (2.41)$$

Resumiendo lo anterior, encontramos que los hexágonos son estables en la región

$$\mu_{sub}(q) = -\frac{(\delta + 2\beta_1 q)^2}{4(g_1 + 2g_2)} + \xi_0^2 q^2 < \mu < \mu_H(q) = \frac{(\delta + 2\beta_1 q)^2(g_2 + 2g_1)}{(g_2 - g_1)^2} + \xi_0^2 q^2 \quad (2.42)$$

y los rollos para

$$\mu > \mu_R(q) = \frac{(\delta + 2\beta_1 q)^2 g_1}{(g_2 - g_1)^2} + \xi_0^2 q^2 \quad (2.43)$$

Los términos espaciales cuadráticos β_1 y α_1 corresponden a dilataciones puras y deformaciones del patrón hexagonal, respectivamente [45]. Es interesante hacer notar que las perturbaciones vistas hasta ahora son dilataciones puras, ya que sus soluciones están afectadas solamente por términos con β_1 . La forma de las curvas de estabilidad, sin considerar los términos espaciales en la ecuación de amplitud, es idéntica a cuando se tienen en cuenta las variaciones espaciales si se efectúan los cambios $\delta \rightarrow \delta + 2\beta_1 q$, $\mu \rightarrow \mu - \xi_0^2 q^2$.

Los rangos de estabilidad de los hexágonos frente a perturbaciones de amplitud se representan en la Fig. 2.6 como líneas continuas abiertas y los de rollos como una línea a tramos punteada y abierta. Se muestran los casos de dos valores diferentes de Υ . Se observa que el primer patrón estable son los hexágonos. Si se aumenta el calentamiento se alcanza la zona de estabilidad de los rollos, que coexisten con los hexágonos hasta un valor de μ a partir del cual son el único patrón estable. Al aumentar el valor del parámetro NB los términos cuadráticos espaciales son mayores y se aprecia una mayor inclinación de las curvas de estabilidad hacia la derecha (el segundo valor de Υ se ha exagerado para ver el efecto con mayor claridad).

2.3.5 Ecuación de la fase

Rollos

Las soluciones no lineales de las ecuaciones de amplitud tienen básicamente dos tipos de modulaciones: de intensidad (el módulo) a longitud de onda constante, o de fase (longitud de onda) a intensidad constante. Ambos tipos de modulaciones están acopladas a través de la ecuación de la amplitud.

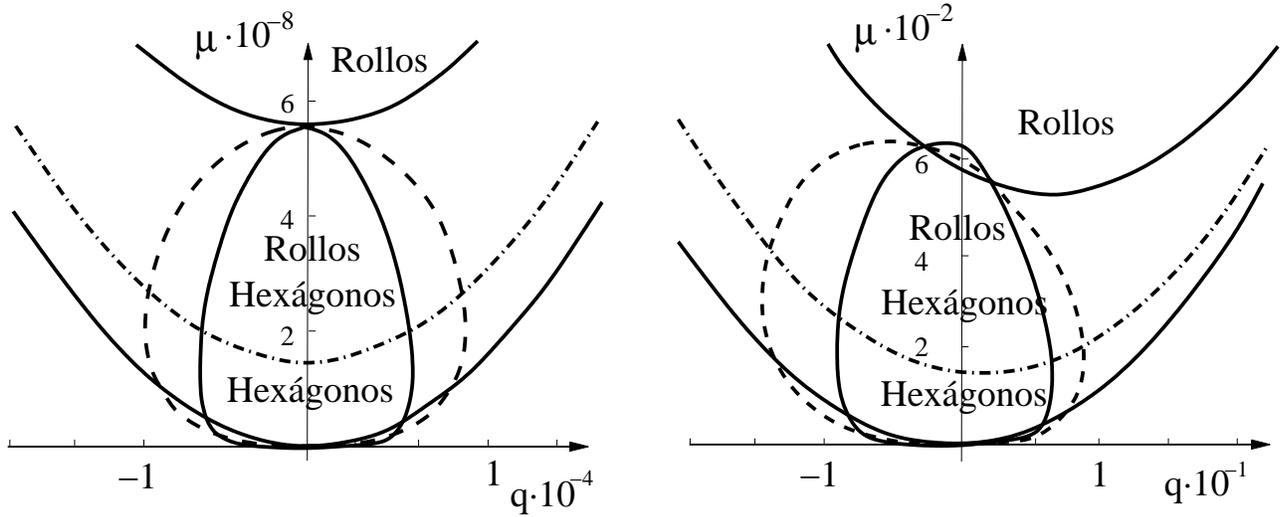


Figura 2.6: Diagramas de estabilidad para $\Upsilon = 0.9$ (figura izquierda) y $\Upsilon = 1000$ (figura derecha). Las líneas cerradas continuas y a tramos corresponden a las inestabilidades de fase $D_{\parallel} = 0$ y $D_{\perp} = 0$, respectivamente. Las líneas abiertas continuas representan las inestabilidades de amplitud para los hexágonos, y la línea a tramos y punteada las de rollos.

Un ejemplo sencillo con el que ilustrar la evolución de las modulaciones de la fase lo proporciona la ecuación de NWS [46] para rollos modulados en la dirección x

$$\partial_t A = \mu A + \xi_0^2 \partial_x^2 A - g_1 A |A|^2 \quad (2.44)$$

La representación compleja de la amplitud $A = R \exp(i\phi)$ se sustituye en la ecuación anterior y separando las partes real e imaginaria se llega a

$$\partial_t R = (\mu - \xi_0^2 (\partial_x \phi)^2) R + \xi_0^2 \partial_x R^2 - g_1 R^3 \quad (2.45a)$$

$$\partial_t \phi = \xi_0^2 \left(\partial_x^2 \phi + 2 \frac{\partial_x R}{R} \partial_x \phi \right) \quad (2.45b)$$

La evolución del módulo está controlada fundamentalmente por el término lineal μR y otro saturante $g_1 R^3$. Las modulaciones espaciales tienen menos importancia y la escala temporal relevante es la distancia al umbral de bifurcación μ . Sin embargo, la evolución de la fase es fundamentalmente difusiva, y la tasa de relajación para la fase es muy lenta para modulaciones espaciales de gran longitud de onda, por lo que podemos eliminar adiabáticamente la variable rápida $\partial_t R$. Además $\partial_x^2 R$ es despreciable frente al resto, de modo que

$$R = \sqrt{\frac{\mu - \xi_0^2 (\partial_x \phi)^2}{g_1}} \quad (2.46)$$

y la evolución del módulo R viene determinada por la dinámica de la fase. Sustituyendo la expresión anterior en (2.45b) obtenemos una ecuación de difusión no lineal para la fase

$$\partial_t \phi = D_{eff} \partial_x^2 \phi \quad (2.47)$$

donde

$$D_{eff} = \xi_0^2 \frac{\mu - 3\xi_0^2 (\partial_x \phi)^2}{\mu - \xi_0^2 (\partial_x \phi)^2} \quad (2.48)$$

La estabilidad frente a perturbaciones de gran longitud de onda dependerá del signo de D_{eff} . Si $D_{eff} < 0$ el patrón es inestable, y si $D_{eff} > 0$ es estable.

Hexágonos

A continuación explicamos las líneas generales para la deducción de la evolución de la dinámica de fase para hexágonos. Los cálculos detallados se hallan en el apéndice B.

Las amplitudes de un patrón hexagonal levemente distorsionado se escriben como $A_j = (H + r_j) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j + \phi_j)$. A partir de estas tres fases (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3), y debido a la condición de resonancia de los vectores de onda, se construye un vector de dimensión 2 de la forma

$$\phi = (\phi_x, \phi_y) = [-(\phi_2 + \phi_3), (\phi_2 - \phi_3)\sqrt{3}] \quad (2.49)$$

por argumentos de simetría se puede probar que la ecuación de evolución de esta fase es la misma para hexágonos que para un sistema isotrópico [47]. La ecuación de tipo difusivo más general para un vector en dos dimensiones es

$$\partial_t \phi = A \nabla (\nabla \cdot \phi) + B \nabla^2 \phi \quad (2.50)$$

además, un vector de onda en dos dimensiones se puede dividir en una parte longitudinal y otra transversal, $\phi = \phi_l + \phi_t$, de manera que $\nabla \times \phi_l = 0$ y $\nabla \cdot \phi_t = 0$. Estas expresiones permiten separar las ecuaciones de evolución como

$$\partial_t \phi_l = D_{\parallel} \nabla^2 \phi_l, \quad \partial_t \phi_t = D_{\perp} \nabla^2 \phi_t \quad (2.51)$$

y la ecuación (2.50) conduce a

$$\partial_t \phi = (D_{\parallel} - D_{\perp}) \nabla (\nabla \cdot \phi) + D_{\perp} \nabla^2 \phi \quad (2.52)$$

llevando a cabo una reducción a la variedad central es posible hallar el valor de los coeficientes

$$D_{\perp} = \frac{\xi_0^2}{4} - \frac{\xi_0^4 q^2}{2a} + \frac{H^2}{8a} (\beta_1 - \sqrt{3}\alpha_1)^2 \quad (2.53a)$$

$$D_{\parallel} = \frac{3\xi_0^2}{4} - \frac{\xi_0^4 q^2}{2a} - \frac{2\xi_0^4 q^2}{b} + \frac{H^2}{8a} (\beta_1 - \sqrt{3}\alpha_1)^2 - \frac{H^2 \beta_1}{b} (\beta_1 + \sqrt{3}\alpha_1) + \frac{\xi_0^2 q H}{b} (3\beta_1 + \sqrt{3}\alpha_1) \quad (2.53b)$$

con

$$a = H^2 (g_1 - g_2) + (\delta + 2\beta_1 q) H > 0 \quad (2.54a)$$

$$b = 2H^2 (g_1 + 2g_2) - (\delta + 2\beta_1 q) H > 0 \quad (2.54b)$$

La estabilidad frente a perturbaciones en la fase está garantizada siempre que se cumpla

$$(D_{\parallel}, D_{\perp}) \geq 0 \quad (2.55)$$

En la Fig. 2.6 se muestran también los diagramas de fase para dos valores de Υ , en este caso como curvas cerradas. La línea continua corresponde a $D_{\parallel} = 0$ y la de tramos a $D_{\perp} = 0$. Las curvas $D_{\parallel} = 0$ y $D_{\perp} = 0$ determinan la estabilidad de una estructura hexagonal regular frente a perturbaciones de fase rectangulares y romboidales, respectivamente [45]. Cerca del umbral las perturbaciones de fase romboidales ($D_{\perp} = 0$) desestabilizan el patrón hexagonal, pero para condiciones supercríticas mayores los hexágonos se desestabilizan por perturbaciones de fase rectangulares ($D_{\parallel} = 0$). Para $\Upsilon = 0.9$ los términos espaciales no lineales son despreciables y las curvas poseen una simetría $q \rightarrow -q$. Cuando los efectos NB son mayores las curvas se inclinan hacia la izquierda, siendo más afectada la correspondiente a perturbaciones transversales. Las regiones de estabilidad para hexágonos y rollos son muy pequeñas, esto se debe a una limitación del modelo que sólo capta características cualitativas de la convección NB.

2.4 Conclusiones

A partir de un modelo simplificado debido a Segel [48], hemos descrito las características más importantes de la convección NB. El modelo se basa en el problema lineal de la convección de Rayleigh-Bénard más un término dando cuenta de efectos NB y otro no lineal simplificado [48]. Como los efectos NB rompen la simetría vertical del sistema, los rollos dejan de ser el primer patrón que aparece cerca del umbral. Se ha comprobado que los efectos NB introducen correcciones cuadráticas en los parámetros críticos que dan lugar a una bifurcación subcrítica que se muestra en forma de hexágonos

Hemos repasado el formalismo de las ecuaciones de amplitud, necesario para estudiar sistemas fuera del equilibrio en los regímenes débilmente no lineales. Por medio de un análisis de múltiples escalas hemos obtenido los coeficientes de las ecuaciones de amplitud del modelo de forma analítica. Se ha estudiado la estabilidad de los patrones hexagonales y rollos frente a perturbaciones de amplitud. Cuando el número de onda del patrón es distinto del crítico existe un banda de números de onda en la que los patrones siguen siendo estables. El rango de estabilidad de los hexágonos aumenta con los efectos NB, en buen acuerdo con lo que sucede en fluidos como agua (efectos NB pequeños [26]) y glicerina (efectos NB grandes [28]). Para valores del calentamiento superiores al umbral, se encuentra una región de coexistencia entre hexágonos y rollos, como también se observa en los experimentos [26].

A partir de la ecuación de la fase para los hexágonos, hemos determinado la estabilidad de los hexágonos frente a perturbaciones en su fase. Los diagramas de fase que obtenemos son cerrados, y la curva de estabilidad de los hexágonos regulares frente a perturbaciones rectangulares está incluida en la de perturbaciones romboidales. El aumento del parámetro NB aumenta también el rango de calentamiento en el que son estables los hexágonos frente a perturbaciones de fase. Los efectos NB dan lugar a dos términos espaciales cuadráticos que rompen la simetría $q \rightarrow -q$ de los diagramas de estabilidad y hacen que las curvas de fase se desplacen hacia números de onda menores.

Capítulo 3

Convección con rotación

En la naturaleza los movimientos convectivos a escala planetaria e incluso estelar se dan unidos a la rotación. Se hallan ejemplos en fenómenos geofísicos, como el movimiento del magma terrestre o la circulación de corrientes oceánicas, y en astrofísicos, como los movimientos en estrellas de tipos espectrales tardíos (totalmente convectivas). Desde un punto de vista más básico, la convección con rotación ha suscitado interés por la presencia de una dinámica persistente, incluso cerca del umbral convectivo, causada por la inestabilidad de Küppers–Lortz [7], en la cual un conjunto de rollos paralelos se desestabiliza por la acción de otro conjunto girado un ángulo de 58° . Esto da lugar a que cambien de orientación con una frecuencia característica. Basado en la proximidad a 60° , Busse y Heikes [8] propusieron un modelo en el que se da una alternancia entre tres modos (ver la Fig. 3.1). Este modelo fue posteriormente ampliado por Tu y Cross [9] incluyendo modulaciones espaciales. Esta descripción ha tenido éxito al explicar el caos de dominios observado en experimentos por Hu *et al.* [49] o Zhong y Ecke [50], y en simulaciones numéricas realizadas por Cross y Hohenberg [51], y Fantz *et al.* [52] en modelos de tipo Swift–Hohenberg.

Soward extendió el modelo teniendo en cuenta una rotura de simetría vertical de reflexión, como la que se produce en convección NB. En este caso se forman hexágonos en el umbral, que se pueden desestabilizar dando lugar a un nuevo estado formado por *hexágonos oscilantes*, en el que las amplitudes varían periódicamente. Se han realizado cálculos teóricos y simulaciones numéricas [53, 54] en los que, partiendo de ecuaciones tipo Ginzburg–Landau, se muestra la aparición de estos estados. Sin embargo, estas ecuaciones no se han deducido de las ecuaciones hidrodinámicas.

A partir de las ecuaciones hidrodinámicas fundamentales, nos proponemos realizar un cálculo analítico de los coeficientes de las ecuaciones de amplitud con todos los términos espaciales para un fluido NB en rotación que presenta una viscosidad linealmente variable con la temperatura. Por simplicidad, efectuamos los cálculos con un solo efecto NB y condiciones de contorno idealizadas. Sin embargo, es de esperar que los resultados sean cualitativamente similares a los que se obtendrían con condiciones de contorno realistas.

Dado que no se han realizado experimentos en este sistema, los resultados resultarán de interés para estimar los parámetros experimentales, velocidad angular y calentamiento, adecuados para estudiar el problema de la convección NB con rotación.

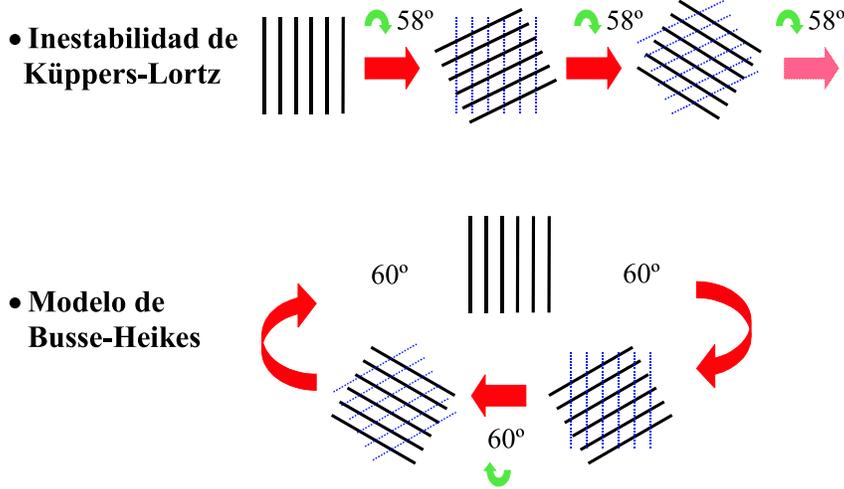


Figura 3.1: La inestabilidad de Küppers–Lortz [7] se produce cuando los rollos forman un ángulo próximo a 60° . Debido a esta proximidad Busse y Heikes [8] propusieron un modelo cerrado con tres modos a 60° .

3.1 Inestabilidad de Küppers–Lortz

Antes de analizar nuestro problema repasamos las principales características de la inestabilidad de Küppers–Lortz.

Küppers y Lortz [7] analizaron el flujo convectivo de un fluido normal en una capa horizontal de extensión infinita, girando a velocidad angular constante para $Pr = \infty$ con condiciones de contorno libre–libre. Realizaron un análisis débilmente no lineal desarrollando los campos en n modos equiespaciados un ángulo constante $\sum_{j=-N}^{+N} A_j \exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x})$, lo que les permitió llegar a un conjunto de ecuaciones de amplitud acopladas

$$\begin{aligned}
 \partial_t A_1 &= \mu A_1 - g_1 |A_1|^2 A_1 - g_2 |A_2|^2 A_1 - g_3 |A_3|^2 A_1 \cdots \\
 \partial_t A_2 &= \mu A_2 - g_1 |A_2|^2 A_2 - g_2 |A_3|^2 A_2 - g_3 |A_4|^2 A_2 \cdots \\
 \partial_t A_3 &= \mu A_3 - g_1 |A_3|^2 A_3 - g_2 |A_4|^2 A_3 - g_3 |A_5|^2 A_3 \cdots \\
 &\vdots \\
 \partial_t A_n &= \mu A_n - g_1 |A_n|^2 A_n - g_2 |A_{n+1}|^2 A_n - g_3 |A_{n+2}|^2 A_n \cdots
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde g_i ($i = 2, 3, \dots$) depende del ángulo entre los modos.

Este sistema presenta una solución estacionaria en forma de rollos

$$A_1 = R \neq 0, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_n = 0 \tag{3.2}$$

con

$$R = \sqrt{\frac{\mu}{g_1}} \tag{3.3}$$

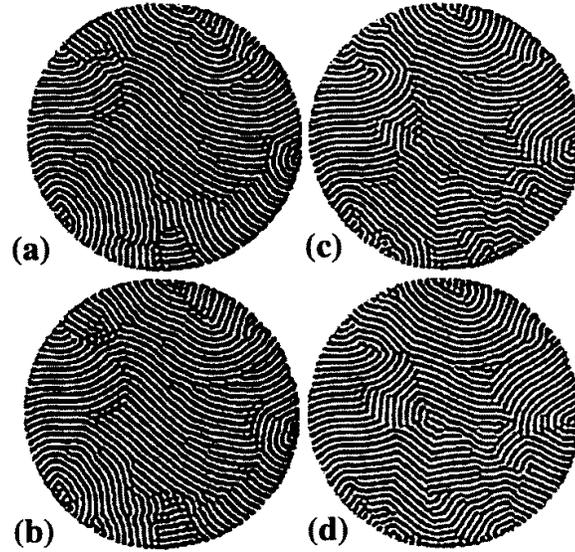


Figura 3.2: Para $T_a > T_{a_{KL}}$ se produce la inestabilidad de Küppers–Lortz. Un patrón de rollos paralelos, con una orientación dada, se vuelve inestable por una perturbación de corta longitud de onda formando un ángulo Θ_{KL} respecto al primer conjunto. Se observa en la secuencia de imágenes a distintos tiempos un patrón compuesto por dominios de rollos, y como algunos dominios van siendo progresivamente sustituidos por otros de distinta orientación. Hu *et al.* [55].

La estabilidad de esa solución se determina suponiendo que sobre ella actúan perturbaciones homogéneas (análisis lineal) $A_1 = R(1 + r_1)$, $A_2 = r_2$, $A_3 = r_3$, ... $A_n = r_n$. Sustituyéndolas en las ecuaciones de amplitud y despreciando correcciones de orden superior se obtiene el problema de autovalores

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \\ \vdots \\ \dot{r}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu(1 - \frac{g_2}{g_1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(1 - \frac{g_{n-1}}{g_1}) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(1 - \frac{g_2}{g_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Los cálculos de Küppers y Lortz demostraron que los rollos se desestabilizan cuando $g_1 > g_i$, ($i = 2, 3, \dots$) y que el valor límite $g_1 = g_i$ ($i \in \{2 \dots n\}$) se alcanza para un valor crítico del número de Taylor de $T_a = 2285$. A partir de ese valor los rollos iniciales son sustituidos por otros girados 58° . A su vez, estos nuevos rollos son inestables, por lo que la dinámica es dependiente del tiempo y no se alcanza un estado estacionario.

Los primeros experimentos en que se observó este fenómeno se deben a Heikes y Busse [8, 56]. En ellos se confirma la existencia de la inestabilidad de Küppers–Lortz (KL), y los patrones resultantes consisten en dominios de rollos, caracterizados por una orientación aproximadamente uniforme en cada dominio. En la Fig. 3.2 se muestra un experimento de Hu *et al.* [55] en CO_2 en el que la evolución temporal se manifiesta como la sustitución de un dominio por otro mediante una propagación de frentes.

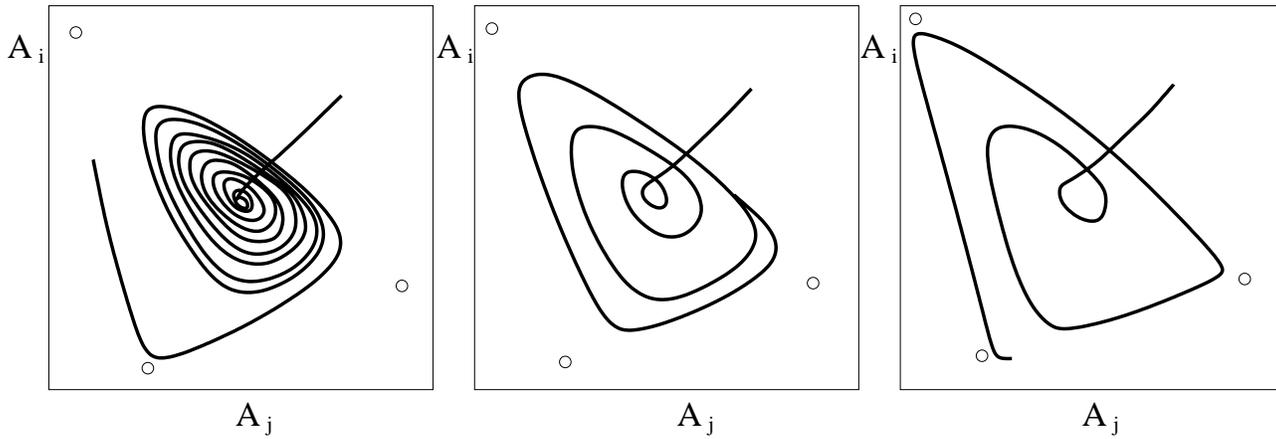


Figura 3.3: Soluciones de las ecuaciones de amplitud en el plano A_i - A_j ($i \neq j$ y $i, j = 1, 2, 3$). La tasa de rotación se mantiene constante y el parámetro de rotura de simetría vertical decrece de izquierda a derecha. El ciclo límite alrededor de la solución hexagonal aumenta hasta degenerar en una órbita heteroclina, cuando colisiona con los modos mixtos (círculos blancos). Adaptado de Millán *et al.* [13].

3.2 Modelo de Busse–Heikes

Puesto que el ángulo de Küppers–Lortz se halla próximo a 60° , Busse y Heikes [8] propusieron un modelo de tres ecuaciones de amplitud acopladas, tipo Lotka–Volterra, una para cada una de las tres orientaciones de rollos (ver la Fig. 3.1)

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= (1 - y_1 - \beta y_2 - \gamma y_3)y_1 \\
 \dot{y}_2 &= (1 - y_2 - \beta y_3 - \gamma y_1)y_2 \\
 \dot{y}_3 &= (1 - y_3 - \beta y_1 - \gamma y_2)y_3
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

con $y_i = |A_i|^2$.

Este sistema se ha dado en llamar *modelo de Busse–Heikes*. Admite ocho puntos fijos: la solución trivial $y_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), hexágonos $y_i = H \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), rollos, y por último tres modos mixtos $y_i \neq y_j \neq y_k \neq 0$. A excepción de los rollos, todos los puntos fijos son inestables.

Los tres puntos fijos de rollos se desestabilizan dando lugar a una conexión heteroclina. En las simulaciones numéricas de estas ecuaciones, Busse y Heikes [8] añadieron ruido de manera que la solución no quede anclada en un punto fijo y evolucione cíclicamente.

Soward [12] amplió el modelo (3.5) incluyendo términos cuadráticos que rompen la simetría de reflexión $A \rightarrow -A$ en las ecuaciones de amplitud (obsérvese que $\dot{y}_i = 2 A_i \dot{A}_i$), como los *efectos NB*. En este caso, además de estabilizarse los hexágonos existe un ciclo límite alrededor de la solución hexagonal. La amplitud de las oscilaciones va aumentando hasta que el ciclo límite colisiona con alguno de los puntos silla de la solución de modos mixtos representados por círculos en la Fig. 3.3, sufriendo una bifurcación global hacia una conexión heteroclina (ver la Fig. 3.3).

3.3 Ecuaciones de amplitud en convección con rotación

3.3.1 Simetrías

Los coeficientes de las ecuaciones de amplitud dependen explícitamente de cada modelo. Sin embargo, la forma de dichas ecuaciones y su tipo de soluciones sólo dependen de las simetrías del sistema físico, como veremos a continuación.

Una estructura hexagonal plana se describe con tres modos cuyos vectores de onda verifican la relación de cierre $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{0}$ con $|\mathbf{k}_i| = k_c$. La amplitud de los campos (temperatura, velocidad, presión, etc.) se escribe como

$$\mathcal{U}(x, y, t) = \sum_{j=1}^3 (A_j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c.) \mathcal{U}_0 \quad (3.6)$$

una vez introducidas estas expresiones en las ecuaciones hidrodinámicas se obtienen las ecuaciones de amplitud que deben preservar sus simetrías.

Las ecuaciones de NS *sin rotación* son invariantes bajo:

Traslaciones espaciales: se traduce en que las ecuaciones de amplitud son invariantes bajo la transformación $A \rightarrow A \exp(i\theta)$, siendo θ una fase arbitraria.

Rotaciones: en el caso hexagonal hace que la ecuación de amplitud sea invariante bajo una permutación cíclica de los índices $A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, A_3 \rightarrow A_1$.

Simetría quiral: las ecuaciones de NS son invariantes bajo una reflexión especular $x \rightarrow -x$ en el plano yz y $y \rightarrow -y$ en el plano xz , lo cual implica para las amplitudes invariancia bajo las transformaciones $(A_1 \rightarrow \overline{A_1}, A_2 \rightarrow \overline{A_3}, A_3 \rightarrow \overline{A_2})$ y $(A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3, A_3 \rightarrow A_1)$, respectivamente.

Los efectos NB rompen la simetría Oberbeck–Boussinesq ($z \rightarrow -z, w \rightarrow -w, \theta \rightarrow -\theta$) en las ecuaciones de NS, y por tanto la simetría $A \rightarrow -A$ en las ecuaciones de amplitud.

Así, la forma normal a orden cúbico que verifica las anteriores simetrías (vista en el capítulo anterior en otro contexto) es:

$$\partial_t A_1 = \mu A_1 + \delta \overline{A_2} \overline{A_3} - g_1 |A_1|^2 A_1 - g_2 (|A_2|^2 + |A_3|^2) A_1 \quad (3.7)$$

Efecto de la rotación: La aceleración de Coriolis $T_a^{1/2} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}}$ destruye la simetría de reflexión $x \rightarrow -x$, o, $y \rightarrow -y$, lo que a su vez rompe la simetría $A_2 \leftrightarrow A_3$ en la forma normal anterior, de manera que el término $g_2 (|A_2|^2 + |A_3|^2) A_1$ ha de ser reemplazado por

$$g_{2,1} |A_2|^2 A_1 + g_{2,2} |A_3|^2 A_1 \quad (3.8)$$

Pero la simetría de rotación se mantiene, con lo que el sistema ha de ser invariante bajo

$$u \rightarrow -u, \quad \Omega \rightarrow -\Omega \quad (3.9)$$

o equivalentemente

$$v \rightarrow -v, \quad \Omega \rightarrow -\Omega \quad (3.10)$$

Como fue apuntado por Busse y Heikes [8], esta simetría hace que los nuevos coeficientes sean de la forma $g_{2,1} = g_2 + \varpi$, $g_{2,2} = g_2 - \varpi$, de modo que la forma normal más general para un fluido en convección con rotación es

$$\partial_t A_1 = \mu A_1 + \delta \bar{A}_2 \bar{A}_3 - g_1 |A_1|^2 A_1 - (g_2 - \varpi) |A_2|^2 A_1 - (g_2 + \varpi) |A_3|^2 A_1 \quad (3.11)$$

donde el coeficiente ϖ es una función impar de la velocidad angular. Cuando la rotación se anula recuperamos la ecuación (3.7).

3.4 Estabilidad de patrones

Para estudiar la selección de patrones y la banda estable de números de onda, hemos de introducir modulaciones espaciales que respeten las simetrías de las ecuaciones originales. Reteniendo en la ecuación de amplitud términos hasta orden cúbico se tiene

$$\begin{aligned} \partial_t A_1 = & \mu A_1 + \delta \bar{A}_2 \bar{A}_3 - g_1 |A_1|^2 A_1 - (g_2 + \varpi) |A_2|^2 A_1 - (g_2 - \varpi) |A_3|^2 A_1 \\ & + \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 A_1 + i\beta_1 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] + i\beta_2 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] \\ & + i\alpha_1 [\bar{A}_2 \partial_{\tau_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{\tau_2} \bar{A}_2] \end{aligned} \quad (3.12)$$

La rotación hace que los términos de la forma $\beta[\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2]$ se desglosen en dos partes: $(\beta + \bar{\beta})(\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3) + (\beta - \bar{\beta})(\bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2)$, donde $\bar{\beta}$ es proporcional a la velocidad angular y da cuenta de la rotura de la simetría quiral. Agrupando obtenemos que el coeficiente β_2 es una función impar de la rotación y es consistente con todas las simetrías de las ecuaciones de NS con rotación. El significado físico de los términos β_1 y α_1 fue discutido en el capítulo anterior; en cuanto a β_2 , Echebarria y Riecke [54] demostraron que corresponde a una variación relativa de dos vectores de onda de los tres que conforman una estructura hexagonal.

Las ecuaciones anteriores tienen una solución hexagonal homogénea $|A_1| = |A_2| = |A_3| = H$ para valores del número de onda $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c + \mathbf{q}$

$$H = \frac{\delta + 2\beta_1 q + \sqrt{(\delta + 2\beta_1 q)^2 + 4(g_1 + 2g_2)(\mu - q^2)}}{2(g_1 + 2g_2)} \quad (3.13)$$

Un análisis de estabilidad lineal de esta solución muestra que los hexágonos son estables frente a rollos en la región

$$\mu_{sub} = \xi_0^2 q^2 - \frac{(2\beta_1 q + \delta)^2}{4(g_1 + 2g_2)} < \mu < \mu_H = \xi_0^2 q^2 + \frac{(2g_1 + g_2)(2\beta_1 q + \delta)^2}{(g_2 - g_1)^2} \quad (3.14)$$

Las curvas de estabilidad de los hexágonos no dependen explícitamente del signo de la rotación, y por tanto sólo pueden depender de potencias pares de la velocidad angular. Los hexágonos presentan un umbral en el valor subcrítico μ_{sub} y se desestabilizan con un autovalor que atraviesa el eje imaginario en $\mu = \mu_H$ (ver la Fig. 3.4). La frecuencia de la bifurcación tipo Hopf es proporcional al coeficiente ϖ y viene dada por

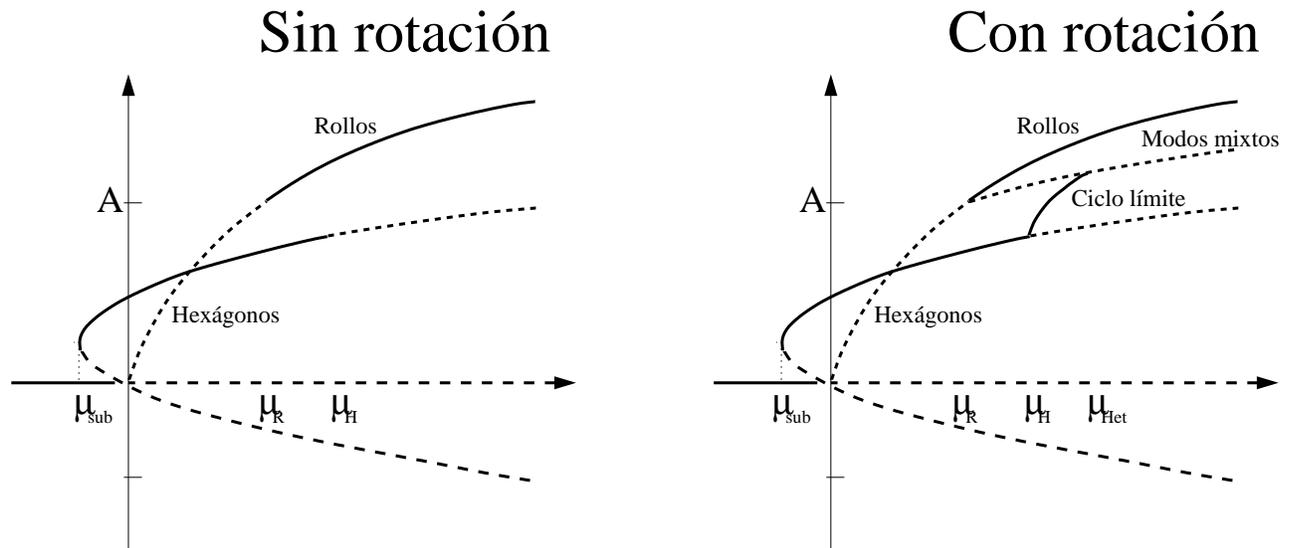


Figura 3.4: Diagrama de bifurcaciones de hexágonos y rollos frente al parámetro de control μ . Los hexágonos aparecen tras una bifurcación subcrítica para μ_{sub} y desaparecen a través de una bifurcación tipo Hopf a partir de μ_H , dando lugar a *hexágonos oscilantes* caracterizados por una variación periódica de sus tres amplitudes. Cuando se incrementa el parámetro de control, los hexágonos oscilantes degeneran en una conexión heteroclina en μ_{Het} , y a partir de ese punto sólo los rollos son estables. Estos últimos surgen tras una bifurcación supercrítica en μ_R y pueden ser biestables con los hexágonos. Superado μ_H sólo son posibles dos tipos de patrones: hexágonos oscilantes o rollos.

$$\omega_c = \frac{2\sqrt{3}\varpi(2\beta_1 q + \delta)^2}{(g_2 - g_1)^2} \quad (3.15)$$

Tras la bifurcación de Hopf las tres amplitudes de los hexágonos oscilan de forma estable con una diferencia de fase de 120° entre sí. Este ciclo límite formado por tres amplitudes que oscilan se denomina *hexágono oscilante* [54]. Al aumentar suficientemente μ , el ciclo límite colisiona con la órbita heteroclina que conecta los tres puntos fijos de los modos mixtos en μ_{Het} (Fig. 3.4). A partir de ese momento el único patrón estable es el de rollos. Estos son inestables al inicio de la convección, pero cuando el parámetro de control vale

$$\mu_R = \xi_0^2 q^2 + \frac{g_1 (2\beta_1 q + \delta)^2}{(g_1 - g_2 - \varpi)(g_1 - g_2 + \varpi)} \quad (3.16)$$

se estabilizan y se convierten en el único patrón estable para $\mu > \mu_{Het}$. Como descubrieron Küppers y Lortz, en el caso $\delta = 0$ cuando $|\varpi| < g_1 - g_2$ los rollos nunca son estables y el ciclo límite sobrevive para cualquier μ . En la Fig. 3.4 se presentan dos ejemplos de diagramas de bifurcación posibles para el caso quiral y con rotación.

Dependiendo de los valores críticos podemos encontrar en $\mu_R \leq \mu \leq \mu_H$ una región de biestabilidad entre rollos y hexágonos. También es posible otro rango de biestabilidad entre hexágonos oscilantes y rollos cuando $\mu_R \leq \mu \leq \mu_{Het}$.

3.5 Ecuaciones de amplitud de un fluido no-Boussinesq: viscosidad dependiente de la temperatura

Hemos discutido la forma de la ecuación de amplitud en un fluido NB en convección con rotación usando argumentos generales. Sin embargo, en un problema concreto el valor de sus coeficientes se ha de calcular explícitamente. Nosotros consideramos el caso de un fluido con viscosidad linealmente dependiente con la temperatura [35], con condiciones de contorno libre-libre y superficies conductoras que nos permitan cálculos analíticos. Por ello tomamos

$$\nu_f = \nu_0(1 - \Upsilon(T - T_0)) \quad (3.17)$$

donde ν_0 es la viscosidad medida a mitad de profundidad de la celda convectiva y Υ es una constante.

En el contexto del análisis de Busse [31] el parámetro de rotura de simetría vertical es $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 \gamma_2 = 2.765\Upsilon(T_2 - T_1)$, donde T_2 y T_1 son las temperaturas superior e inferior de la celda convectiva.

En el capítulo anterior, mostrábamos en las gráficas 2.4(a) y 2.4(b) la dependencia de la viscosidad con la temperatura de dos fluidos comunes: aire y agua. Para el aire se pueden analizar las diferencias térmicas que se deseen debido a que la viscosidad depende casi linealmente con la temperatura y satisface la Ec. (3.17). El agua presenta variaciones casi lineales de la viscosidad para temperaturas entre 60° y $100^\circ C$, o a intervalos de hasta $10-15^\circ C$ a temperaturas inferiores.

En el primer capítulo vimos que la ecuación de conservación de momento de un fluido tiene la forma general

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \tau + \rho \mathbf{f} \quad (3.18)$$

donde el tensor de tensiones se expresa mediante

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \chi_{ij} \quad (3.19)$$

siendo p la presión termodinámica y χ_{ij} las tensiones viscosas. Un fluido incompresible, newtoniano viscoso, está definido por la relación constitutiva

$$\chi_{ij} = \nu_f \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.20)$$

El perfil conductivo de temperaturas perturbado viene dado por

$$T = T_0 - \beta z + \theta \quad (3.21)$$

donde β es una constante y θ una perturbación de la temperatura. Ahora hemos de considerar por tanto que $\nu_f = \nu_0(1 - \Upsilon(-\beta z + \theta))$. Sustituyendo las anteriores expresiones en $\nabla \cdot \tau$ se obtiene para la fuerza por unidad de volumen

$$(\nabla \tau)_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu_0 \nabla^2 u_i - \nu_0 \Upsilon \beta \frac{\partial z u_{ik}}{\partial x_k} + \nu_0 \Upsilon \frac{\partial \theta u_{ik}}{\partial x_k} \quad (3.22)$$

donde denotamos

$$u_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (3.23)$$

Las ecuaciones (1.24a–1.24c) y los cálculos anteriores nos permiten escribir las ecuaciones adimensionalizadas para las perturbaciones

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.24a)$$

$$Pr^{-1} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \theta \hat{\mathbf{z}} + T_a^{1/2} \epsilon_{ijk} u_j \hat{\mathbf{z}}_k + \nabla^2 u_i - \Gamma Ra \frac{\partial z u_{ik}}{\partial x_k} + \Gamma \frac{\partial \theta u_{ik}}{\partial x_k} \quad (3.24b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = Ra w + \nabla^2 \theta \quad (3.24c)$$

donde los índices repetidos se suman.

Para superficies libres las condiciones de contorno mecánicas son

$$z = -1/2, 1/2 \rightarrow w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

y si además son conductoras

$$z = -1/2, 1/2 \rightarrow \theta = 0 \quad (3.26)$$

Hemos introducido el parámetro adimensional

$$\Gamma = \frac{\nu_0 \Upsilon \kappa}{\alpha g h^3} = h\beta \Upsilon / Ra \quad (3.27)$$

y el tensor antisimétrico ϵ_{ijk} viene dado por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si hay algún índice repetido} \\ 1 & \text{si } i = 1, j = 2, k = 3 \text{ o permutación par de los índices} \\ -1 & \text{permutación impar de los índices anteriores} \end{cases} \quad (3.28)$$

Para simplificar, consideraremos el límite $Pr \rightarrow \infty$ que se cumple para líquidos con viscosidad del orden o mayor que la del agua aproximadamente, y excluye a metales líquidos. Aplicando dos veces el operador rotacional de forma similar a como hicimos en la sección (1.2.3) llegamos a un sistema más útil para realizar un análisis perturbativo

$$-\nabla^4 w - \nabla_h^2 \theta + T_a^{1/2} \partial_z \zeta - \Gamma Ra (-\nabla_h^2 \zeta_z + \partial_z (\partial_x \zeta_x + \partial_y \zeta_y)) = -\Gamma (-\nabla^2 \psi_z + \partial_z (\partial_x \psi_x + \partial_y \psi_y)) \quad (3.29a)$$

$$-T_a^{1/2} \frac{\partial w}{\partial z} - \nabla^2 \zeta + \Gamma Ra (\partial_x \zeta_y - \partial_y \zeta_x) = \Gamma (\partial_x \psi_y - \partial_y \psi_x) \quad (3.29b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla^2 \theta - Ra w = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \quad (3.29c)$$

con las condiciones de contorno

$$z = -1/2, 1/2 \rightarrow w = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \theta = 0 \quad (3.30)$$

donde hemos utilizado la siguiente notación

$$\boldsymbol{\varsigma} = \left(\frac{\partial(z u_{xk})}{\partial x_k}, \frac{\partial(z u_{yk})}{\partial x_k}, \frac{\partial(z u_{zk})}{\partial x_k} \right) \quad (3.31a)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \left(\frac{\partial(\theta u_{xk})}{\partial x_k}, \frac{\partial(\theta u_{yk})}{\partial x_k}, \frac{\partial(\theta u_{zk})}{\partial x_k} \right) \quad (3.31b)$$

Vale la pena destacar como los efectos NB introducen numerosos términos no lineales en las Ecs. (3.29a) y (3.29b) que hacen muy complejo este problema.

3.5.1 Análisis lineal

Las soluciones lineales de las ecuaciones que verifican las condiciones de contorno son las siguientes

$$w = \cos \pi z \left(\sum_{j=1}^3 A_j \exp i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. \right) \quad (3.32a)$$

$$\theta = a_0 \cos \pi z \left(\sum_{j=1}^3 A_j \exp i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. \right) \quad (3.32b)$$

$$\zeta = \zeta_0 \sin \pi z \left(\sum_{j=1}^3 A_j \exp i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. \right) \quad (3.32c)$$

con $\zeta_0 = -\frac{\pi T_a^{1/2}}{\pi^2 + k^2}$ y $a_0 = \frac{Ra_c}{\pi^2 + k^2}$. Vimos en el capítulo primero que la curva marginal viene dada por

$$Ra = \frac{(\pi^2 + k^2)^3 + \pi^2 T_a}{k^2} \quad (3.33)$$

además los términos en Γ lineales producen correcciones cuadráticas que se pueden despreciar.

3.5.2 Análisis débilmente no lineal

Llevamos a cabo un análisis de múltiples escalas, por lo que desarrollamos los campos de temperatura, velocidad, el número de Rayleigh, y las derivadas en términos de un parámetro pequeño ϵ

$$\theta = \epsilon \theta^{(1)} + \epsilon^2 \theta^{(2)} + \epsilon^3 \theta^{(3)} + \dots \quad (3.34a)$$

$$\mathbf{u} = \epsilon \mathbf{u}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{u}^{(2)} + \epsilon^3 \mathbf{u}^{(3)} + \dots \quad (3.34b)$$

$$Ra = Ra_c + \epsilon Ra^{(1)} + \epsilon^2 Ra^{(2)} + \dots \quad (3.34c)$$

$$\partial_t = \epsilon^2 \partial_\tau + \dots \quad (3.34d)$$

$$\nabla = \nabla_0 + \epsilon \nabla_1 + \dots \quad (3.34e)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (3.29) y truncando a orden cúbico encontramos las siguientes relaciones para los tres primeros órdenes

$$\begin{aligned}
O(\epsilon^1) \quad L_0 X^{(1)} &= 0 \\
O(\epsilon^2) \quad L_0 X^{(2)} + L_1 X^{(1)} &= N_2 \\
O(\epsilon^3) \quad L_0 X^{(3)} + L_1 X^{(2)} + L_2 X^{(1)} &= N_3
\end{aligned} \tag{3.35}$$

donde $X = (w, \theta, \zeta)$, el operador lineal se supone de la forma

$$L = L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2 + \dots \tag{3.36}$$

y el operador ψ se desarrolla de la forma

$$\psi = \epsilon^2 \psi_{00}^{11} + \epsilon^3 (\psi_{00}^{12} + \psi_{00}^{21} + \psi_{10}^{11} + \psi_{01}^{11}) + \dots \tag{3.37}$$

donde

$$\psi_{00}^{11} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{x_0 k_0}^{(1)})}{\partial x_{0_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{y_0 k_0}^{(1)})}{\partial x_{0_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{z k_0}^{(1)})}{\partial x_{0_k}} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

$$\psi_{00}^{12} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{x_0 k_0}^{(2)})}{\partial x_{0_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{y_0 k_0}^{(2)})}{\partial x_{0_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{z k_0}^{(2)})}{\partial x_{0_k}} \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

$$\psi_{00}^{21} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\theta^{(2)} u_{x_0 k_0}^{(1)})}{\partial x_{0_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(2)} u_{y_0 k_0}^{(1)})}{\partial x_{0_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(2)} u_{z k_0}^{(1)})}{\partial x_{0_k}} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

$$\psi_{10}^{11} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{x_0 k_0}^{(1)})}{\partial x_{1_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{y_0 k_0}^{(1)})}{\partial x_{1_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{z k_0}^{(1)})}{\partial x_{1_k}} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

$$\psi_{01}^{11} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{x_1 k_1}^{(1)})}{\partial x_{0_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{y_1 k_1}^{(1)})}{\partial x_{0_k}}, & \frac{\partial(\theta^{(1)} u_{z k_1}^{(1)})}{\partial x_{0_k}} \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

En el apéndice C se recogen las expresiones de los operadores lineales L_0, L_1, L_2 y no lineales N_2, N_3 . También se detalla la obtención de la ecuación de amplitud con todos sus coeficientes. La expresión obtenida a través del tedioso análisis perturbativo tiene la misma forma que la deducida con los argumentos de simetría:

$$\begin{aligned}
\partial_t A_1 &= \mu A_1 + \delta \bar{A}_2 \bar{A}_3 - g_1 |A_1|^2 A_1 - (g_2 + \varpi) |A_2|^2 A_1 - (g_2 - \varpi) |A_3|^2 A_1 \\
&+ \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 A_1 + i\beta_1 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] + i\beta_2 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] \\
&+ i\alpha_1 [\bar{A}_2 \partial_{\tau_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{\tau_2} \bar{A}_2]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

en la que los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\Delta Ra}{Ra_c}, \\
\zeta_0^2 &= \frac{12(k^2 + \pi^2)}{Ra_c}, \\
\delta &= -\Gamma \frac{8}{3k^2\pi} \left(k^4 + \pi^4 + \frac{\pi^2 k^2}{2} + \zeta_0^2 \left(\frac{k^2}{2} - \pi^2 \right) \right), \\
g_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 + \pi^2}, \\
g_2 &= \frac{1}{Ra_c k^2} \left(\frac{a_0 k^2}{2} + \frac{3}{4} \pi \theta_{21} + \frac{\pi}{4} \theta_{22} \right), \\
\varpi &= \frac{1}{Ra_c k^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \theta_{21} \zeta_0 - \frac{\sqrt{3}}{4} \theta_{22} \zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{4} k^2 a_0 \zeta_{21} - \frac{\sqrt{3}}{4} k^2 a_0 \zeta_{22} \right),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{4(a_0 k^2 - Ra_c) \theta^\Gamma \Gamma}{3\pi a_0 k Ra_c} - \frac{8(k^2 + 4\pi^2) W^\Gamma \Gamma}{3\pi a_0 k} + \frac{8\zeta^\Gamma \Gamma \zeta_0}{3\pi a_0 k} - \frac{2\zeta^\nabla \left(-1 + \frac{2\pi^2}{k^2}\right) \Gamma \zeta_0}{3\pi i} - \frac{2(k^2 - 2\pi^2) W^\nabla \Gamma \zeta_0^2}{3\pi i k^2} \\
&+ \frac{2\theta^\nabla \Gamma (2k^4 + 2\pi^2(\pi^2 - \zeta_0^2) + k^2(\pi^2 + \zeta_0^2))}{3\pi a_0 i k^2} - \frac{2\Gamma (2\pi^2(\pi^2 - \zeta_0^2) + k^2(4\pi^2 + 3\zeta_0^2))}{3\pi k^3} \\
\beta_2 &= \frac{2\zeta^\nabla (k^2 - 2\pi^2) \Gamma}{2(-7k^2 + 4\pi^2) \Gamma \zeta_0} - \frac{4(k^2 - 2\pi^2) \theta^\nabla \Gamma \zeta_0}{3\pi k^3} - \frac{2(-k^2 + 2\pi^2) W^\nabla \Gamma \zeta_0}{\sqrt{3} i k^2} \\
\alpha_1 &= -\frac{4(a_0 k^2 - Ra_c) \theta^\Gamma \Gamma}{\sqrt{3} a_0 \pi k Ra_c} - \frac{8(k^2 + 4\pi^2) W^\Gamma \Gamma}{\sqrt{3} a_0 \pi k} + \frac{8\zeta^\Gamma \Gamma \zeta_0}{\sqrt{3} a_0 \pi k} - \frac{2\Gamma (8k^4 + k^2 \pi^2 + 2\pi^4 - 2\pi^2 \zeta_0^2)}{\sqrt{3} \pi k^3} \\
&- \frac{2W^\nabla \Gamma (2k^4 + 2\pi^2(\pi^2 - \zeta_0^2) + k^2(\pi^2 + \zeta_0^2))}{\sqrt{3} \pi i k^2}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta^\nabla &= 2ik \frac{\zeta_0^2 Ra_c - a_0(k^2 + \pi^2)(1 + \zeta_0^2)}{Ra_c^2 + (k^2 + \pi^2)^2(1 + \zeta_0^2)}, & w^\nabla &= -2ik \frac{a_0^2 + \zeta_0^2}{a_0 Ra_c + (k^2 + \pi^2)(1 + \zeta_0^2)} \\
\zeta^\nabla &= \frac{2ik\zeta_0}{a_0 Ra_c + (k^2 + \pi^2)(1 + \zeta_0^2)} \\
A_{21}^i &= \frac{3\pi k^2 a_0}{2((k^2 + 4\pi^2)^3 + 4\pi^2 T_a - Ra_c k^2)} \overline{A}_{11}^{(j)} \overline{A}_{11}^{(k)}, & (\mathbf{k}_i = -\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_k) \\
A_{22}^{ij} &= \frac{\pi k^2 a_0}{2((3k^2 + 4\pi^2)^3 + 4\pi^2 T_a - 3Ra_c k^2)} A_{11}^{(i)} \overline{A}_{11}^{(j)}, & \theta_{20} = \frac{a_0 k^2}{2\pi} (|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2) \\
\theta_{21}^i &= A_{21}^i \frac{(k^2 + 4\pi^2)^3 + 4\pi^2 T_a}{k^2 + 4\pi^2}, & \theta_{22}^{ij} &= A_{22}^{ij} \frac{(3k^2 + 4\pi^2)^3 + 4\pi^2 T_a}{3k^2 + 4\pi^2} \\
\zeta_{21}^i &= -\frac{2\zeta_0(k^2 + \pi^2) A_{21}^i}{k^2 + 4\pi^2}, & \zeta_{22}^{ij} &= -\frac{2\zeta_0(k^2 + \pi^2) A_{22}^{ij}}{3k^2 + 4\pi^2} \\
w^\Gamma &= -\frac{a_0(k^2 + \pi^2)(k^2 + 4\pi^2)^2 + 2a_0(k^2 + \pi^2)(-k^2 + 2\pi^2)\zeta_0^2}{2(k^2 + 4\pi^2)^3 - 2k^2 Ra_c + 8\pi^2 T_a} \\
\theta^\Gamma &= -\frac{a_0 Ra_c (k^2 + \pi^2)}{2(k^2 + 4\pi^2)} \frac{(k^2 + 4\pi^2)^2 + 2(k^2 - 2\pi^2)\zeta_0^2}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - k^2 Ra_c + 4\pi^2 T_a} \\
\zeta^\Gamma &= \frac{-a_0 \zeta_0}{2(k^2 + 4\pi^2)} \frac{2(k^2 + \pi^2)^2(k^2 + 4\pi^2)^2 + k^2(k^2 - 2\pi^2) Ra_c - (k^2 - 2\pi^2)(k^2 + 4\pi^2)^3}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - k^2 Ra_c + 4\pi^2 T_a}
\end{aligned}$$

Se puede observar que los coeficientes obtenidos para la ecuación de amplitud respetan las simetrías de la rotación. Así los coeficientes β_1 , α_1 , δ , g_1 , y g_2 dependen de potencias pares de la rotación, mientras que β_2 , y ϖ cambian de signo cuando se invierte el sentido de giro. Por otra parte, al igual que en la ecuación modelo del capítulo anterior, las modulaciones espaciales cuadráticas sólo aparecen

Referencia		$\mu_R \cdot 10^3$	$\mu_H \cdot 10^2$
Palm <i>et al.</i> [35]	(libre-libre)	5.17	1.88
Este trabajo	(libre-libre)	5.27	1.88
Palm <i>et al.</i> [35]	(rígido-rígido)	8.17	2.88
Busse [31]	(rígido-rígido)	8.25	2.81

Tabla 3.1: Valores de los umbrales de inestabilidad para μ_R y μ_H para $\Gamma = 3 \cdot 10^{-4}$.

en presencia de efectos NB. El acoplamiento entre rotación y efectos NB requiere términos cuadráticos y, por tanto, al menos tres modos. Esto hace que la estructura hexagonal resulte natural para estudiar la interrelación entre ambos fenómenos.

Para comprobar la corrección de nuestros cálculos, los hemos comparado con los de Palm *et al.* [35], en ausencia de rotación y sin modulaciones espaciales. Si tomamos $\Gamma = 3 \cdot 10^{-4}$, que equivale a una variación de la viscosidad de $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 0.197$, se tiene los valores de los coeficientes $\delta(0) = 7.54 \cdot 10^{-3}$, $g_1(0) = 0.0338$ y $g_2(0) = 0.0529$. Después de introducir estos valores en las Ecs. (3.14)-(3.16) se obtienen los valores de los umbrales que se recogen en la Tab. 3.1. Incluimos también en la tabla los valores de Busse [31] en el caso rígido-rígido. Obtenemos una coincidencia plena con los umbrales de Palm *et al.* [35] para los umbrales de hexágonos y rollos en el caso libre-libre, lo que corrobora nuestros resultados en ausencia de rotación. Cuando comparamos nuestros resultados con los de Busse [31] y Palm *et al.* [35], con condiciones de contorno rígido-rígido distintas a las nuestras, obtenemos que varían cuantitativa pero no cualitativamente con los nuestros.

En la Fig. 3.5 se han representado los coeficientes de la ecuación de amplitud frente a la rotación ($T_a^{1/2}$), normalizados respecto al caso quiral ($T_a^{1/2} = 0$). Observamos que la rotación hace disminuir la longitud de coherencia ξ_0^2 y los coeficientes cúbicos g_1 , g_2 . Sin embargo, los términos NB presentan dos regímenes: uno inicial de disminución con la rotación, y otro de aumento con la rotación para mayores valores de T_a .

En la Fig. 3.6(a) se representan los cocientes $g_1/g_1(0)$, $g_2/g_1(0)$ y $\varpi/g_1(0)$ [†]. Se observa que $g_2 > g_1$ y que la diferencia $g_2 - g_1$ disminuye con la rotación. Cuando ésta supera a ϖ los rollos dejan de ser estables, lo que sucede para $T_{a,KL} = 47.9$, valor que difiere ligeramente del umbral de Küppers-Lortz $T_{a,KL} = 47.8$ debido a que hemos impuesto una orientación de 60° , en lugar del valor exacto de 58.1° .

En la Fig. 3.6(b) se han representado los términos espaciales cuadráticos con respecto a $\delta(0)$ frente a la tasa de rotación: son menores que $\delta(0)$, como cabe esperar de un desarrollo perturbativo. Se observa que, aunque pequeños, no son despreciables y saturan para valores suficientemente altos de la tasa de rotación. El coeficiente β_2 parte del origen, ya que depende del sentido de giro.

El análisis débilmente no lineal es coherente para un intervalo subcrítico pequeño. Esto impone que el término cuadrático ha de ser menor que los cúbicos. En la Fig. 3.7, representamos los valores máximos (hemos escogido el criterio $|v| = g$ por simplicidad) de T_a y Γ para los que es aplicable el formalismo de la ecuación de amplitud. Se observa como para valores bajos de la rotación el intervalo

[†]Hemos representado $-\varpi$ debido a que al estudiar los rangos de estabilidad elegimos la forma en que se presenta convencionalmente la ecuación de amplitud $(g_2 + \varpi)|A_2|^2 A_1 - (g_2 - \varpi)|A_3|^2 A_1$, sin embargo en nuestro problema ϖ es negativo por lo que tomamos $(g_2 + (-|\varpi|))|A_2|^2 A_1 - (g_2 - (-|\varpi|))|A_3|^2 A_1$.

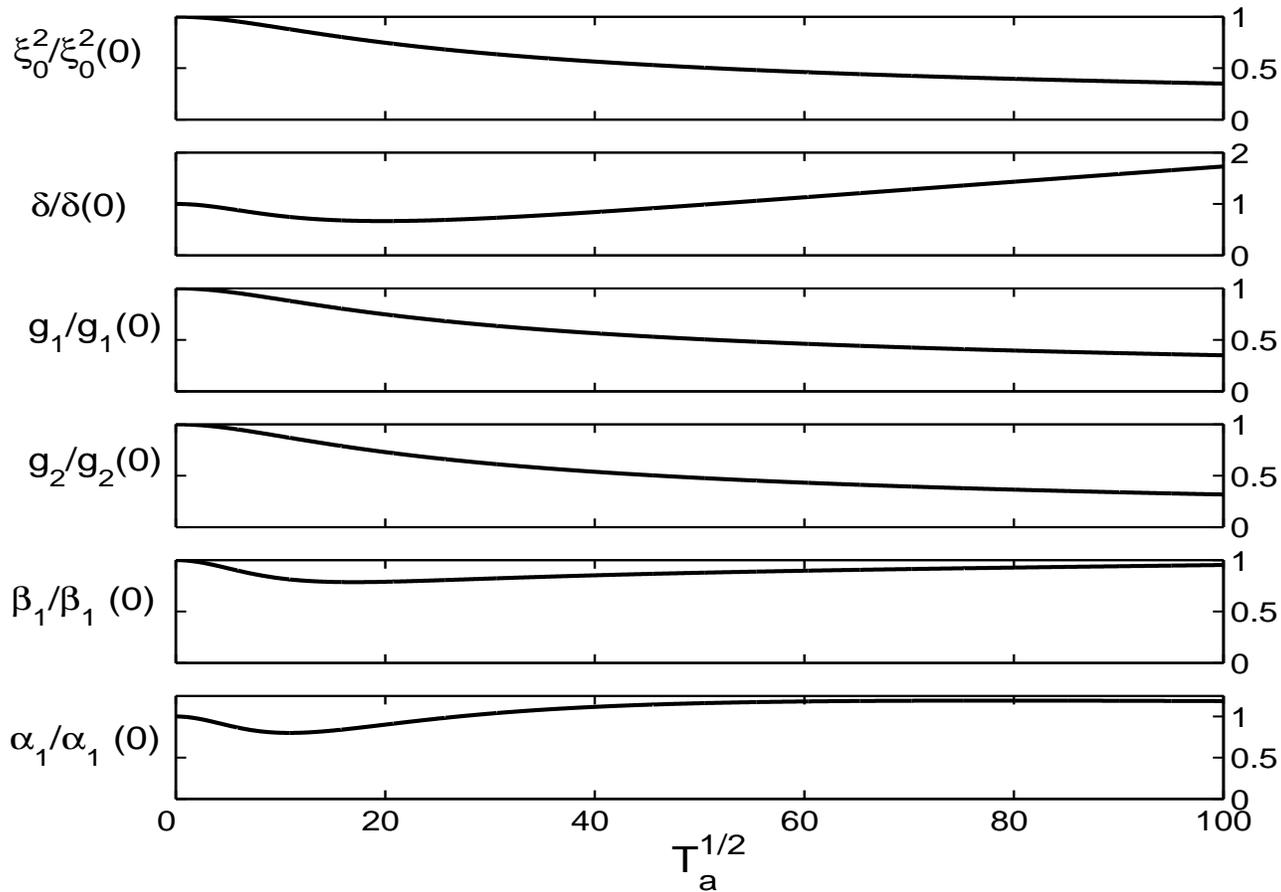


Figura 3.5: Efecto de la rotación sobre los coeficientes de la ecuación de amplitud presentes en el caso quiral. Los coeficientes se representan con respecto a su valor para $T_a = 0$.

permitido de Γ es más ancho que para tasas de rotación mayores.

De las Ecs. (3.27) y (3.17) la variación relativa de la viscosidad entre la capa inferior (1) y la superior (2) con respecto a un valor de referencia (0) viene dada por

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_0} = \Gamma R \quad (3.46)$$

De la Fig. 3.7 se deduce que si $T_a^{1/2} < 100$, la ecuación de amplitud es válida siempre que $\Gamma \sim O(10^{-4})$, lo que equivale a una variación de la viscosidad en torno al 50%, (véanse las Ecs. (1.37) y (3.46)). Por otra parte, la pendiente de las curvas en la gráfica 3.7 se hace muy grande a medida que nos acercamos a $\Gamma = 0$, de modo que si se aumenta la tasa de rotación se deben considerar fluidos con una dependencia menor de la viscosidad con la temperatura. En todo caso, como vimos en el primer capítulo la velocidad angular ha de verificar siempre la relación $\Omega^2 r \ll g$.

La frecuencia de los hexágonos oscilantes en la bifurcación Hopf se muestra en la Fig. 3.8. Se observa que aumenta con la tasa de rotación $T_a^{1/2}$, y es casi tres órdenes de magnitud menor que ésta.

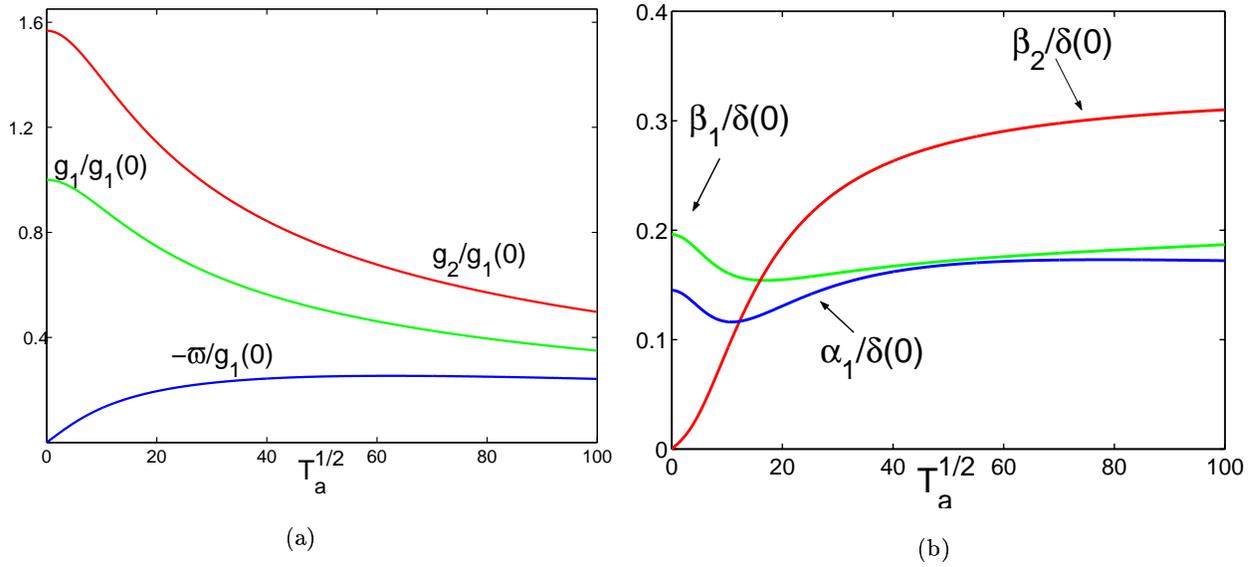


Figura 3.6: Coeficientes cúbicos (a) y espaciales (b) de las ecuaciones de amplitud con respecto a la rotación. Los coeficientes que surgen de la rotación, ϖ y β_2 , son funciones impares de ésta.

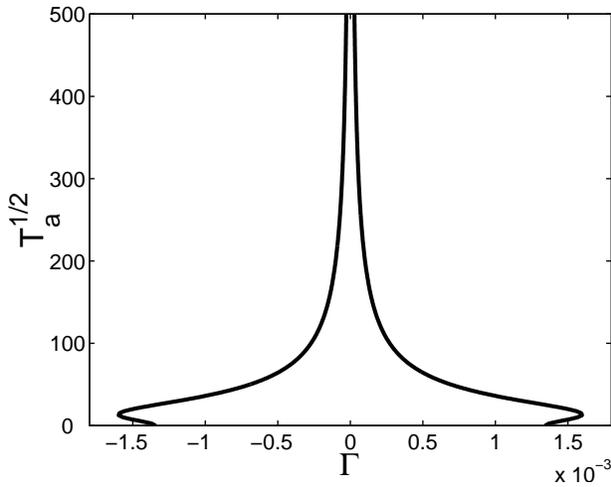


Figura 3.7: La región interna son los valores de la rotación y del parámetro NB en los que es válido el formalismo de las ecuaciones de amplitud.

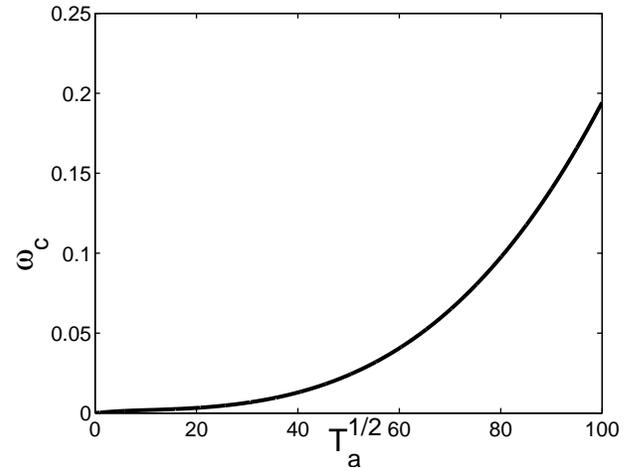


Figura 3.8: Frecuencia de los hexágonos oscilantes en el umbral en función de la rotación.

En la Fig. 3.9 se representan las regiones de estabilidad de hexágonos, rollos, y hexágonos oscilantes frente a la tasa de rotación. Para pequeños números de Taylor, la curva de estabilidad de los rollos disminuye hasta que alcanza un mínimo en $T_a = 15.52$. Para valores mayores de $T_a^{1/2}$ aumenta y termina por diverger para $T_a^{1/2} = T_{a,KL}^{1/2} = 47.96$. De forma análoga, la curva heteroclina diverge pero nunca se llega a cruzar con la de los rollos. La curva de estabilidad de los hexágonos crece con la rotación, como también se ha visto en simulaciones numéricas completas de las ecuaciones de Navier–Stokes [14].

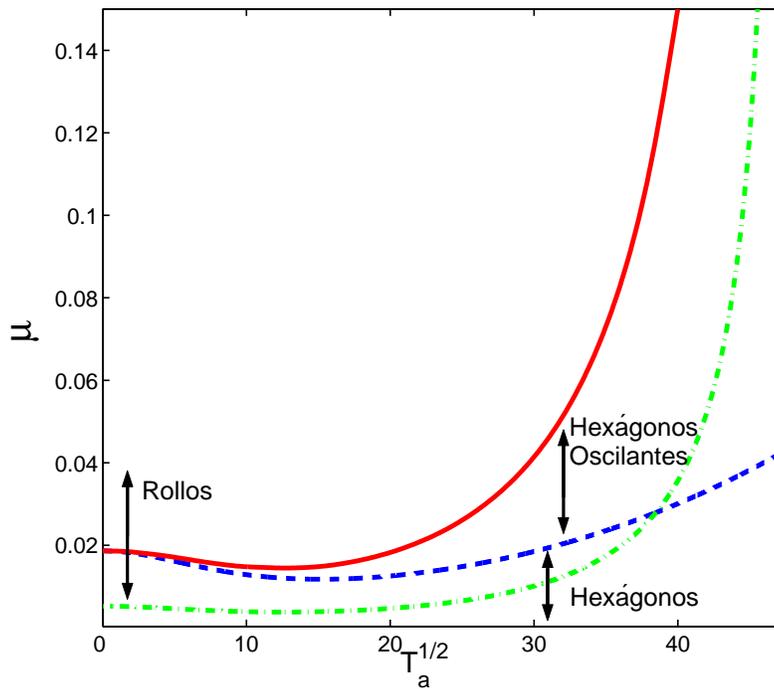


Figura 3.9: Regiones de estabilidad de hexágonos, rollos y hexágonos oscilantes en el plano $\mu \sim T_a$, para $\Gamma = -3 \cdot 10^{-4}$. Línea continua: órbita heteroclina. Línea a trazos: Curva de estabilidad de hexágonos. Línea a trazos y punteada: curva de estabilidad de rollos.

En un rango amplio de tasas de rotación, los hexágonos coexisten con los rollos hasta que pierden su estabilidad convirtiéndose en hexágonos oscilantes. Por encima del valor $T_a^{1/2} = 38.47$, las curvas de estabilidad de los rollos y hexágonos se cruzan, y los hexágonos sufren una transición directa a hexágonos oscilantes. Éstos se podrían observar experimentalmente en el rango de parámetros $\mu \sim 0.04$ y $38.47 < T_a^{1/2} < 47.96 = T_{a,KL}^{1/2}$ sin que interfirieran los rollos.

Para comprobar la transición directa a hexágonos oscilantes resolvemos numéricamente la ecuación de amplitud (3.12) con un método de Euler semi-implícito para $T_a^{1/2} = 45$ y $\mu = 0.05$. El término lineal difusivo de (3.12) se computa en el espacio de Fourier, mientras que las derivadas de los términos cuadráticos espaciales se calculan usando un esquema de diferencias finitas. Se comienza desde una condición inicial aleatoria, y se deja evolucionar al sistema hasta que llega a hexágonos estables cuyas amplitudes varían periódicamente en el tiempo (ver la Fig. 3.10). La frecuencia de oscilación de los hexágonos oscilantes en la simulación es $\omega_{sim} = 0.0184$, en buen acuerdo con el valor teórico en el umbral $\omega_c = 0.0184$ dado por la Ec. (3.15).

3.5.3 Ecuación de la fase: longitud de onda larga

Vimos en el capítulo anterior que, en ausencia de rotación, las modulaciones de fase de una estructura hexagonal verifican la ecuación de difusión

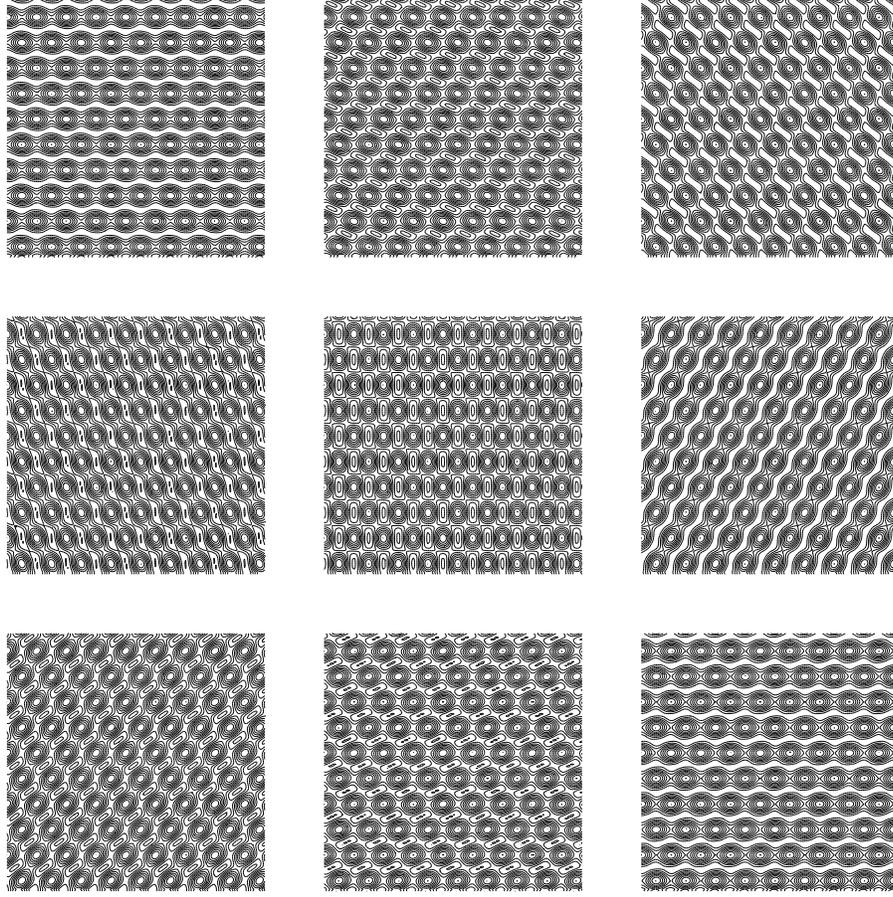


Figura 3.10: Evolución temporal de un patrón de hexágonos oscilantes durante un periodo de oscilación de $t = 341.2$. Los hexágonos oscilantes se han obtenido de la simulación numérica de las Ecs. (3.43) para $\mu = 0.05$, $T_a^{1/2} = 45$, partiendo de un estado inicial aleatorio.

$$\partial_t \phi = (D_{\parallel} - D_{\perp}) \nabla (\nabla \cdot \phi) + D_{\perp} \nabla^2 \phi \quad (3.47)$$

La rotación introducirá nuevos términos dependientes de la velocidad angular, de forma análoga a como sucede con las ecuaciones de amplitud.

Echebarria y Riecke [54] muestran con argumentos de simetría que la forma más general de la ecuación de la fase cuando se rompe la simetría quiral es

$$\partial_t \phi = D_{\perp} \nabla^2 \phi + (D_{\parallel} - D_{\perp}) \nabla (\nabla \cdot \phi) - D_{\times 1} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla^2 \phi) + D_{\times 2} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla) (\nabla \cdot \phi) \quad (3.48)$$

En el apéndice B recogemos de forma explícita los cálculos de la obtención de la ecuación de la fase a partir de las ecuaciones de amplitud de un fluido NB en presencia de rotación. Las expresiones que obtenemos para los coeficientes son

$$D_{\times 1} = \frac{1}{a^2 + c^2} \left\{ \sqrt{3} a H q \beta_2 \xi_0^2 + \frac{1}{4} H^2 c ((\sqrt{3} \beta_2)^2 + (\beta_1 - \sqrt{3} \alpha_1)^2) - c q^2 \xi_0^4 \right\} \quad (3.49a)$$

$$D_{\times 2} = \frac{\sqrt{3} \beta_2 H (H \beta_1 - q \xi_0^2)}{b} \quad (3.49b)$$

$$D_{\perp} = \frac{\xi_0^2}{4} + \frac{1}{a^2 + c^2} \left\{ \frac{H^2 a}{4} ((\sqrt{3} \beta_2)^2 + (\beta_1 - \sqrt{3} \alpha_1)^2) - q^2 \xi_0^4 a - H c q \xi_0^2 \sqrt{3} \beta_2 \right\} \quad (3.49c)$$

$$D_{\parallel} - D_{\perp} = \frac{\xi_0^2}{2} - \frac{2q^2 \xi_0^4}{b} - \frac{H^2}{b} (\beta_1 (\beta_1 + \sqrt{3} \alpha_1) + \frac{H \xi_0^2}{b} q (3\beta_1 + \sqrt{3} \alpha_1)) \quad (3.49d)$$

con

$$a = 2H^2(g_1 - g_2) + 2(\delta + 2q\beta_1)H \quad (3.50a)$$

$$b = 2H^2(g_1 + 2g_2) - (\delta + 2q\beta_1)H \quad (3.50b)$$

$$c = 2\sqrt{3}H^2\varpi \quad (3.50c)$$

Los nuevos coeficientes $D_{\times 1}$, $D_{\times 2}$ son funciones impares de la rotación

Inestabilidades de la fase

Desarrollando la fase en modos normales del tipo $\phi = \phi^0 \exp i(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$ y sustituyendo en (3.48) se obtiene

$$\omega \cdot \begin{pmatrix} \phi_x^0 \\ \phi_y^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} D_{\perp} Q^2 + (D_{\parallel} - D_{\perp}) Q_x^2 - D_{\times 2} Q_x Q_y & (D_{\parallel} - D_{\perp}) Q_x Q_y - D_{\times 1} Q^2 - D_{\times 2} Q_y^2 \\ (D_{\parallel} - D_{\perp}) Q_x Q_y + D_{\times 1} Q^2 + D_{\times 2} Q_x^2 & D_{\perp} Q^2 + (D_{\parallel} - D_{\perp}) Q_y^2 + D_{\times 2} Q_x Q_y \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

que tiene solución no trivial si verifica que $\det(L - \omega I) = 0$, lo que conduce a la relación de dispersión

$$\omega^2 + (D_{\parallel} - D_{\perp}) Q^2 + [D_{\parallel} D_{\perp} + D_{\times 1} (D_{\times 1} + D_{\times 2})] Q^4 = 0 \quad (3.52)$$

cuyas raíces corresponden a los autovalores del problema lineal

$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(D_{\parallel} + D_{\perp} \pm \sqrt{(D_{\parallel} - D_{\perp})^2 - 4 D_{\times 1} (D_{\times 1} + D_{\times 2})} \right) Q^2 \quad (3.53)$$

Cuando $D_{\times 1} = 0$ se recupera la expresión del capítulo anterior con dos modos de la fase desacoplados, uno de divergencia nula $\omega_1 = -D_{\perp} Q^2$, y otro irrotacional $\omega_2 = -D_{\parallel} Q^2$. El patrón hexagonal se desestabilizará por perturbaciones de la fase de larga longitud de onda cuando D_{\parallel} o D_{\perp} se hagan negativos. Para velocidades angulares muy pequeñas ($D_{\times 1}$, $D_{\times 2} \ll D_{\perp}$, D_{\parallel}) es posible desarrollar el radicando de las raíces a orden más bajo

$$\omega_1 = - \left(D_{\parallel} - \frac{D_{\times 1} (D_{\times 1} + D_{\times 2})}{D_{\parallel} - D_{\perp}} \right) Q^2, \quad \omega_2 = - \left(D_{\perp} + \frac{D_{\times 1} (D_{\times 1} + D_{\times 2})}{D_{\parallel} - D_{\perp}} \right) Q^2 \quad (3.54)$$

De esas expresiones se deduce que las perturbaciones longitudinales y transversales de la fase continúan desacopladas para tasas de rotación pequeñas. El panorama cambia al aumentar la rotación, ya que entonces el radicando puede hacerse negativo y tener autovalores imaginarios. Ésto daría lugar a una inestabilidad oscilatoria si la parte real de algún autovalor se hace positiva. A partir de la relación de dispersión, encontramos que la curva marginal de tipo oscilatorio viene determinada por las condiciones

$$D_{\parallel} + D_{\perp} = 0 \quad (3.55a)$$

$$(D_{\parallel} - D_{\perp})^2 - 4D_{\times 1}(D_{\times 1} + D_{\times 2}) = 0 \quad (3.55b)$$

En las Figs. 3.11 se representan las curvas de inestabilidad de fase para diferentes valores de la rotación y del parámetro NB. Al disminuir la variación de la viscosidad con la temperatura (Figs. 3.11(b), 3.11(e), 3.11(f)) disminuye el rango de estabilidad de hexágonos y rollos. Este comportamiento es similar al que vimos en el capítulo anterior cuando disminuía la asimetría vertical de las propiedades de un fluido.

Para pequeños valores de la tasa de rotación (Fig. 3.11(b)) el diagrama se parece al del caso sin rotación (Fig. 3.11(a)), aunque en las proximidades de la bifurcación de Hopf ya es posible apreciar que las curvas marginales de la fase no son tangentes a las de amplitud, sino que aquéllas se abren hacia valores altos de $|\mathbf{q}|$ donde confluyen en una única curva. En este régimen la inestabilidad de fase es estacionaria excepto para valores altos de μ para los cuales la inestabilidad de fase es oscilatoria (cuando se unen las curvas de los dos autovalores de la fase). Al aumentar la rotación (Fig. 3.11(c)) las curvas marginales de fase se abren más, y crece la región de inestabilidad oscilatoria. Por último, para valores aún más elevados de la rotación 3.11(d) el efecto de la rotura quiral es más notable y las dos curvas de inestabilidad de fase degeneran a una sola para cualquier valor del calentamiento, de modo que los hexágonos comienzan a sufrir inestabilidades oscilatorias en cuanto la atraviesan.

3.5.4 Inestabilidades de la fase: perturbaciones arbitrarias

El análisis de la fase corresponde a perturbaciones con gran longitud de onda. Necesitamos completarlo con longitudes de onda cualesquiera. Para ello consideramos

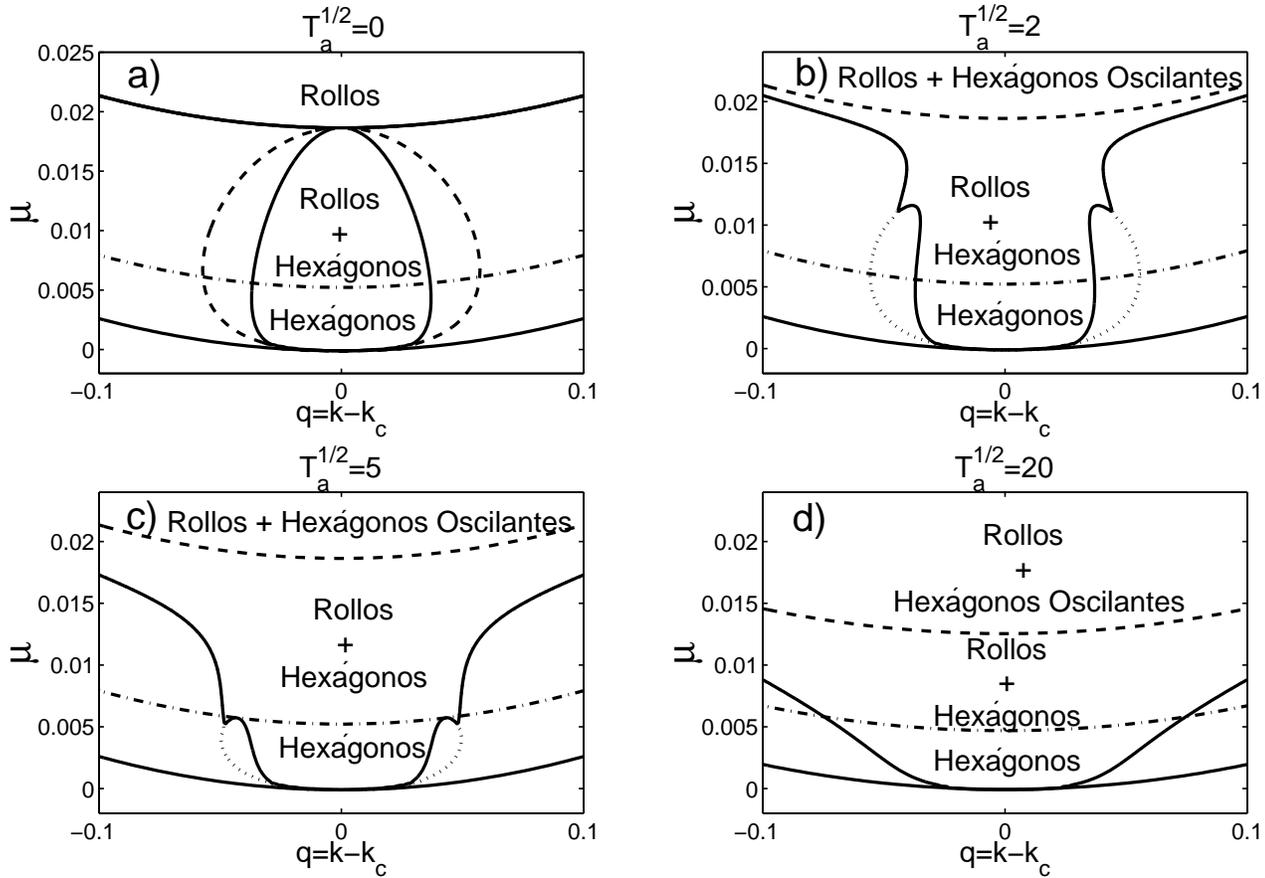
$$A_j = (H + r_j) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j + i\phi_j) \quad (3.56)$$

tras renormalizar la perturbación de amplitud se tiene en el régimen lineal

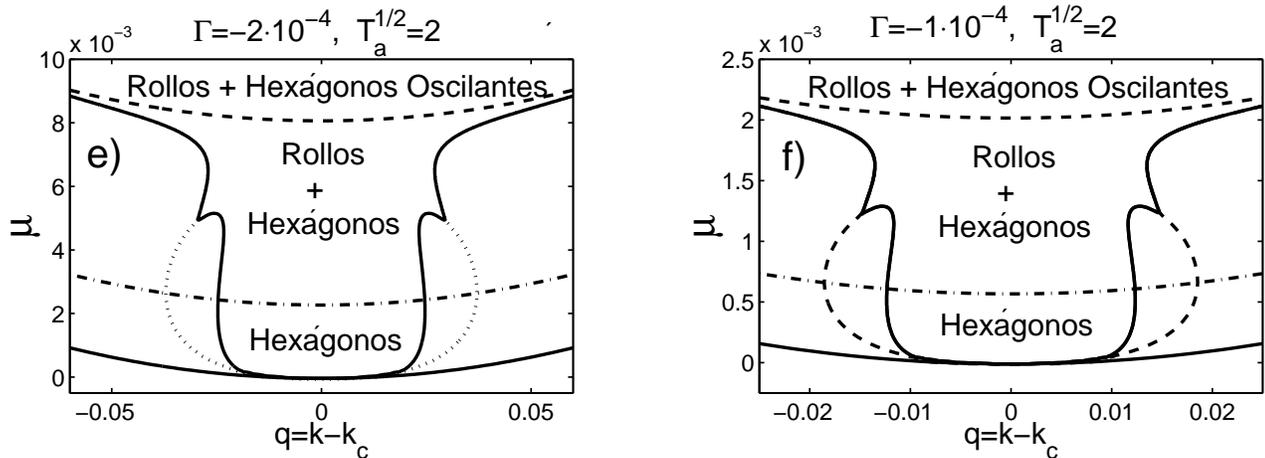
$$A_j = (H + r_j) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j)(1 + i\phi - \phi^2 + \dots) \simeq H(1 + r_j + i\phi_j) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j) \quad (3.57)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.43) y linealizando las perturbaciones de amplitud y fase obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 = & (\delta + 2\beta_1 q)H(r_2 + r_3 - r_1) - 2g_1 H^2 r_1 - 2g_2 H^2 (r_2 + r_3) + 2\varpi H^2 (r_3 - r_2) \\ & + \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 r_1 - 2q\xi_0^2 \partial_{x_1} \phi_1 + \beta_1 H (\partial_{x_3} \phi_3 \partial_{x_2} \phi_2 + 2q(r_2 + r_3)) \\ & + \beta_2 H (\partial_{x_3} \phi_3 - \partial_{x_2} \phi_2) + \alpha_1 H (\partial_{\tau_3} \phi_3 - \partial_{\tau_2} \phi_2) \end{aligned} \quad (3.58)$$



(a) Efecto de la rotación sobre los diagramas de estabilidad



(b) Influencia de los efectos NB sobre los diagramas de estabilidad

Figura 3.11: Diagramas de fase sin términos espaciales. En las cuatro primeras figuras está fijo el parámetro NB ($\Gamma = -3 \cdot 10^{-4}$) y se aumenta la velocidad angular. En las dos últimas se mantiene fija la tasa de rotación ($T_a^{1/2} = 2$) y disminuye Γ .

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 = & -(\delta + 2\beta_1 q)H(\phi_2 + \phi_3 + \phi_1) + \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 \phi_1 + 2q\xi_0^2 \partial_{x_1} r_1 + \\
& + \beta_1 H(\partial_{x_3} r_3 + \partial_{x_2} r_2 - 2q(\phi_2 + \phi_3)) + \beta_2 H(\partial_{x_3} r_3 - \partial_{x_2} r_2) + \\
& + \alpha_1 H(\partial_{\tau_3} r_3 - \partial_{\tau_2} r_2)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Si se desarrollan las amplitudes en modos de Fourier $r_j = a_j \exp(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$ y tras suponer que la fase es una onda plana $\phi_j \simeq \exp(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$ obtenemos un conjunto de 6 ecuaciones linealizadas cuyos autovalores se obtienen resolviendo el determinante

$$\begin{vmatrix}
M_{11} - \omega & M_{12} & M_{13} & M_{14} & 0 & 0 \\
M_{13} & M_{22} - \omega & M_{12} & 0 & M_{25} & 0 \\
M_{12} & M_{13} & M_{33} - \omega & 0 & 0 & M_{36} \\
M_{14}^* & 0 & 0 & M_{44} - \omega & M_{45} & M_{45} \\
0 & M_{25}^* & 0 & M_{45} & M_{55} - \omega & M_{45} \\
0 & 0 & M_{36}^* & M_{45} & M_{45} & M_{45} - \omega
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.60}$$

donde

$$\begin{aligned}
M_{ii} &= -H\delta - 2g_1 H^2 - \xi_0^2 Q_i^2, \quad i = 1, 2, 3 & M_{ii} &= -H\delta - \xi_0^2 Q_{i-3}^2, \quad i = 4, 5, 6 \\
M_{12} &= H\delta - 2g_2 H^2 - 2\varpi H^2 & M_{13} &= H\delta - 2g_2 H^2 + 2\varpi H^2 \\
M_{14} &= -2i\xi_0^2 q Q_1 & M_{25} &= -2i\xi_0^2 q Q_2 \\
M_{36} &= -2i\xi_0^2 q Q_3 & M_{45} &= -H\delta \\
Q_1 &= Q \cos \varphi & Q_2 &= -\frac{1}{2}Q(\cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi) \\
Q_3 &= -\frac{1}{2}Q(\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi)
\end{aligned}$$

Q y φ son el módulo y ángulo que forma el vector de onda \mathbf{Q} con la dirección \mathbf{x}_1 .

Estudiamos en primer lugar el caso *sin rotación*. Se recupera entonces la simetría $A_2 \leftrightarrow A_3$ y el término en la ecuación de amplitud $H\varpi$ desaparece, de modo que la matriz anterior será hermítica y, por tanto, sus autovalores reales.

Si las perturbaciones son homogéneas y de gran longitud de onda, tenemos dos modos neutros de fase, debidos a las dos simetrías traslacionales de una estructura hexagonal perfecta. También existe un modo amortiguado cuyo autovector corresponde a la fase total (suma de los tres modos de fase).

$$\omega_1 = -2H^2(g_1 + 2g_2) + \delta H \tag{3.61a}$$

$$\omega_2 = -2H^2(g_1 - g_2) - 2\delta H \tag{3.61b}$$

$$\omega_3 = -2H^2(g_1 - g_2) - 2\delta H \tag{3.61c}$$

$$\omega_4 = -3\delta H \tag{3.61d}$$

$$\omega_5 = 0 \tag{3.61e}$$

$$\omega_6 = 0 \tag{3.61f}$$

Los otros tres modos corresponden a perturbaciones de amplitud que pueden llegar a tener tasas de crecimiento positivas. Cuando $\omega_1 > 0$ se obtienen hexágonos cerca del umbral; por su parte ω_2 y ω_3 dan lugar a inestabilidades posteriores (secundarias) que generan rollos.

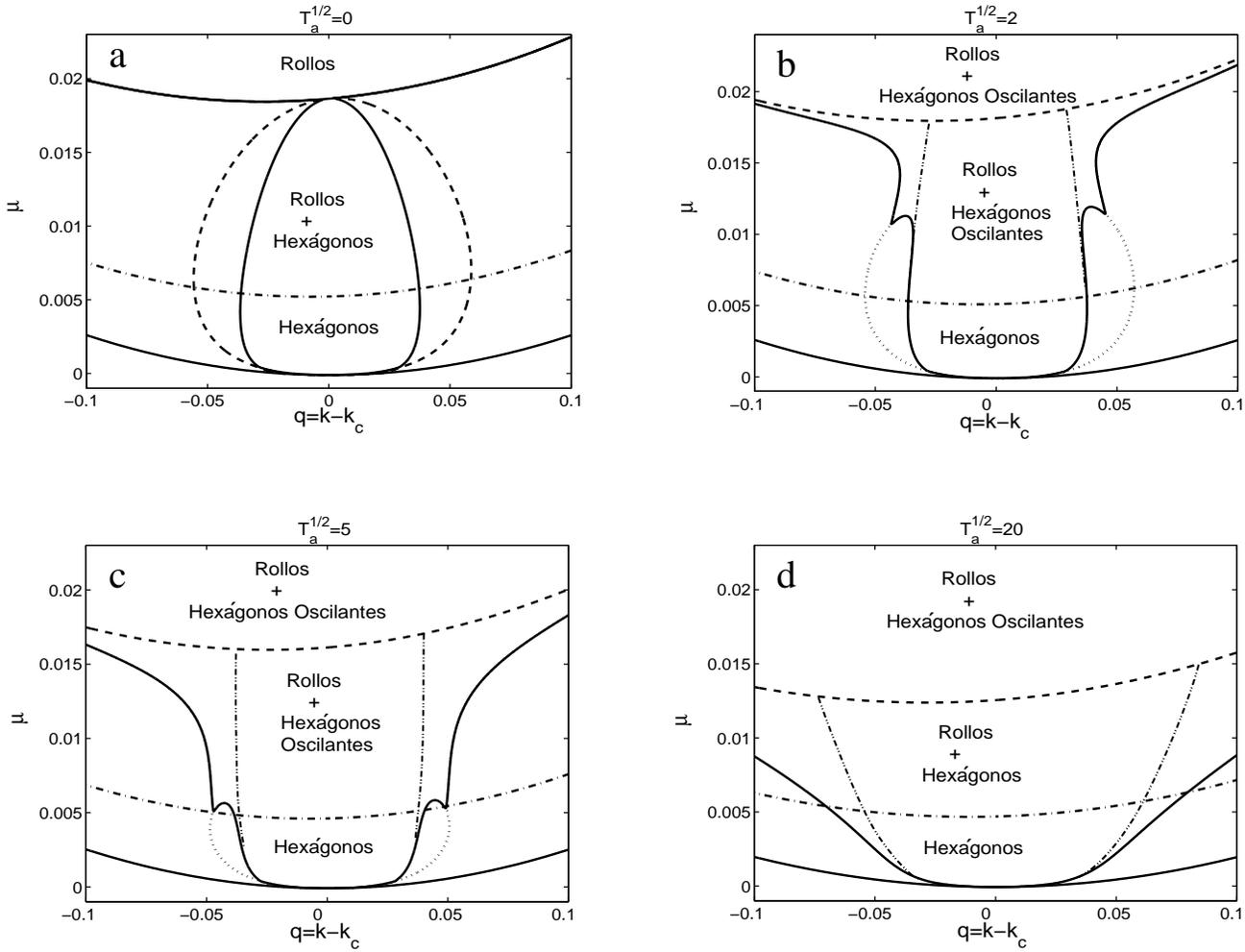


Figura 3.12: Regiones de estabilidad cuando se toman en cuenta los términos espaciales no lineales. La rotura de la simetría $q \rightarrow -q$ se va haciendo más evidente a medida que aumenta la rotación. La curva interior (punto-punto-punto-rama) proviene del análisis de estabilidad frente a perturbaciones de fase globales. En la primera gráfica, caso sin rotación, las curvas $D_{\parallel} = 0$ (línea sólida) y $D_{\perp} = 0$ (línea a trazos) están diferenciadas, comenzando a fusionarse cuando se inicia la rotación.

Las modulaciones espaciales lentas vienen regidas por la ecuación de la fase que vimos en el capítulo anterior. Las regiones de estabilidad de fase están determinadas por $(D_{\parallel} = 0, D_{\perp} = 0)$. Si se consideran modulaciones espaciales de cualquier longitud de onda, los límites de estabilidad son los mismos y no existe ninguna dependencia angular, lo cual significa que, sin rotación, las perturbaciones más peligrosas corresponden a pequeños números de onda.

La rotación rompe la hermiticidad en los elementos de matriz M_{12} y M_{13} haciendo posible la aparición de autovalores complejos. Los dos autovalores traslacionales en ese caso pueden ser, reales o complejos; es más, son posibles tasas de crecimiento positivas y que los hexágonos se desestabilicen con perturbaciones de longitud de onda corta.

En general, las perturbaciones tienen una tasa de crecimiento dependiente de la dirección. Se encuentra numéricamente que el máximo corresponde a $\varphi = 0$. Hemos incluido en la Fig. 3.12 los regímenes de estabilidad frente a perturbaciones arbitrarias, calculados tras añadir los términos espaciales no lineales en la ecuación de amplitud. La curva proveniente del análisis general de estabilidad (línea punto-punto-punto-rayo) es interior a las de fase, por lo tanto los hexágonos sufren primero una inestabilidad de corta longitud de onda. En todas las gráficas se puede observar que los términos espaciales rompen la simetría de reflexión ($q \rightarrow -q$) de los diagramas, y las regiones de estabilidad se inclinan hacia la izquierda. Para tasas de rotación suficientemente elevadas se aprecia como las dos curvas de estabilidad de fase se confunden en una sola. Las curvas interiores marcan el límite de estabilidad de los hexágonos frente a todo tipo de perturbaciones.

3.6 Conclusiones

Hemos analizado el efecto de la rotación sobre la estabilidad de patrones hexagonales termoconvectivos, en una capa líquida con una viscosidad dependiente de la temperatura. Partiendo de las ecuaciones hidrodinámicas, con condiciones de contorno libre-libre, hemos derivado las ecuaciones tipo Ginzburg-Landau válidas cerca del umbral. Éstas incluyen términos cuadráticos que dan cuenta de los efectos NB, y la rotación genera una rotura de simetría entre los coeficientes cúbicos y un término no lineal espacial adicional. Las ecuaciones de amplitud se han obtenido a través de un método de múltiples escalas y su forma coincide con la predicha por los argumentos de simetría. Hemos obtenido expresiones explícitas para los coeficientes de dichas ecuaciones en función de los parámetros de control: la distancia al umbral μ , la tasa de rotación $T_a^{1/2}$, y el parámetro NB, Γ . Hasta donde sabemos, es la primera vez que se determinan esas expresiones para un problema hidrodinámico [57].

Esos coeficientes muestran dos tipos de comportamiento: los cuadráticos δ , β_1 , y α_1 disminuyen inicialmente con la rotación pero aumentan para valores altos; los cúbicos g_1 , y g_2 , y la longitud de coherencia ξ_0^2 disminuyen monótonamente con la rotación. Los coeficientes ϖ y β_2 se deben a la rotación y aumentan siempre con ésta. Se ha determinado también el rango de parámetros de Γ y T_a para el cual el formalismo de las ecuaciones de amplitud resulta válido.

Hemos discutido las regiones de estabilidad de los hexágonos y rollos convectivos bajo rotación. Se ha comprobado que, en el caso particular sin rotación ni modulaciones espaciales, nuestros resultados para la estabilidad de los hexágonos y rollos coinciden con los de Palm *et al.* [35] y Busse [31]. Se sabe desde los primeros trabajos sobre convección con rotación [5] que la rotación retrasa el inicio de la convección. Sin embargo, hemos encontrado que para un amplio rango de valores de la tasa de rotación (hasta $T_a^{1/2} = 22$) la transición desde hexágonos a rollos es más próxima al umbral que en el caso quiral (Fig. 3.9). Los hexágonos oscilantes surgen a través de una bifurcación de Hopf, y hemos visto que su frecuencia crítica aumenta con la rotación pero es casi tres órdenes de magnitud inferior a $T_a^{1/2}$. Se ha hallado un rango de tasas de rotación ($38.47 < T_a^{1/2} < 47.96$) en el que los hexágonos se transforman en hexágonos oscilantes, sin coexistir con los rollos. Ésto es particularmente relevante para futuros trabajos experimentales y teóricos sobre esos estados.

Por debajo de la bifurcación de Hopf, el patrón hexagonal puede ser inestable con respecto a perturbaciones en su fase. El comportamiento de las modulaciones de fase de longitud de onda larga se describe por la ecuación de la fase de la estructura periódica. En ausencia de rotación, los análisis de

fase y de perturbaciones arbitrarias coinciden, y los modos de longitudes de onda larga son los únicos capaces de desestabilizar el sistema. Sin embargo, la rotación hace que perturbaciones con longitudes de onda menores puedan llegar a desestabilizar los hexágonos [58, 59]. Las inestabilidades de longitud de onda larga pueden ser estacionarias u oscilatorias. Las curvas de estabilidad de fase se abren más a medida que aumenta la rotación, y la de perturbaciones arbitrarias siempre está encerrada por las de fase. Para bajas tasas de rotación, las inestabilidades de longitud de onda arbitraria surgen para valores mayores del parámetro de control μ , pero debajo de la transición a hexágonos oscilantes. Las curvas de estabilidad de fase se pueden interpretar como el globo de Busse [1] para hexágonos en convección NB. Hemos determinado por primera vez los umbrales de estabilidad con respecto a los modos de fase en convección NB bajo rotación.

Hemos realizado simulaciones numéricas de las ecuaciones de amplitud que están en buen acuerdo con las predicciones del análisis de estabilidad sobre la aparición de los hexágonos oscilantes y su frecuencia.

Se pueden sugerir diversas ampliaciones del presente trabajo, por ejemplo: la inclusión de un número de Prandtl finito, el análisis de defectos y su influencia en la rotación global, o el estudio de la convección de Bénard-Marangoni con rotación.

Parte II

Calentamiento lateral

Capítulo 4

Inestabilidad convectiva/absoluta en capas líquidas calentadas lateralmente

En la primera parte de la tesis hemos estudiado inestabilidades convectivas en fluidos no Boussinesq. Éstas pueden generar patrones *estacionarios* en forma de hexágonos o rollos, u *oscilatorios* en forma de hexágonos oscilantes en presencia de rotación. Los resultados obtenidos quedan a la espera de su futura corroboración por parte de algún grupo experimental. Siguiendo con una temática afín abordamos en la segunda parte de la tesis un tipo de inestabilidades termoconvectivas que dan lugar a *ondas propagativas*, inducidas naturalmente en líquidos sometidos a un gradiente de temperatura a lo largo de su interfase. Se dispone de resultados experimentales sobre este tipo de ondas en capas líquidas calentadas lateralmente que no han recibido todavía una explicación teórica plausible.

En el capítulo cuarto nos proponemos estudiar las ondas propagativas en capas líquidas calentadas lateralmente prestando atención a las *inestabilidades absolutas* como mecanismo de desestabilización. Para ello, comentamos brevemente en primer lugar las distintas inestabilidades en flujos termocapilares y damos varios ejemplos de sistemas en que se desarrollan, discutimos los principales trabajos teóricos y experimentales, formulamos nuestro problema y explicamos el método de resolución y, finalmente, comparamos nuestros cálculos con resultados experimentales recientes.

En el capítulo quinto extenderemos este estudio al caso de dos líquidos superpuestos calentados lateralmente, y exploramos sus posibilidades como sistema para estudiar la propagación e interacción de ondas.

4.1 Inestabilidades termocapilares

La tensión interfacial σ caracteriza macroscópicamente las interacciones moleculares que tienen lugar en la interfase de dos fluidos inmiscibles. Cuando los líquidos se someten a una diferencia de temperatura ΔT se inducen gradientes en σ . En la interfase, los gradientes de tensión superficial pueden vencer las tensiones de cizalladura dando lugar a los denominados *flujos termocapilares* que se extienden al interior por acoplamiento viscoso. Ésto es lo que se conoce como *efecto Marangoni* [60].

Los flujos termocapilares se dan en muchos procesos de importancia práctica y fundamental. Bénard [61] observó en 1900 patrones celulares que Rayleigh [3] atribuyó al empuje. Tiempo después, Pearson [15] dio la explicación correcta al fenómeno en términos del efecto Marangoni. A partir de

los trabajos de Bénard, la convección térmica se constituyó en prototipo para explorar cuestiones fundamentales en mecánica de fluidos, en formación de patrones fuera del equilibrio, y en turbulencia.

Cabe distinguir dos inestabilidades en flujos termocapilares. Una primera denominada *inestabilidad de Bénard-Marangoni*, en la que se impone externamente un gradiente de temperatura perpendicular a la interfase. El estado base es estático con una distribución de temperatura puramente conductiva, y el movimiento surge a partir de un cierto umbral ΔT_c . En la segunda, que denominaremos *inestabilidad termocapilar* se impone un gradiente de temperatura paralelo a la interfase. En este caso, el fluido se pone en movimiento para cualquier valor de $\Delta T \neq 0$ y el estado base consiste en un flujo estacionario.

4.1.1 Inestabilidad de Bénard-Marangoni en la superficie libre de un fluido

La convección debida a efectos interfaciales puede darse incluso en ausencia de gravedad, en contraste con la convección de Rayleigh-Bénard. Imaginemos una capa de fluido limitada en su parte inferior por una pared rígida y en la superior por una superficie libre en contacto con un gas pasivo, en el que no se dan perturbaciones mecánicas ni térmicas que se transmitan al líquido. Supongamos también que sobre el gas pasivo hay otra pared rígida a menor temperatura que la inferior. Si la interfase se perturba momentáneamente, las regiones que se eleven experimentarán un descenso de temperatura, y se calentarán las que descendan. Habitualmente, la tensión interfacial disminuye cuando la temperatura aumenta. Por tanto, en las regiones de la interfase que se eleven aumentará la tensión interfacial y en las que descendan disminuirá. La diferencia de tensiones interfaciales hace que el fluido sea arrastrado a lo largo de la interfase, y el líquido más caliente del interior reemplaza al que se mueve cercano a la interfase, realimentando el flujo inducido por los gradientes de tensión interfacial.

La desestabilización del líquido no se desencadena inmediatamente. Existen dos efectos que frenan el movimiento

- La viscosidad dinámica, a la que puede asociar una escala de tiempo característica

$$\tau_{visc} = \frac{h^2}{\nu} \quad (4.1)$$

- La difusividad térmica, que caracteriza el intercambio de calor y se le puede asociar una escala de tiempo característica

$$\tau_{term} = \frac{h^2}{\kappa} \quad (4.2)$$

Los efectos desestabilizantes están ligados a la variación de la tensión superficial con la temperatura, y poseen un tiempo característico

$$\tau_{cap} = \sqrt{\frac{\rho h^3}{\gamma \Delta T}} \quad (4.3)$$

donde $\gamma = \partial\sigma/\partial T$ es la variación de la tensión interfacial con la temperatura.

El líquido se pone en movimiento cuando los gradientes de tensión interfacial no se amortiguan por la disipación, es decir, cuando $\tau_{cap}^2 \ll \tau_{visc} \tau_{term}$, o equivalentemente

$$Ma = \frac{\gamma \Delta T h}{\rho \nu \kappa} \gg 1 \quad (4.4)$$

donde Ma es un parámetro adimensional llamado *número de Marangoni*, que da el balance entre los efectos desestabilizantes de la tensión interfacial y los disipativos de la viscosidad y difusividad térmica.

En realidad, como mostró Pearson [15] las deflexiones de la interfase no son necesarias para que se inicie la convección de Bénard-Marangoni, ya que basta una simple perturbación de temperatura en la superficie de un líquido para dar lugar a la convección. En lo que sigue consideraremos siempre la superficie libre plana.

De las Ecs. (4.4) y (1.15) resulta claro que la convección de Rayleigh-Bénard y de Bénard-Marangoni dependen de modo distinto de la profundidad del líquido. Para capas profundas prevalecerá la convección de Rayleigh-Bénard, mientras que para capas finas dominará la convección de Bénard-Marangoni.

4.1.2 Inestabilidades en flujos termocapilares

Los estados base se desestabilizan para gradientes de temperatura suficientemente grandes. Se ha estudiado especialmente la transición del estado de base a flujos oscilatorios por su importancia en aplicaciones tecnológicas como el crecimiento cristalino, ya que las oscilaciones degradan la calidad del cristal resultante [62, 63].

Hay que distinguir dos grandes grupos de experimentos y estudios teóricos en flujos termocapilares: con calentamiento constante a lo largo de la interfase y con calentamiento local de la interfase

En el caso de **calentamiento constante a lo largo de la interfase** se considera habitualmente tres tipos de geometrías:

- *Puentes líquidos.* Se aplica una diferencia de temperatura entre dos paredes rígidas horizontales que contienen una masa líquida con una interfase lateral libre. Este sistema destaca en procesos de zona flotante de solidificación cristalina [64, 65, 66, 67, 68], en los que resulta importante determinar el umbral de inestabilidad oscilatoria. Se han hallado también flujos cuasiperiódicos, de duplicación de periodo y caóticos [69, 70].
- *Geometrías cilíndricas.* El líquido se halla entre dos cilindros concéntricos con su superficie superior en contacto con el aire, y se aplica una diferencia de temperatura entre los dos cilindros. Se usan, por ejemplo, en el proceso de crecimiento cristalino por el método de Czochralski [71], en el que los cristales se extraen de un crisol de material fundido. Se han realizado experimentos tanto para capas superficiales [72, 73], como para capas profundas [74]. También se ha estudiado teóricamente la aparición de estructuras extendidas y localizadas, pudiendo ser ambas estacionarias u oscilatorias. Se encuentra una competición en puntos de codimensión dos entre distintos tipos de estructuras: entre rollos estacionarios radiales con diferentes números de onda, entre rollos radiales con ondas hidrotermales, y entre ondas hidrotermales con distintos números de onda [75].
- *Capas planas.* Se caracterizan por secciones transversales rectangulares, y la diferencia de temperatura se aplica entre dos lados opuestos. Se han efectuado experimentos cuando la dimensión perpendicular al gradiente de temperatura es mucho más pequeña que la del gradiente [18, 76, 77],

o cuando son del mismo orden ambas dimensiones [78, 79, 80]. Este último caso presenta un tipo de inestabilidad en forma de ondas hidrotermales. En los próximos capítulos nos centraremos en este problema.

Otro grupo de flujos termocapilares se obtiene por **calentamiento local de la interfase**, que da lugar a gradientes térmicos que dependen del espacio. Tanto el empuje como la tensión superficial desestabilizan simultáneamente el flujo de base.

Los dos problemas de esta clase que se estudian con más frecuencia son:

- *Lentes térmicas.* Las lentes térmicas se producen por el calentamiento local de un medio absorbente con un láser que se propaga a su través. Un gradiente local de temperatura crea un gradiente de índice de refracción del medio, que es ópticamente equivalente a una lente divergente. Los parámetros de control son la distancia del haz láser a la superficie libre del líquido y la potencia del láser. Existe un rango de estos parámetros en el que se produce una bifurcación primaria del flujo base estacionario a un comportamiento oscilatorio [81, 82]; se han observado también duplicaciones de periodo [83] e indicios de comportamiento caótico [84].
- *Hilo caliente.* El calentamiento local se debe a un hilo resistivo caliente y paralelo a la superficie libre de un líquido. Los parámetros de control son la distancia entre el hilo caliente y la superficie libre, y la potencia eléctrica disipada por el hilo. Como en el caso de las lentes térmicas, se observa también una bifurcación a un estado oscilatorio [85, 86, 87], en el que aparecen ondas propagativas a lo largo del hilo [88].

4.2 Calentamiento lateral en capas líquidas horizontales

Hemos enunciado unos cuantos tipos de flujos que se desestabilizan por efectos termocapilares. En lo que sigue nos centremos en los que surgen en capas líquidas calentadas lateralmente. Éstos están presentes en las corrientes marinas debidas a calentamientos no homogéneos, y su interacción con la atmósfera da lugar a fenómenos meteorológicos complejos. Son también de crucial importancia en crecimiento cristalino por el proceso de zona flotante, en el que se generan celdas convectivas termocapilares en la región de cristalización que es necesario entender y controlar.

La dinámica con gradientes de temperatura horizontales es más compleja que en el clásico calentamiento vertical, pues el estado base en aquéllos ya no está en reposo, sino que hay un flujo a gran escala y el perfil vertical de temperatura no es lineal. Un primer problema consiste en determinar los campos de temperatura y velocidad de referencia; además el umbral de inestabilidad depende del número de Prandtl Pr .

El problema de las inestabilidades termocapilares inducidas por calentamiento lateral fue abordado por primera vez por Smith y Davis [17], quienes predijeron la existencia de *ondas hidrotermales* y rollos estacionarios en ausencia de gravedad. En un trabajo posterior Smith [89] mostró la existencia de dos mecanismos distintos de inestabilidad dependiendo de Pr . Laure y Roux [90] estudiaron el acoplamiento entre los efectos termocapilares y el empuje para líquidos con números de Prandtl pequeños; posteriormente Gershuni *et al.* [91] y Parmentier *et al.* [92] extendieron los resultados hasta $Pr = 10$. Gershuni *et al.* [91] utilizan condiciones de contorno térmicamente conductoras y concluyen que el sistema se desestabiliza en forma de rollos estacionarios para $Pr > 1$. Sin embargo,

Parmentier *et al.* [92] mostraron que el sistema se desestabiliza en forma de rollos, si las condiciones de contorno son térmicamente aislantes. Mercier y Normand [93] consideraron un número de Biot en la superficie libre, lo que les permitió constatar teóricamente que la transición entre ondas viajeras y rollos estacionarios depende de la transferencia de calor entre el líquido y su entorno. Priede y Gerbeth [94] han aportado un nuevo punto de vista, incorporando técnicas utilizadas en física de plasmas al estudio de líquidos calentados lateralmente. Estos autores muestran que es necesario distinguir entre inestabilidades convectivas y absolutas para estudiar las ondas hidrotermales. Smith [95] realizó un análisis no lineal de estabilidad para convección puramente termocapilar, y determinó los dominios de existencia de las dos ondas oblicuas predichas por la teoría lineal.

También se han efectuado simulaciones numéricas en dos dimensiones para números de Prandtl pequeños. En ellas se reproducen flujos multicelulares y la transición a la convección oscilatoria [96]. Se ha mostrado que la transición a flujos no estacionarios sucede cuando la relación entre los efectos termocapilares y el empuje supera un cierto valor [97].

En los trabajos anteriormente citados se ha despreciado la deflexión de la superficie libre, presente en cualquier líquido. Smith y Davis [98] añadieron los efectos de una superficie deformable al caso termocapilar, y discutieron una nueva inestabilidad oscilatoria asociada a ondas superficiales, que sólo resulta más peligrosa que las ondas hidrotermales para valores pequeños del número de Prandtl ($Pr < 0.15$). Por tanto, siempre que no trabajemos con espesores o números de Prandtl muy bajos, podremos suponer las deformaciones despreciables, lo cual simplifica mucho nuestros cálculos.

Las capas líquidas sometidas a calentamiento lateral también han sido objeto de atención experimental. Villers y Platten [78] observaron un primera transición desde flujos estacionarios unicelulares a flujos multicelulares en acetona. Posteriormente De Saedeleer *et al.* [79] mostraron la influencia de medir el número de Marangoni lejos de las paredes, pues éstas presentan capas límite térmicas. También encontraron una primera transición a flujo multicelular, y para valores mayores del calentamiento una transición a flujo oscilatorio en decano. Schwabe *et al.* [72] observaron un comportamiento similar en etanol. Daviaud y Vince [18] concibieron un experimento para estudiar la dinámica de ondas hidrotermales unidimensionales, y encontraron por primera vez ondas oblicuas propagativas para pequeñas profundidades, mientras que para las grandes encontraron rollos estacionarios. Por su parte Riley y Neitzel [80] verificaron experimentalmente la transición desde el flujo de base estacionario a ondas hidrotermales en un aceite de silicona de $1 cSt$. Posteriormente, Benz *et al.* [99] demostraron que esas ondas hidrotermales se podían suprimir eliminando las fluctuaciones de temperatura de la superficie libre.

Por último, citamos los experimentos de Burguete *et al.* [100] y Pelacho *et al.* [101, 102] en los que se miden las características de las ondas hidrotermales en un aceite de $0.65 cSt$, y que nos sirven como referencia en lo que sigue. A pesar de los trabajos teóricos previos no se han podido explicar las propiedades de estas ondas ni cualitativa ni cuantitativamente. Nosotros trataremos de explicar la aparición de las ondas hidrotermales y sus características como resultado de una desestabilización absoluta del flujo base.

4.2.1 Mecanismos de inestabilidad termocapilar en capas líquidas

En los experimentos, en cuanto se impone un gradiente de temperatura aparece un flujo de base de retorno, caracterizado porque el flujo neto a través de cualquier superficie transversal es nulo. Nosotros

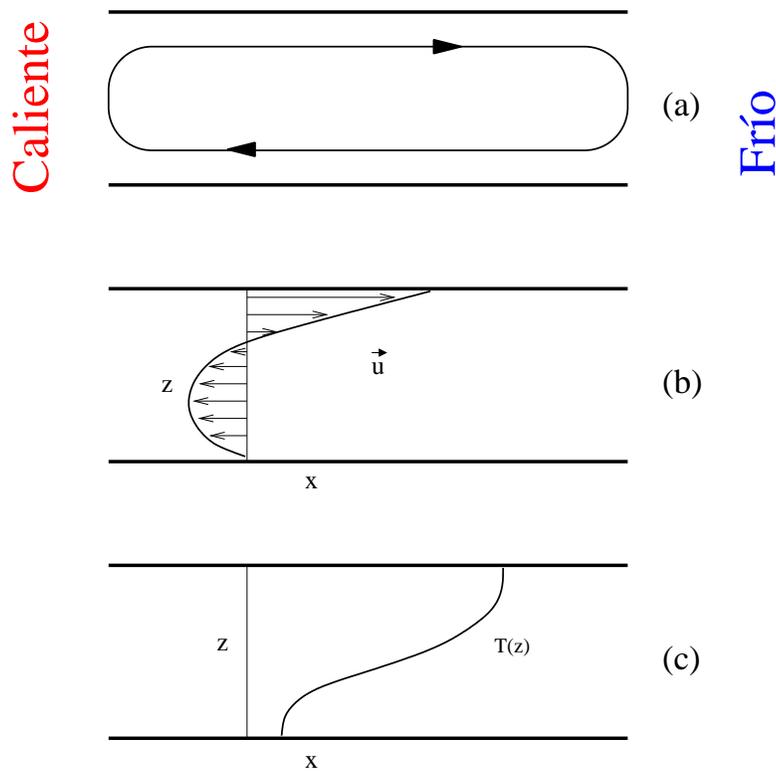


Figura 4.1: Perfiles verticales de velocidad (b) y temperatura (c) característicos de un flujo base de retorno en capas líquidas horizontales calentadas horizontalmente (a).

nos centraremos en lo sucesivo en este tipo de flujo, por ser el único posible en sistemas cerrados como los experimentales. Los perfiles de velocidad y temperatura del flujo base se muestran en la Fig. 4.1. La temperatura en el interior de la capa líquida es más fría que en la interfase, y por tanto tendrá una influencia estabilizante con respecto al mecanismo clásico de inestabilidad de Bénard-Marangoni, de manera que el mecanismo de inestabilidad debe usar el movimiento del líquido para vencer el campo de temperatura vertical estabilizante.

A continuación, recogemos de forma resumida los argumentos de Smith [89] que explican cómo se desestabiliza el flujo base para dar lugar a ondas hidrotermales.

Números de Prandtl pequeños. Para pequeños números de Prandtl las fuerzas de inercia son dominantes en el interior del líquido, por ser la viscosidad pequeña. Imaginemos una línea caliente en la interfase paralela al flujo base. Esa línea induce un flujo ascendente debajo de ella (ver la Fig. 4.2(a)), como en el mecanismo clásico de Bénard-Marangoni, que trae fluido con menor velocidad y temperatura (ver las Figs. 4.1(b), 4.1(c)) hacia la superficie, creando una fuerza inercial en contra del flujo en la superficie, que tiende a enfriar la línea caliente. Este enfriamiento frena el flujo ascendente. Sin embargo, las fuerzas de inercia continuarán arrastrando fluido hasta eliminar la línea caliente y convertirla en fría. Entonces habrá un flujo superficial por termocapilaridad dirigido hacia la línea fría y, por continuidad, un descenso de fluido. El fluido descendente produce una fuerza inercial aguas abajo que ralentiza el fluido ascendente que remontaba el flujo base (Fig. 4.2(d)) hasta que es eliminado

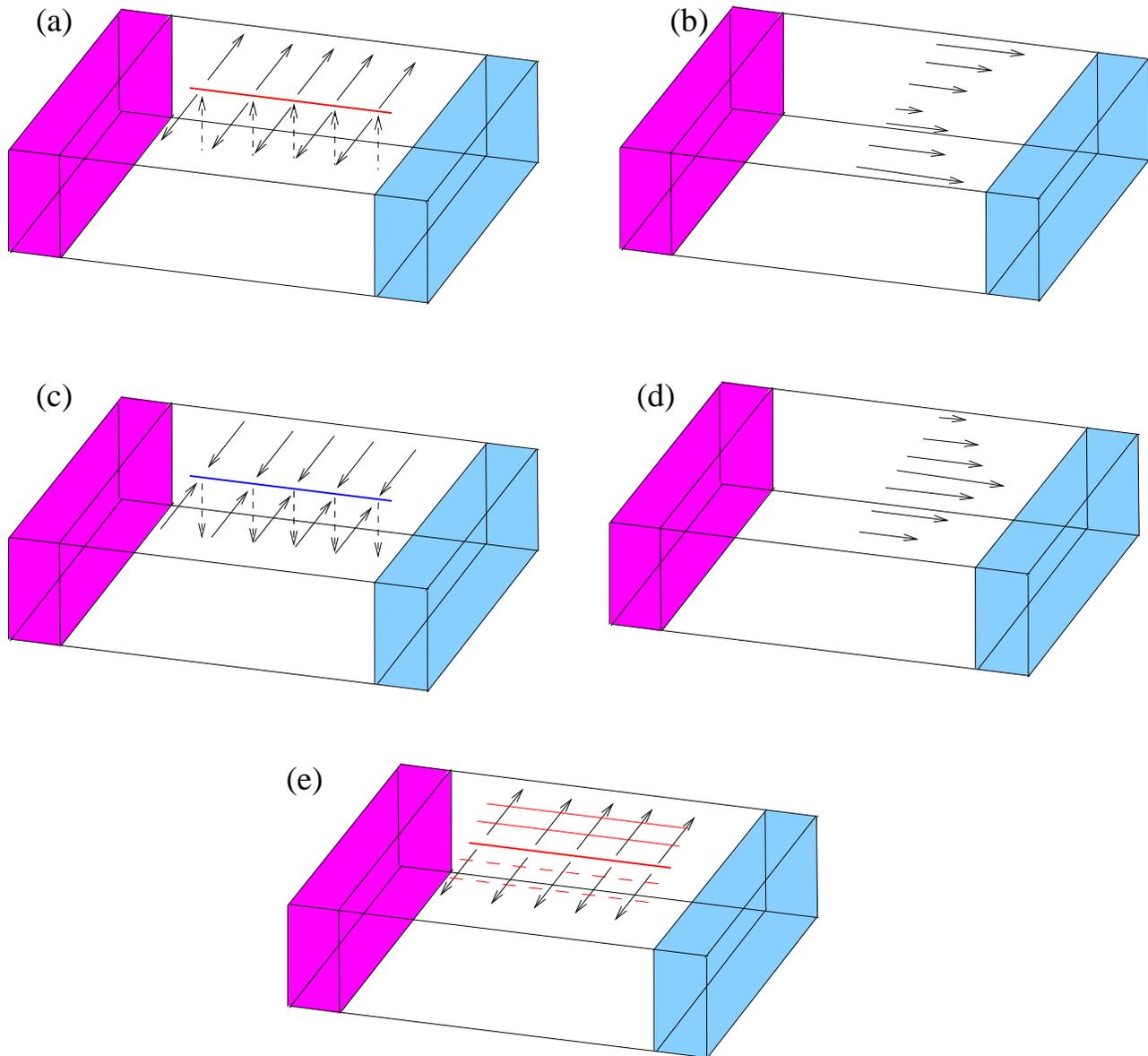
$Pr \rightarrow 0$ 

Figura 4.2: Mecanismo de inestabilidad para números de Prandtl pequeños. El flujo base se desestabiliza en forma de ondas hidrotermales que se propagan en dirección perpendicular al gradiente térmico. Pelacho [103].

y la temperatura alcanza un mínimo (Fig. 4.2(e)). Entonces se invierte el proceso: la temperatura en la línea fría aumenta y se forma una nueva línea caliente. Si el gradiente de temperatura interfacial es suficientemente grande, el suministro de energía a la perturbación supera la pérdida de energía por conducción, y entonces la temperatura de la nueva línea caliente será mayor que la previa, haciendo el proceso inestable. Sobreviven las inestabilidades que se propagan en dirección perpendicular al flujo de base, dando lugar a ondas hidrotermales en esa dirección.

Números de Prandtl grandes. Para números de Prandtl grandes los efectos viscosos gobiernan el flujo. Imaginemos como antes una línea caliente paralela al flujo base. Por continuidad y termocapilaridad aparecerá un movimiento ascendente de líquido más frío bajo la línea (la temperatura disminuye con la profundidad). Sin embargo, como ahora los efectos inerciales son pequeños no habrá una perturbación de velocidad en dirección contraria al flujo base. El fluido frío ascendente reducirá la temperatura de la línea caliente homogéneamente, eliminando la perturbación.

Si consideramos una perturbación de temperatura en forma de línea perpendicular al flujo de base (Fig. 4.3(a)), la temperatura de la línea caliente disminuirá como resultado del ascenso de líquido más frío bajo ella. Sin embargo, el descenso de fluido a los lados de la línea caliente (Fig. 4.3(b)) genera un calentamiento debido a que arrastra fluido caliente próximo a la superficie hacia el interior, donde la temperatura del estado base es más fría. Este calentamiento convectivo del interior del líquido es el mecanismo a través del cual la energía se transfiere desde el estado base a las perturbaciones. Se forman zonas o puntos calientes en el interior del líquido (Fig. 4.3(c)), y las perturbaciones de temperatura creadas por el fluido descendente interactúan con el flujo base que se dirige al lado frío, de forma que un enfriamiento convectivo adicional desplazará los puntos calientes aguas abajo.

Si el gradiente de temperatura externo es suficientemente grande, el flujo descendente vertical extraerá suficiente energía del campo de temperaturas vertical del estado base como para que la temperatura del punto caliente interior sea elevada. Entonces, el punto caliente interior calentará por conducción la interfase sobre él, que se encuentra aguas arriba de la perturbación original de la superficie, dando lugar a una nueva línea caliente (Fig. 4.3(d)). El proceso se repite y la perturbación se propaga en la dirección del gradiente, en forma de ondas hidrotermales.

Números de Prandtl intermedios. Para números de Prandtl intermedios han de tenerse en cuenta las fuerzas viscosas y de inercia, por eso los dos mecanismos precedentes actúan simultáneamente y las ondas se propagan con un ángulo oblicuo con respecto al gradiente de temperatura.

4.3 Formulación del problema: ecuaciones básicas

Una vez vistos los trabajos y características generales del calentamiento lateral, pasamos a desarrollar las ecuaciones de evolución de una capa líquida calentada lateralmente.

Consideremos una capa líquida de espesor h , abierta al aire, que se halla sobre una placa inferior sólida horizontal de extensión infinita y sometida a un gradiente horizontal de temperatura β . El líquido se encuentra en presencia del campo gravitacional, y la densidad verifica la ecuación de estado $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_-)]$, donde seguimos la misma notación que en la parte I para los parámetros físicos del fluido. Suponemos que los efectos termocapilares resultan de una dependencia lineal de la

$$\text{Pr} \rightarrow \infty$$

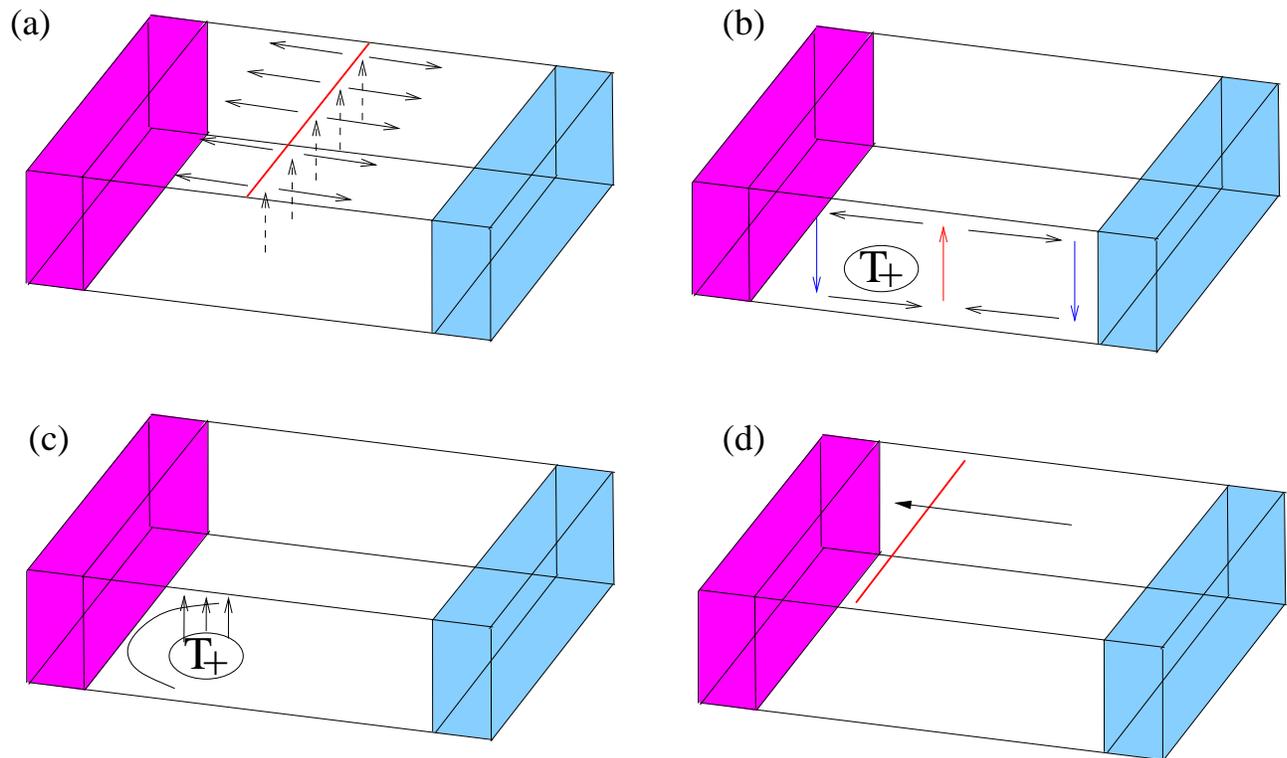


Figura 4.3: Mecanismo de inestabilidad para números de Prandtl grandes. El flujo base se desestabiliza en forma de ondas hidrotermales que se propagan en dirección paralela al gradiente térmico. Pelacho [103].

tensión superficial con la temperatura $\sigma(T) = \sigma(T_0) - \gamma(T - T_-)$, donde $\gamma = -\frac{\partial\sigma}{\partial T}$ es el coeficiente de variación de la tensión superficial con la temperatura y T_- una temperatura de referencia. Se acepta la validez de la aproximación de Boussinesq. La evolución de los campos de velocidad $\mathbf{u}(x, y, z, t)$, temperatura $T(x, y, z, t)$, y presión $p(x, y, z, t)$, viene dada por las ecuaciones de balance de masa, momento y energía

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.5a)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\rho}{\rho_0} g \hat{\mathbf{z}} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.5b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (4.5c)$$

Además es necesario incluir las *condiciones de contorno*:

pared inferior ($z = 0$)

$$\text{condición cinemática para una pared rígida: } \mathbf{u} = 0 \quad (4.6a)$$

$$\text{condición térmica: } \begin{cases} T = T_- + \beta x, & \text{pared conductora} \\ \partial_z T = 0, & \text{pared aislante} \end{cases} \quad (4.6b)$$

superficie libre ($z = 1$)

La superficie superior se supone indeformable, de forma que la componente vertical de la velocidad se anula. Además las fuerzas tangenciales deben estar compensadas en la superficie

$$w = 0, \quad \text{condición cinemática normal} \quad (4.7a)$$

$$\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \text{condición cinemática tangencial} \quad (4.7b)$$

$$\partial_z T + Bi(T - T_\infty(x)) = 0, \quad \text{condición térmica} \quad (4.7c)$$

La última relación modela aproximadamente la transferencia de calor entre la superficie libre del líquido y el aire circundante; en ella Bi denota el número de Biot ¹ y $T_\infty(x) = \beta x$ es la temperatura del aire lejos de la superficie.

4.3.1 Ecuaciones adimensionales

Para adimensionalizar las ecuaciones utilizamos las mismas escalas que en la sección 1.2.1 para el caso Rayleigh-Bénard con calentamiento vertical: $h, h^2/\kappa, \kappa/h, \rho\nu\kappa/h^2$ como escalas de espacio, tiempo,

¹La determinación de Bi es bastante empírica, en un estado puramente conductor del líquido se expresa como $Bi = \frac{\lambda_{\text{aire}} d_{\text{aire}}}{\lambda_{\text{líquido}} d_{\text{líquido}}}$. Mientras que en un estado convectivo el número de Biot también depende del número de onda horizontal del movimiento convectivo [104].

velocidad, y presión, respectivamente. Las ecuaciones anteriores se expresan en forma adimensional como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.8a)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + BoMaT\hat{\mathbf{z}} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.8b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (4.8c)$$

con las condiciones de contorno:

pared inferior ($z = 0$)

$$\mathbf{u} = 0 \quad (4.9a)$$

$$\begin{cases} T = T_- + \beta x, & \text{pared conductora} \\ \partial_z T = 0, & \text{pared aislante} \end{cases} \quad (4.9b)$$

superficie libre ($z = 1$)

$$w = 0 \quad (4.10a)$$

$$\partial_z \mathbf{u}_h + Ma \nabla_h T = 0 \quad (4.10b)$$

$$\partial_z T + Bi(T - T_\infty(x)) = 0 \quad (4.10c)$$

El número de Rayleigh Ra y el de Marangoni Ma se encuentran relacionados por el número de Bond dinámico definido como

$$Bo = \frac{Ra}{Ma} = -\frac{g\alpha\rho d^2}{\partial\sigma/\partial T} \quad (4.11)$$

El valor de Bo permanece fijo para una configuración experimental dada, en la cual Ra y Ma cambian conjuntamente, pues ambos números son lineales en el gradiente de temperatura. Para estudiar la importancia relativa de los efectos de termocapilaridad y empuje en un líquido dado es suficiente cambiar la profundidad de la capa, y el parámetro adimensional que da cuenta de ello es el número de Bond.

4.4 Estado base

Un gradiente horizontal de temperatura en un contenedor finito da lugar a un flujo base estacionario plano y paralelo [17] suficientemente lejos de las paredes laterales, que se expresa como

$$\mathbf{u} = (u_0(z), 0, 0) \quad (4.12)$$

El flujo de base induce una distribución vertical del campo de temperaturas $\tau(z)$

$$T - T_- = x + \tau(z) \quad (4.13)$$

Si se introduce (4.12) y (4.13) en (4.8) y se elimina la presión obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\partial_z^3 u_0 = BoMa \quad (4.14a)$$

$$\partial_z^2 \tau = u_0 \quad (4.14b)$$

con las condiciones de contorno

$$z = 0 \rightarrow u_0 = 0, \begin{cases} \tau = 0, \text{ pared inferior conductora} \\ \partial_z \tau = 0, \text{ pared inferior aislante} \end{cases} \quad (4.15a)$$

$$z = 1 \rightarrow \partial_z u_0 + Ma = 0, \partial_z \tau + Bi\tau = 0 \quad (4.15b)$$

Se tiene una condición adicional al considerar el flujo de retorno, pues el flujo neto de masa a través de una sección vertical cualquiera ha de anularse

$$\int_0^1 u_0 dz = 0 \quad (4.16)$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene las expresiones para los perfiles de temperatura y velocidad

$$\tau = BoMa (8z^3 - 15z^2 + 6z)/48 - Ma(3z^2 - 2z)/4 \quad (4.17a)$$

$$u_0 = BoMa z(8z^4 - 25z^3 + 20z^2 - 3Bi^\dagger)/960 - Ma z(3z^3 - 4z^2 + Bi^\dagger)/48 \quad (4.17b)$$

con $Bi^\dagger = Bi/(1 + Bi)$ para un pared inferior conductora y $Bi^\dagger = 1/z$ si es aislante. Los perfiles de velocidad y temperatura están formados por la suma de dos términos: uno de empuje proporcional al número de Bond Bo , y otro termocapilar proporcional al número de Marangoni Ma .

4.5 Ecuaciones de evolución de las perturbaciones

Si se aumenta el gradiente horizontal de temperatura el flujo base se desestabiliza. La inestabilidad se analiza considerando perturbaciones infinitesimales en la velocidad $\mathbf{u} = (u_0(z) + u', v', w')$, temperatura $T = x + \tau(z) + \theta'$ y presión $p = p_0 + p'$ regidas por las ecuaciones de evolución

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.18a)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + u_0 \partial_x \mathbf{u} + w \partial_z u_0 \hat{\mathbf{x}} \right] = -\nabla p + BoMa \theta \hat{\mathbf{z}} + \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_0 \partial_x \theta + w \partial_z \tau + u = \nabla^2 \theta \quad (4.18c)$$

donde hemos suprimido las primas por claridad, y $\hat{\mathbf{x}}$ es un vector unitario en la dirección x . Las condiciones de contorno que corresponden a las perturbaciones son

$$z = 0 \rightarrow \quad \mathbf{u} = 0, \begin{cases} \theta = 0, \text{ pared inferior conductora} \\ \partial_z \theta = 0, \text{ pared inferior aislante} \end{cases} \quad (4.19a)$$

$$z = 1 \rightarrow \quad \partial_z \mathbf{u}_h + Ma \nabla_h \theta = \partial_z \theta + Bi \theta = w = 0 \quad (4.19b)$$

Como el sistema es extenso las perturbaciones infinitesimales en la dirección horizontal se pueden desarrollar en modos normales $(\mathbf{u}, \theta, p) = (\mathbf{u}(z), \theta(z), p(z)) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$, donde ω denota la tasa compleja de crecimiento, $\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k} = k_x$ es el número de onda en la dirección del gradiente de temperatura y $\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{k} = k_y$ en la dirección transversal. Eliminando la presión de las ecuaciones de balance se tiene

$$\partial_z^2 u = L u + \frac{k_y^2}{k^2} Pr^{-1} w \partial_z u_0 + i \frac{k_x}{k^2} (\partial_z^3 w - L \partial_z w) \quad (4.20a)$$

$$\partial_z^4 w = (L + k^2) \partial_z^2 w - L k^2 w + Bo Ma k^2 \theta - i k_x Pr^{-1} w \partial_z^2 u_0 \quad (4.20b)$$

$$\partial_z^2 \theta = (k^2 + i(\omega + k_x u_0)) \theta + u + w \partial_z \tau_0 \quad (4.20c)$$

donde $L = k^2 + i Pr^{-1}(\omega + k_x u_0)$. Las condiciones de contorno correspondientes son

$$z = 0 \rightarrow \quad u = w = \partial_z w = \begin{cases} \theta = 0, \text{ pared inferior conductora} \\ \partial_z \theta = 0, \text{ pared inferior aislante} \end{cases} \quad (4.21a)$$

$$z = 1 \rightarrow \quad w = \partial_z \theta + Bi \theta = \partial_z u + i k_x Ma \theta = \partial_z^2 w + Ma k^2 \theta = 0 \quad (4.21b)$$

Este conjunto de ecuaciones constituye un problema de autovalores, en el que ω es el autovalor y los campos (u, w, θ) las autofunciones.

4.6 Método numérico de resolución del problema de valores propios.

La estabilidad lineal es equivalente a un problema de valores propios, del tipo

$$\mathbf{A} X = \omega \mathbf{B} X \quad (4.22)$$

en el que la tasa compleja de crecimiento ω se corresponde con los autovalores y X los autovectores. Este problema no admite solución analítica, y hay que acudir a algún esquema numérico para resolverlo. En la literatura aparecen distintas técnicas numéricas de resolución, por ejemplo: la discretización por diferencias finitas [92], el método de las exponenciales de matriz [105] o el método de Chock-Schechter [106], por citar algunos ejemplos.

En el presente trabajo utilizamos un método de resolución espectral cuyo principal atractivo es la gran precisión que alcanza [107]. El método consiste en aproximar los campos desconocidos X (por ejemplo, temperatura y velocidad) por una serie truncada de polinomios de Chebyshev $T_n(z)$

$$X(z) \approx \sum_{k=0}^{N_{Cheb}} a_k T_n(z) \quad (4.23)$$

A continuación, se proyectan las ecuaciones resultantes sobre los polinomios con una ponderación adecuada, y por último, se sustituyen las proyecciones de las ecuaciones sobre los polinomios de grado más elevado por las condiciones de contorno discretizadas, es lo que se denomina *método tau-Chebyshev* [107]. Con este método, se reemplaza el problema de valores propios inicial por un problema equivalente de la forma (4.22), en el que las matrices A y B están formadas por los coeficientes a_k provenientes de la discretización (4.23).

El problema de vectores propios discretizado (4.22) se resuelve con una rutina numérica (por ejemplo con DGEQV de las librerías IMSL) que calcula el conjunto de valores propios reales y complejos, así como los vectores propios correspondientes. Para asegurar la convergencia de los valores propios, se resuelve el mismo problema aumentando progresivamente N_{Cheb} hasta alcanzar la precisión deseada y eliminar posibles autovalores espurios. Al estar interesados en los valores umbrales, prestamos atención especial a los casos en que la mayor tasa de crecimiento de las perturbaciones sea nula $\omega_i = 0$. Para encontrar esa condición utilizamos un algoritmo de Newton-Raphson. Finalmente, los valores críticos del calentamiento y número de onda se obtienen tomando el mínimo de la curva neutra que da la tasa de calentamiento marginal en función del número de onda.

4.7 Inestabilidades convectivas/absolutas

El problema de la estabilidad es más complicado en presencia de un flujo medio en el fluido. Consideremos un punto fijo en el fluido donde una pequeña perturbación se desestabiliza y comienza a crecer. El flujo medio arrastrará esta perturbación mientras se desarrolla. Si la perturbación es arrastrada con una velocidad mayor que su tasa de crecimiento el punto volverá, pasado un tiempo suficiente, a su estado inicial. Sin embargo, las perturbaciones crecen en un sistema de referencia a la velocidad de grupo de éstas. Este comportamiento se denomina inestabilidad *convectiva*, y el sistema sólo amplifica las perturbaciones excitadas externamente. Por contra, cuando las perturbaciones tienen una tasa de crecimiento mayor que la velocidad de arrastre no se desvanecerán localmente. Entonces cualquier perturbación crecerá con el tiempo y terminará ocupando todo el líquido. Este tipo de inestabilidad se denomina *absoluta*.

Además de en capas líquidas calentadas lateralmente, existen otros ejemplos de sistemas en que surgen ondas propagativas. Es el caso del flujo de Taylor-Dean [108, 109] -una variante del problema de Taylor-Couette pero con los cilindros horizontales y parcialmente llenos- donde las ondas propagativas aparecen como bifurcaciones primarias. Más habituales son las situaciones en las que las ondas propagativas surgen tras una bifurcación secundaria; como en la inestabilidad secundaria oscilatoria en convección de Rayleigh-Bénard, o el flujo de Taylor-Couette cuando se desestabilizan los rollos de Taylor en forma de rollos propagativos (wavy vortex flow).

Matemáticamente, el análisis de inestabilidades espacio-temporales se basa en identificar las singularidades de la relación de dispersión compleja correspondiente a un flujo. Huerre y Monkewitz [110] han realizado una descripción rigurosa de las inestabilidades lineales convectivas/absolutas con la ayuda de las funciones de Green, describiendo la evolución espacio-temporal de una perturbación localizada en el tiempo y espacio en función de su velocidad en el sistema de referencia del laboratorio. El carácter convectivo o absoluto aparece entonces como la dependencia o no de la tasa de crecimiento efectiva de la perturbación con la velocidad relativa del sistema de referencia.

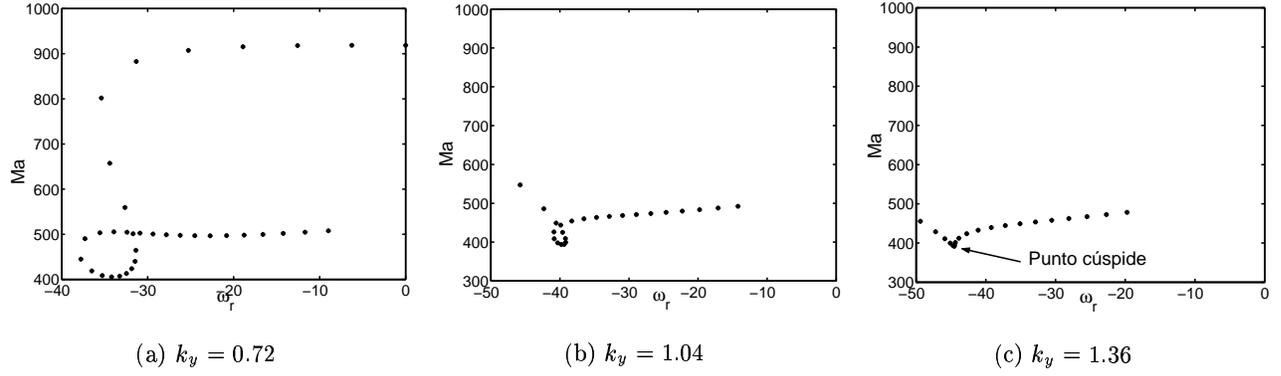


Figura 4.4: Representación del número de Marangoni con respecto a la frecuencia para una tasa de crecimiento espacial $k_{xi} = 0.32$ y $Bo = 0.18$. Los diagramas corresponden a tres valores de k_y , y en ellos se ve como el lazo inicial evoluciona hasta alcanzar un punto cúspide, donde el sistema se hace absolutamente inestable.

Para distinguir entre inestabilidad absoluta y convectiva se debe seguir el número de onda k_0 con velocidad de grupo cero

$$\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0 \quad (4.24)$$

donde k y ω son cantidades complejas. Si la frecuencia compleja correspondiente $\omega_0 = \omega(k_0)$ tiene una tasa de crecimiento positiva $\omega_{0,i}$, el flujo se hace absolutamente inestable. Por el contrario, cuando es negativa el flujo es convectivamente inestable. Habitualmente k_0 es un punto silla de $\omega(k)$ (ver el apéndice E para más detalles), definido por las dos condiciones

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial k_r} = \frac{\partial \omega_i}{\partial k_r} = 0 \quad (4.25)$$

La frecuencia es función del número de onda complejo k , y el número de Marangoni puede considerarse como un parámetro, de modo que $\omega = \omega(k; Ma)$. La restricción adicional de estabilidad neutra $w_i(k; Ma) = 0$ define implícitamente el número de Marangoni crítico $Ma = Ma(k_r; k_i)$. Si se deriva con respecto a k_r se obtiene que $\frac{\partial w_i}{\partial k_r} + \frac{\partial w_i}{\partial Ma} \frac{\partial Ma}{\partial k_r} = 0$. Teniendo en cuenta que en el umbral de estabilidad neutra $\frac{\partial w_i}{\partial Ma} > 0$, la segunda condición para un punto de silla $\frac{\partial w_i}{\partial k_r} = 0$ implica que $\frac{\partial Ma}{\partial k_r} = 0$, y por tanto Ma es un extremo local. En una representación de Ma con respecto a ω_r (ver las Figs. 4.4 y 4.5) las condiciones (4.25) aparecen como un punto cúspide (o de pinzamiento). Siguiendo a Priede y Gerbeth

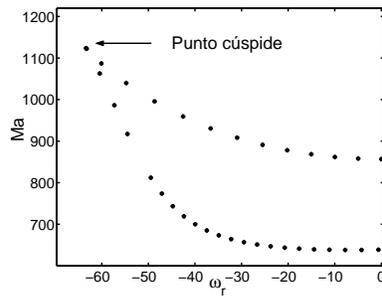


Figura 4.5: Número de Marangoni en función de la frecuencia para $k_{xi} = 0.45$, $Bo = 0.4$. El punto cúspide que define la inestabilidad absoluta es un máximo local.

et al. [94] utilizamos este punto para detectar la inestabilidad absoluta. Al estar el flujo dirigido en la dirección x , sólo será necesario considerar la parte imaginaria de k_x en las Ecs. (4.20-4.21).

4.8 Resultados del análisis absoluto de estabilidad

Debido al gran número de parámetros (k_{xr} , k_{xi} , k_y , Bo , Pr y Ma) involucrados en el cálculo de las inestabilidades absolutas, restringiremos nuestro estudio al aceite de silicona de $0.65 cSt$ ($Pr = 10.3$) usado en los experimentos de Pelacho *et al.* [101, 102] y Burguete *et al.* [100].

Los valores críticos se muestran en la Fig. 4.6 en función del número de Bond. Hemos tomado dos valores pequeños del número de Biot ($Bi = 0.5, 1$), y se observa que su valor no afecta cualitativamente a los parámetros críticos. También se han calculado las curvas tanto para un fondo conductor como adiabático. En todas las gráficas destaca la presencia de dos ramas absolutas para cada caso estudiado. Estas ramas coexisten para algunos valores del número de Bond y la transición entre ellas es discontinua.

Siguiendo numéricamente el punto de la inestabilidad absoluta, a medida que se aumenta la profundidad de la capa líquida (o equivalentemente el número de Bond), se encuentra que para pequeños Bo el número de Marangoni crítico de la inestabilidad absoluta es un mínimo en la representación Ma frente a ω_r (ver la Fig. 4.4), sin embargo para mayores profundidades pasa a ser un máximo local (ver la Fig. 4.5). Por tanto, en la primera rama absoluta (números de Bo pequeños) el punto cúspide de la inestabilidad absoluta es un mínimo local, mientras que en la segunda rama (números de Bo mayores) corresponde a un máximo. Para Bo elevados $Bo > 0.5$ el punto cúspide de la segunda rama desaparece y ya no lo podemos seguir numéricamente.

En la Fig. 4.6(a), se observa que todos los umbrales aumentan con la profundidad, y los números de Marangoni más elevados corresponden al caso de fondo conductor (línea continua). La componente transversal del número de onda disminuye con la profundidad en las dos ramas (ver la Fig. 4.6(b)), en la primera rama los k_y mayores corresponden al caso aislante (línea de puntos y rayas), mientras que en la segunda al conductor. Las propiedades térmicas del fondo afectan en casi un factor dos al valor del número de onda transversal en la primera rama. En la Fig. 4.6(c) se ve que el ángulo de propagación permanece casi inalterado en la primera rama, siendo mayor para el caso conductor que para el aislante. En la segunda rama, el ángulo aumenta con Bo y los ángulos del caso conductor siguen siendo los mayores. La frecuencia crítica (ver la Fig. 4.6(d)) presenta un pequeño crecimiento, casi lineal, con Bo en la primera rama, y una mayor variación en la segunda; en ambos casos la frecuencia mayor corresponde al caso aislante. Las tasas de atenuación espacial se muestran en la Fig. 4.6(e). Los valores mayores de k_{xi} son los del caso conductor, y la primera rama presenta una tasa máxima en el rango $0.2 < Bo < 0.3$ en todos los casos; en la segunda rama el comportamiento es casi lineal.

Todas las curvas se comportan cualitativamente igual para cualesquiera propiedades térmicas del fondo.

Hemos verificado también que la aparición de la inestabilidad absoluta no conlleva un cambio cualitativo de los perfiles de velocidad y temperatura del estado base con respecto a la inestabilidad convectiva, como se ilustra en la Fig. 4.7.

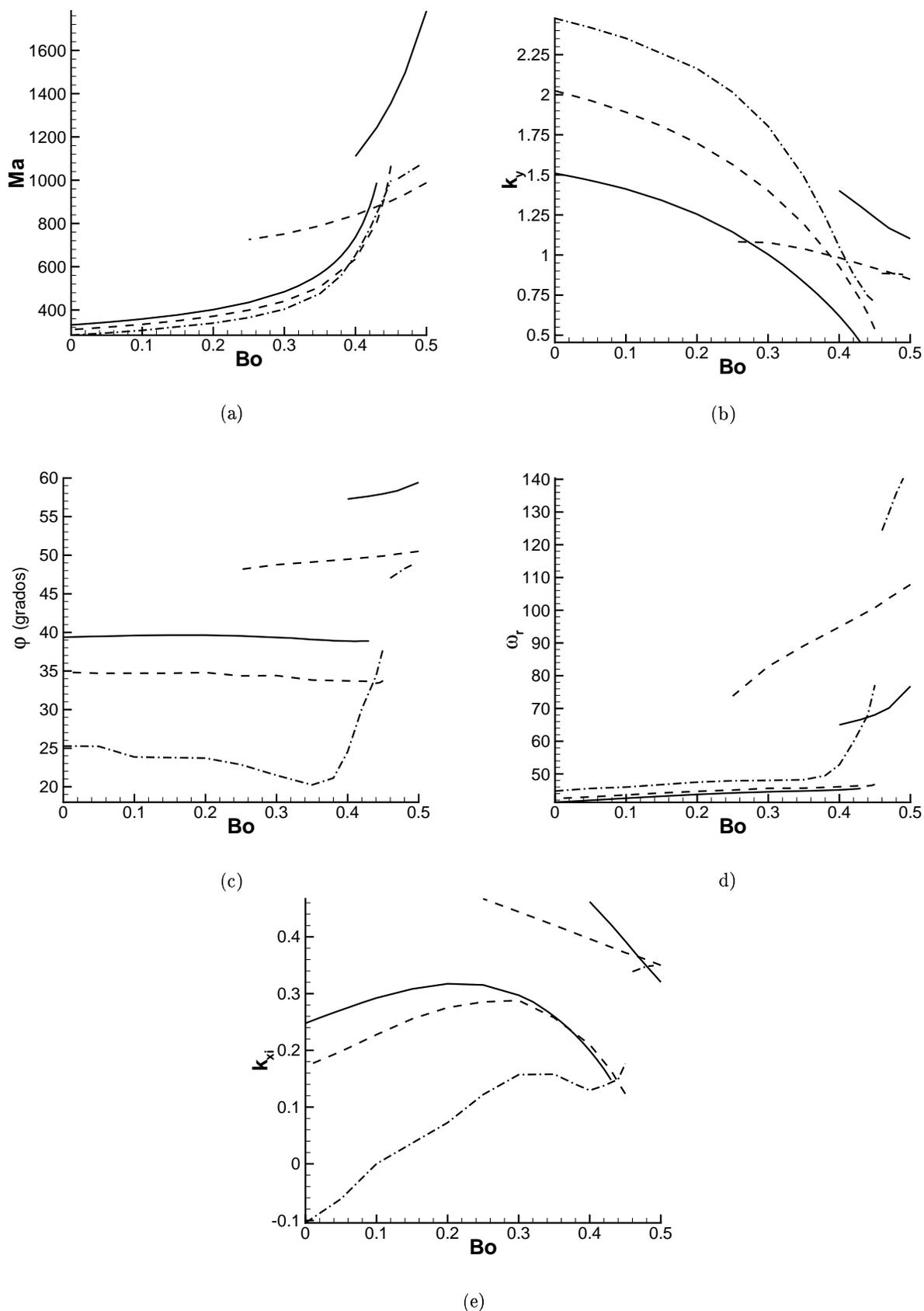


Figura 4.6: Parámetros críticos resultantes del análisis lineal de inestabilidad absoluta para un líquido con $Pr = 10.3$. (a) número de Marangoni, (b) número de onda transversal, (c) ángulo de propagación, (d) frecuencia de oscilación, (e) tasa de atenuación espacial. Línea continua: fondo conductor, $Bi = 1$. Línea a rayas: fondo conductor, $Bi = 0.5$. Línea a puntos y rayas: fondo aislante, $Bi = 0.5$.

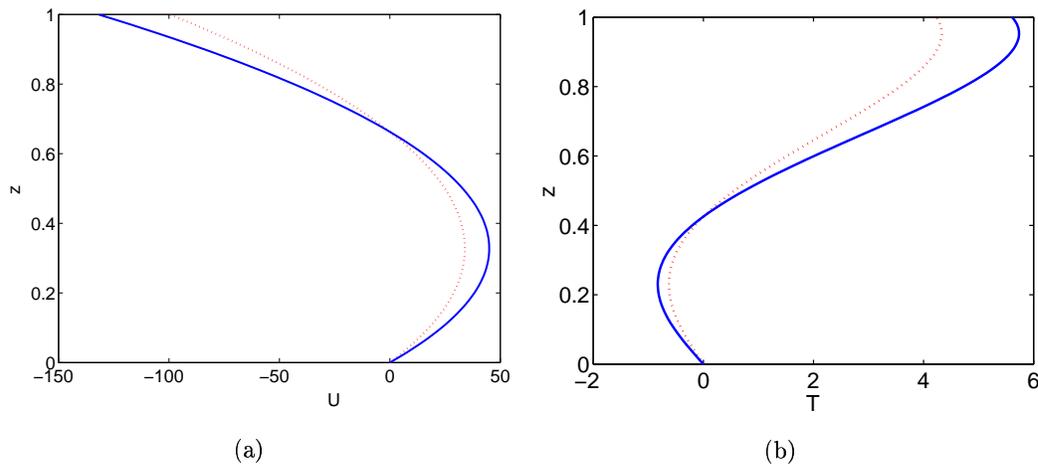


Figura 4.7: Perfil de velocidad (a) y temperatura (b) del estado base para $Bo = 0.32$ y $Pr = 10.3$. Línea continua: perfil en el umbral absoluto, línea punteada: perfil en el umbral convectivo. No se aprecia ningún cambio cualitativo fundamental entre el estado base de los umbrales convectivo y absoluto.

4.9 Experimentos con aceite de silicona de $0.65 cSt$

Con el fin de comparar con los resultados experimentales hacemos, en primer lugar, un resumen de los experimentos sobre ondas hidrotermales efectuados con aceite de silicona de $0.65 cSt$ ($Pr = 10.3$) en geometrías rectangular y cilíndrica.

4.9.1 Geometría rectangular

Recordemos brevemente los principales resultados de Burguete *et al.* [100] y Pelacho *et al.* [101, 102]. En ambos experimentos se varía la diferencia de temperatura entre dos paredes verticales opuestas.

En el primero se efectuaron una serie de medidas en un canal estrecho de $L_y = 250 mm$ de largo y con una anchura L_x que varía entre $10 - 30 mm$. Este diseño corresponde a una geometría casi unidimensional, en la que la dinámica de las ondas se describe mediante una ecuación de Ginzburg-Landau compleja unidimensional [112]. La profundidad del líquido se varía entre $h = 0.5 - 10 mm$ y el gradiente térmico se impone en la dirección x . Dependiendo del espesor del fluido, el sistema presenta dos tipos de regímenes. Para pequeños espesores aparecen *ondas hidrotermales* (hydrothermal waves HTW), mientras que a partir de un valor de la profundidad $h = h_r$ se encuentran *rollos estacionarios*. La profundidad que separa ambos regímenes aumenta con la anchura L_x .

Las HTW se dan en dos formas denominadas OH1 y OH2 por Garnier [111]. Las OH1 parecen emitidas inclinadas desde una línea paralela al eje x (ver la Fig. 4.8(a)), y se observan en un rango de profundidades ($h_c < h < h_r$). Las OH2 se emiten circularmente desde una fuente localizada en la pared fría (ver la Fig. 4.8(b)), y se dan para valores más pequeños de h ($h < h_c$). Para el espesor crítico $h = h_c$ que separa las ondas OH1 de OH2 se detecta experimentalmente una discontinuidad en el número de onda y en la frecuencia. Las ondas OH2 surgen en un estado base sin perturbar, mientras que las de tipo OH1 aparecen superpuestas a un flujo de rollos corrotativos junto a la pared

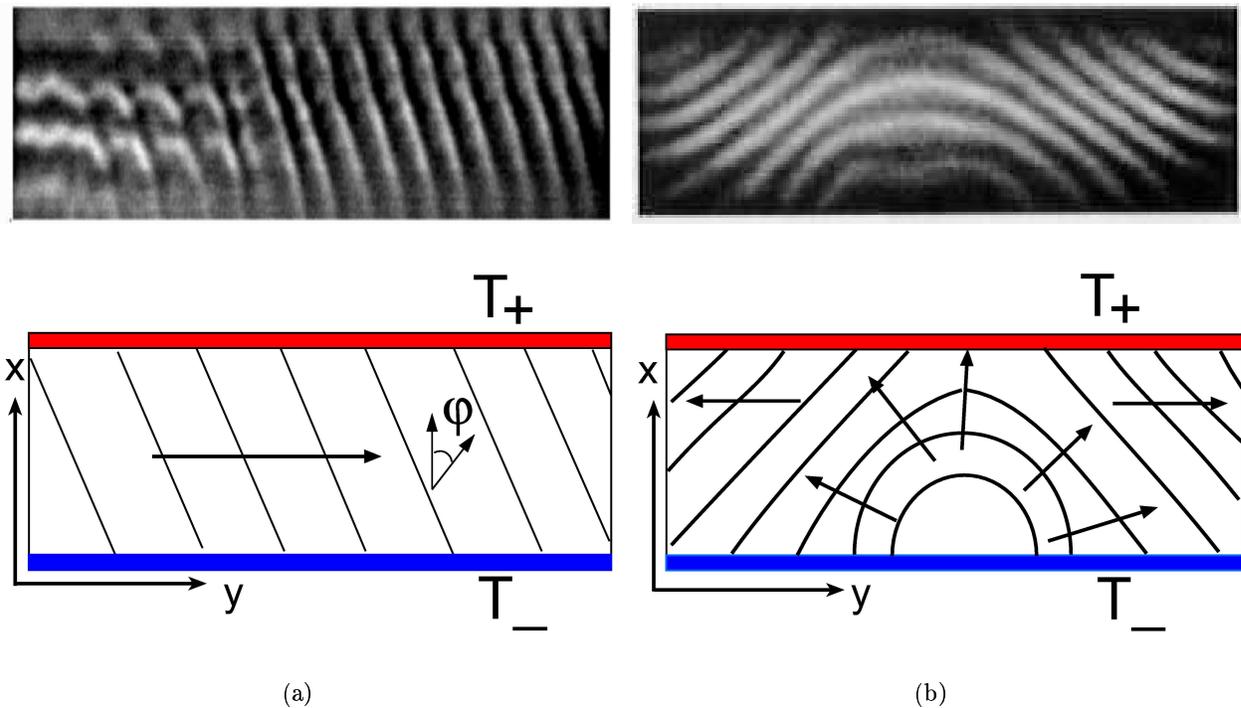


Figura 4.8: Imágenes de ombroscopía en un aceite de silicona de 0.65 cSt obtenida en una celda rectangular. (a) Onda hidrotermal de tipo OH1. Garnier [111]. (b) Onda hidrotermal de tipo OH2. Burguete *et al.* [100].

caliente. En la Fig. 4.9(a) se resume de forma sintética los patrones y los umbrales observados en los experimentos.

En el experimento de Pelacho *et al.* [101] las medidas se realizaron en una celda de dimensiones $L_x = 60 \text{ mm}$ y $L_y = 50 \text{ mm}$, en la que el fondo tiene una conductividad térmica similar al aceite de silicona. Los autores encuentran para $1.5 \text{ mm} < h < 2 \text{ mm}$ ondas hidrotermales de tipo OH1 como primer flujo inestable. Para $2 \text{ mm} < h < 2.75 \text{ mm}$ obtienen en primer lugar rollos estacionarios con su eje perpendicular al gradiente de temperatura, y al aumentar el calentamiento aparece una transición a HTW. Esos mismos autores usaron también una celda de geometría variable [102], con un fondo conductor de aluminio, en la que se realizaron dos tandas de medidas. En una se mantiene fija L_x (100 mm) variando la anchura L_y en un rango 41 – 100 mm; en la otra serie, se mantiene fija L_y (100 mm) y se varía L_x (41 – 88 mm). El espesor del aceite de silicona se mantiene fijo en $h = 1.5 \text{ mm}$. El experimento se proyectó para establecer la influencia de la geometría de la celda en las características de las HTW. El principal resultado de este trabajo fue verificar que el número de onda, la frecuencia y el umbral de las ondas aumentan cuando L_y disminuye. Cabe esperar que los valores críticos experimentales para las celdas más anchas se aproximen más a los resultados teóricos, en los que se supone una celda con extensión infinita.

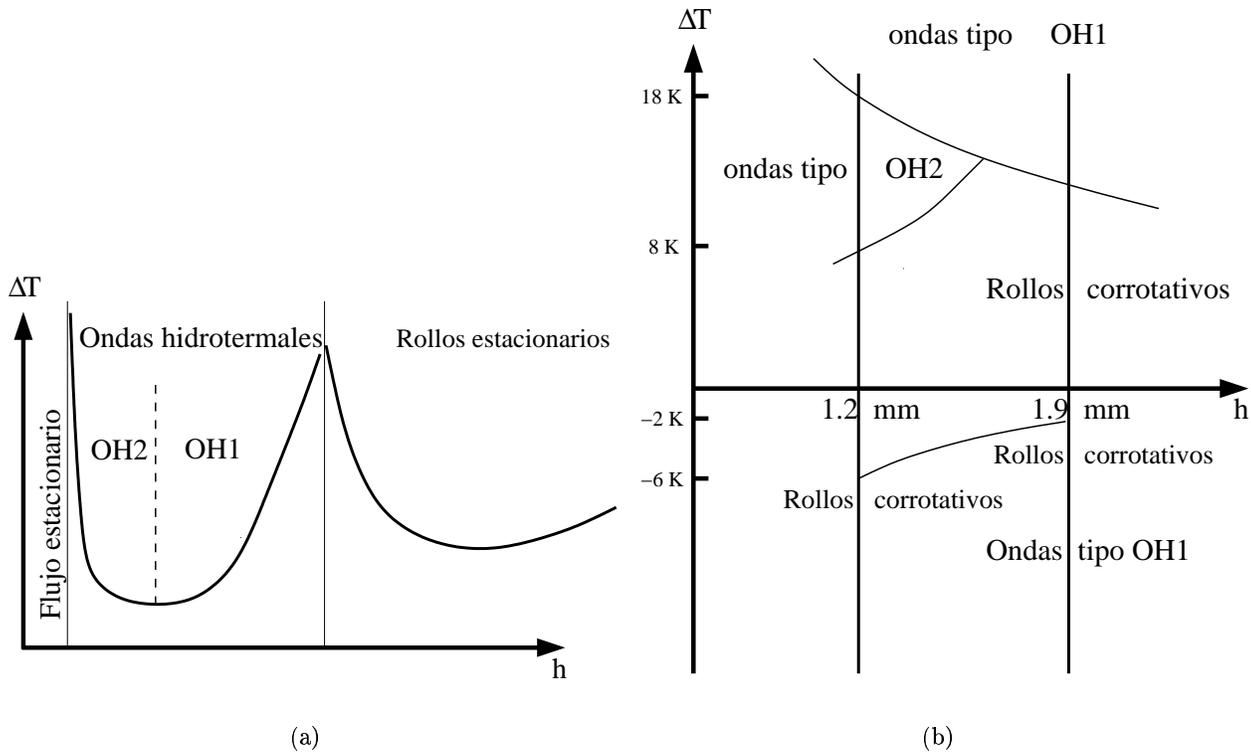


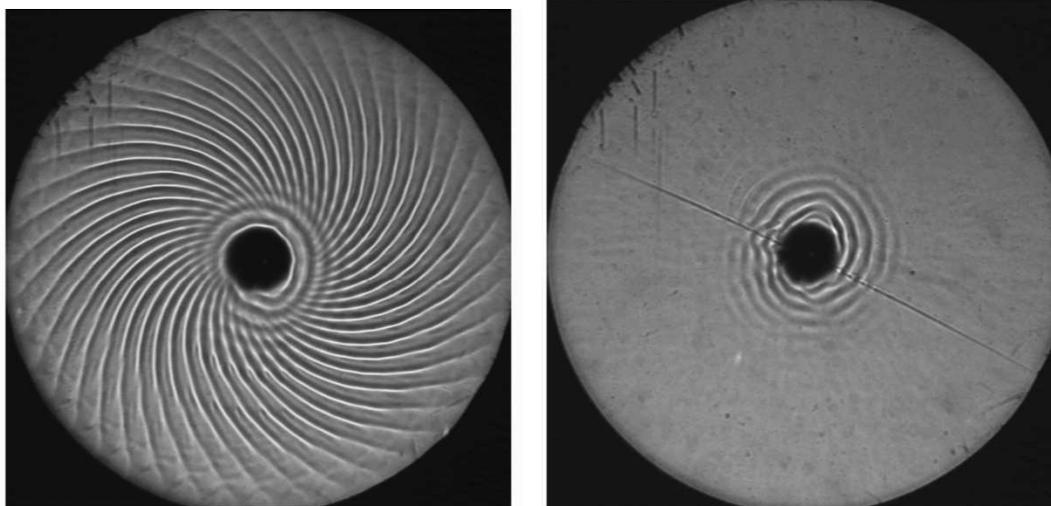
Figura 4.9: Principales resultados experimentales encontrados por Burguete *et al.* [100] en una celda de geometría cilíndrica (a) y por Garnier [111] en una celda de geometría cilíndrica (b).

4.9.2 Geometría cilíndrica

Garnier *et al.* [111, 112] efectuaron un estudio exhaustivo de las HTW en una celda formada por dos cilindros concéntricos. El gradiente de temperatura aplicado es radial, ya sea calentando el disco exterior o interior. Consideraron dos espesores del aceite $h = 1.9$ y 1.2 mm. Para $h = 1.2$ mm encuentran ondas de tipo OH2 (ver la Fig. 4.10(b)). Para $h = 1.9$ mm, hallan ondas de tipo OH1 (ver Fig. 4.10(a)) sobre rollos corrotativos. En la Fig. 4.9(b) se resumen las estructuras observadas en función de los dos parámetros de control: la profundidad h y la diferencia de temperatura entre el radio externo e interno $\Delta T = T_{ext} - T_{int}$.

La analogía entre las ondas OH1 y OH2 en celdas rectangulares y cilíndricas se justifica por una transformación afín entre el espacio de coordenadas (x, y) de una celda rectangular y las variables naturales (r, θ) propias de una celda cilíndrica. Se demuestra que las ondas OH1 en forma de espiral (Fig. 4.10(a)) se corresponden con las líneas inclinadas del rectángulo (Fig. 4.8(a)) y que las ondas OH2 en forma de discos concéntricos (Fig. 4.10(b)) se asemejan con fuentes localizadas en una pared en la celda rectangular (Fig. 4.8(b)).

De este modo se puede afirmar que los dos tipos de ondas hidrotermales y la forma en que aparecen no dependen de la geometría utilizada.



(a)

(b)

Figura 4.10: Imagen de ombroscopía de un aceite de silicona de 0.65 cSt obtenida en una celda cilíndrica. En la figura de la izquierda se muestran las ondas OH1 en forma de espiral, y a la derecha las ondas OH2 en forma de círculos concéntricos. Garnier [111].

4.10 Comparación con los resultados experimentales

Al intentar comparar los resultados experimentales con las predicciones teóricas de Smith y Davis *et al.* [17], y Mercier y Normand *et al.* [93] surgieron importantes discrepancias. A continuación veremos que nuestros cálculos basados en la inestabilidad absoluta mejoran cualitativa y cuantitativamente el acuerdo entre teoría y experimento.

En efecto, en las Figs. 4.11 y 4.12, se muestran los resultados de Burguete *et al.* [100] y Pelacho *et al.* [101, 102], junto con los parámetros críticos obtenidos para la inestabilidad absoluta. Hemos escogido el caso de un fondo conductor y $Bi = 1$, por ser la curva que mejor ajusta con los experimentos (para otras condiciones se obtienen curvas similares). Comentamos cada una de las curvas por separado.

Marangoni crítico. En la Fig. 4.11(a), se representa el número de Marangoni crítico para los umbrales de inestabilidad absoluta (línea continua gruesa) y convectiva (línea negra punteada). Los Ma experimentales se han calculado tomando el gradiente horizontal impuesto sobre las paredes. Debido a los efectos de capa límite térmica cerca de las paredes fría y caliente, este Marangoni es mayor que el valor calculado a mitad de la celda [79, 102], en principio más conveniente para comparar con la teoría, en la que se suponen gradientes uniformes. Para Bo pequeños ($Bo < 0.2$) no se aprecia una gran diferencia entre los umbrales convectivo y absoluto. Sin embargo, al aumentar la profundidad los efectos de empuje son más importantes y la diferencia empieza a aumentar. El umbral de inestabilidad convectiva (línea negra punteada) crece casi linealmente con el número de Bond, y a medida que

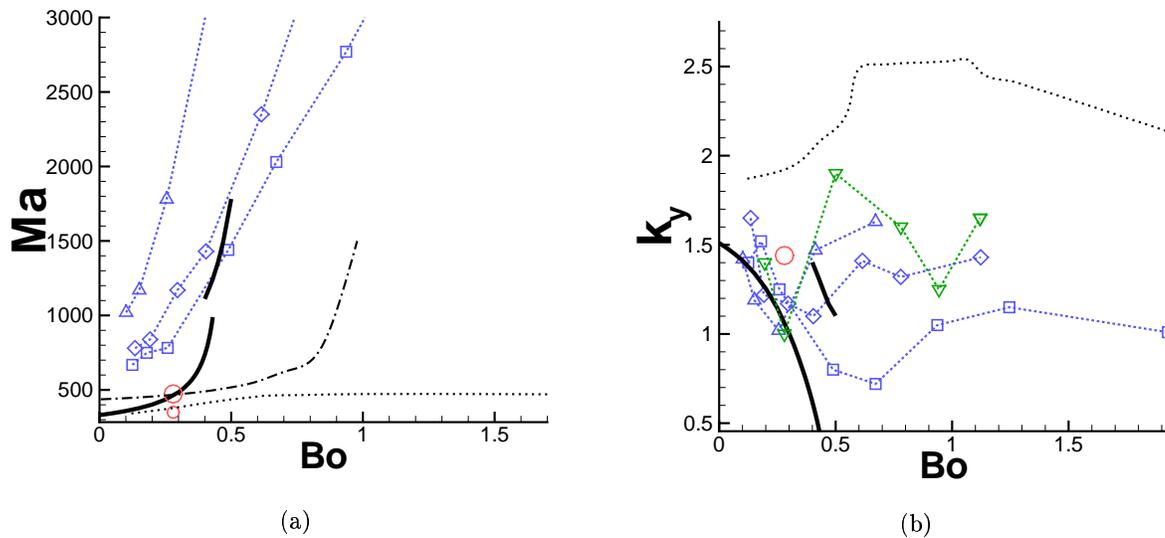


Figura 4.11: Números de Marangoni críticos (a) y números de onda transversales (b) con respecto al número de Bond. Líneas delgadas a tramos: datos experimentales de Burguete *et al.* [100] (Δ $L_x = 10\text{ mm}$, \diamond $L_x = 20\text{ mm}$, \square $L_x = 30\text{ mm}$), de Pelacho *et al.* [101] (∇) y Pelacho *et al.* [102] (\circ , \circ Marangoni a mitad de celda). Línea continua gruesa: inestabilidad absoluta. Línea a tramos y punteada: umbral convectivo de perturbaciones estacionarias. Línea negra punteada: inestabilidad convectiva.

aumenta la profundidad del líquido se separa respecto a los valores experimentales. Por contra, las ramas absolutas siguen la tendencia de los datos experimentales, y se aproximan más a ellos hasta que desaparecen. En el experimento de Pelacho *et al.* [102], efectuado en una celda ancha ($L_x = 100\text{ mm}$ y $L_y = 100\text{ mm}$) con fondo conductor y $h = 1.5\text{ mm}$, se calcula el Marangoni de forma local (círculo menor, $Ma_c \sim 350$) y con la diferencia de temperatura impuesta en las paredes (círculo mayor, $Ma_c \sim 473$). En el segundo caso el acuerdo con el umbral absoluto es notable.

Las paredes inducen perturbaciones estacionarias que no son las más inestables [94]. Además, para ser observables experimentalmente, las perturbaciones convectivas oscilatorias deberían tener una tasa de crecimiento suficientemente grande, debido al tamaño finito de los dispositivos experimentales. Por tanto, no es de extrañar que las primeras perturbaciones detectadas en los experimentos sean rollos estacionarios con su vector de onda en dirección del flujo ($k_y = 0$), incluso cuando el umbral estacionario es mayor que el convectivo. Tanto en geometría rectangular como en cilíndrica se encuentran patrones en forma de rollos corrotativos en el lado más caliente de la celda, a partir de una profundidad crítica del líquido (Fig. 4.9). La curva de las perturbaciones estacionarias se presenta en la Fig. 4.11(a) con una línea a tramos y punteada, que está por encima del umbral de estabilidad absoluto hasta $Bo \sim 0.25$. A partir de ese valor el sistema se ve afectado en primer lugar por perturbaciones estacionarias.

Por tanto, Burguete *et al.* [100] observan las ondas hidrotermales de tipo OH1 sobre rollos corrotativos, que deberían analizarse mediante un análisis numérico de un flujo base complicado, que supera el alcance del presente estudio.

Número de onda. El número de onda transversal de las ondas hidrotermales se muestra en la Fig. 4.11(b). Sus valores presentan una gran dispersión dependiendo del experimento. No obstante, se distinguen dos regímenes en los experimentos de Pelacho *et al.* [101] y Burguete *et al.* [100]: en el primero, el número de onda transversal disminuye con la profundidad; y en el segundo, para mayores espesores, el número de onda es menos dependiente de Bo , con una tendencia a crecer en Burguete *et al.* [100] y a decrecer en Pelacho *et al.* [101].

Ni los valores ni la tendencia de k_y en los experimentos se aproximan a los números de onda de la inestabilidad convectiva (línea negra punteada en la Fig. 4.11(b)). En concreto, los valores experimentales son del orden de la mitad de los de la teoría convectiva. La comparación es mucho mejor con los parámetros de la inestabilidad absoluta. Los números de onda de las ramas absolutas también reproducen mejor la tendencia de los resultados experimentales que los de la curva convectiva. Para pequeñas profundidades, tanto los números de onda experimentales como los teóricos de la primera rama absoluta disminuyen con la profundidad. En el segundo régimen, la comparación no es tan clara porque los datos experimentales presentan una gran dispersión. Creemos que la distinta tendencia de k_y en las ondas tipo OH1 de la Ref. [100] y nuestros cálculos se debe principalmente a la poca anchura de las celdas. No obstante, en el experimento de Pelacho *et al.* [101] realizado en una celda mayor de $L_x = 60\text{ mm}$ y $L_y = 50\text{ mm}$ (triángulos invertidos en la Fig. 4.11(b)) se ve un segundo régimen caracterizado por un descenso del número de onda con la profundidad, en buen acuerdo con la segunda rama absoluta detectada en nuestros cálculos.

Ángulos de propagación. Los ángulos de propagación de las ondas hidrotermales presentan dos tendencias distintas que también se corresponden con las dos ramas absolutas. Las ondas tipo OH2 de Burguete *et al.* [100] se propagan con ángulos próximos a 30° . A partir de $Bo \sim 0.4$, aparecen las OH1, cuya dirección de propagación se va acercando a la dirección perpendicular al flujo al aumentar la profundidad. La curva absoluta presenta también una rama inicial en la que los ángulos de propagación no se ven casi alterados por el espesor, y otra rama en la que el ángulo aumenta con la profundidad. Los ángulos de propagación de Pelacho *et al.* [101] discrepan más de las predicciones teóricas a partir de $Bo \sim 0.5$, y para $Bo = 0.28$ hay una gran desviación con respecto al resto de los datos que no hemos podido explicar. En el experimento de Pelacho *et al.* [102] realizado en la celda más ancha se obtiene un ángulo de propagación de 40° , que difiere muy poco del valor teórico que hemos obtenido 40.5° . La curva convectiva también parece reproducir las tendencias de los datos experimentales, aunque para profundidades pequeñas el acuerdo con éstos es peor que con la absoluta.

Frecuencias. La frecuencia de oscilación en el umbral calculada con el análisis convectivo de Mercier y Normand [93] y el absoluto nuestro son similares. En el experimento de Pelacho *et al.* [101] se ven de nuevo dos regímenes: pequeñas frecuencias para Bo pequeños ($\omega_r \sim 45$), y a continuación una zona de fuerte crecimiento de ω_r con la profundidad. Esto es lo que se observa también en las curvas de la inestabilidad absoluta. Burguete *et al.* [100] obtienen frecuencias con un régimen inicial que disminuye con Bo , seguido por otro de crecimiento de ω_r con Bo . Las discrepancias con nuestros resultados son mayores que con el resto de parámetros críticos debido, tal vez, a una mayor influencia del tamaño del contenedor sobre la frecuencia de oscilación. Nuestros cálculos de frecuencia concuerdan menos bien con los experimentales de Pelacho *et al.* [102] que el resto de parámetros.

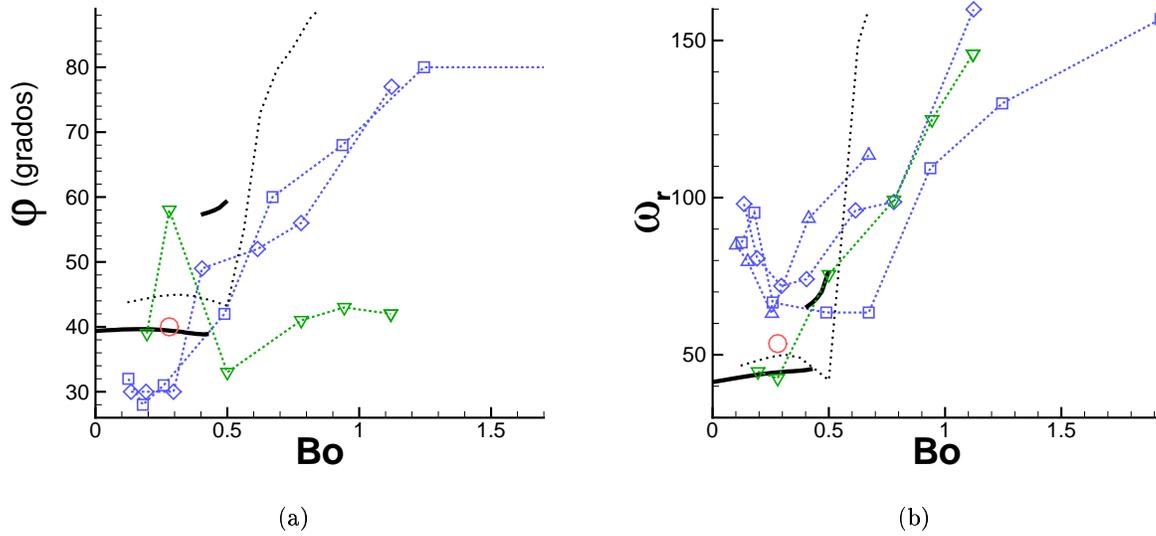


Figura 4.12: Ángulo del vector de onda con respecto al eje x (a) y frecuencia de oscilación (b) con respecto al número de Bond. Líneas delgadas a tramos: datos experimentales de Burguete *et al.* [100] ($\triangle L_x = 10 \text{ mm}$, $\diamond L_x = 20 \text{ mm}$, $\square L_x = 30 \text{ mm}$), de Pelacho *et al.* [101] (∇) y Pelacho *et al.* [102] (\circ). Línea gruesa continua: inestabilidad absoluta. Línea negra punteada: inestabilidad convectiva.

4.11 Conclusiones

Hemos estudiado la estabilidad de una capa líquida calentada lateralmente. Se han deducido las ecuaciones de evolución de las perturbaciones, y resuelto el problema de autovalores asociado con un método de tau-Chebyshev. Esto nos ha permitido determinar los umbrales convectivo y absoluto de estabilidad para el caso de perturbaciones tridimensionales. Para hallar los umbrales absolutos de estabilidad hemos tomado números de onda complejos en la dirección del flujo y hallado el punto cúspide que caracteriza la inestabilidad absoluta, y lo hemos seguido numéricamente.

Los cálculos se han efectuado para condiciones de contorno aislantes y conductoras, y para varios números de Biot, obteniéndose en todos los casos el mismo tipo de comportamiento cualitativo que resumimos a continuación. Se encuentran dos regímenes distintos, caracterizados por la dependencia de los parámetros críticos con el número de Bond. En el primer régimen, el número de onda transversal disminuye con Bo , el ángulo de propagación y frecuencia apenas varían. El segundo régimen aparece para espesores mayores, en él el número de onda transversal decrece menos con Bo , el ángulo de propagación y la frecuencia aumentan rápidamente. El primer régimen se corresponde con una rama marginal absoluta, definida por un punto cúspide que es un mínimo local, mientras que en el segundo pasa a ser un máximo local. Hemos verificado que el paso de inestabilidad convectiva a absoluta no se debe a un cambio cualitativo en el flujo de base.

Al usar el concepto de inestabilidad absoluta hemos mejorado las predicciones de Smith y Davis [17], y Mercier y Normand [93] que no reproduce ni los valores ni las tendencias de los parámetros

críticos de las ondas hidrotérmicas. Hemos mostrado que la inestabilidad absoluta ajusta bastante mejor con los valores experimentales del número de Marangoni crítico, el número de onda, y el ángulo de propagación; para la frecuencia el análisis convectivo y absoluto son comparables [113]. El acuerdo de nuestros cálculos con las medidas de Pelacho *et al.* [102] en la celda de mayores dimensiones es excelente. Las ondas hidrotérmicas de tipo OH1 y OH2 halladas en los experimentos se identifican con las ramas marginales absolutas encontradas en nuestro análisis, lo que permite justificar la transición discontinua que se observa entre los dos tipos de ondas que tienen, por tanto, distinto origen.

Hemos centrado nuestros cálculos en un líquido con $Pr = 10.3$, debido a la dificultad numérica del cálculo de inestabilidades absolutas desde las ecuaciones de Navier-Stokes. No obstante, se espera que los resultados principales de nuestro análisis serán válidos también para otros Pr intermedios.

Finalmente, debemos señalar que sería interesante ampliar este trabajo a geometría cilíndrica; también queda para estudios posteriores el efecto de los rollos corrotativos sobre las ondas OH1, que requiere un estado numérico no lineal detallado.

Capítulo 5

Inestabilidades convectivas en dos líquidos superpuestos calentados lateralmente

En el capítulo anterior hemos repasado los principales resultados experimentales sobre ondas hidrotérmicas en capas líquidas. La principal dificultad en la comparación detallada con la teoría es la imprecisión en el conocimiento del transporte térmico en la interfase líquido-aire. Para intentar superarla supusimos, siguiendo a Priede y Gerbeth *et al.* [94], y Mercier y Normand *et al.* [93], que la fase de gas sobre el líquido es pasiva (aproximación monocapa). De este modo, la transferencia de calor entre el líquido y el gas queda descrita con el número de Biot. Sin embargo, al inicio de la convección la dinámica de las perturbaciones térmicas y mecánicas en el gas puede influir sobre la convección en la fase líquida. En este caso, la utilidad del número de Biot es cuestionable y la aproximación monocapa debe ser revisada y, en general, se requiere una descripción hidrodinámica completa de dos fluidos superpuestos.

Se sabe desde hace algún tiempo [114] que la dinámica de dos líquidos superpuestos calentados verticalmente presenta una mayor variedad de comportamientos que la de un solo líquido. Por ejemplo, se han encontrado inestabilidades oscilatorias, transiciones entre hexágonos up y down [115], y la existencia de patrones en forma de cuadrados en el umbral [116]. La gran variedad de fenómenos en sistemas bicapa se debe al gran número de variables implicadas, entre las que se incluyen las relaciones de los parámetros hidrodinámicos de los líquidos participantes. Se ha efectuado un gran número de trabajos, tanto teóricos como experimentales, que estudian la influencia de la interfase y el acoplamiento entre los fluidos [117, 118, 119, 120, 121, 122], destacando los estudios de Cardin *et al.* [123, 124] y Nataf *et al.* [125] sobre el acoplamiento térmico y viscoso de dos capas líquidas superpuestas.

Hay tan sólo unos pocos trabajos sobre gradientes de temperatura horizontales en líquidos superpuestos, que pasamos a comentar a continuación. Los primeros trabajos se deben a Villers y Platten [20, 126], quienes midieron en un sistema formado por agua y heptanol los perfiles de velocidad en cada capa en función de la profundidad. También desarrollaron un modelo teórico simple para calcular los perfiles horizontales de velocidad en función de la relación de viscosidades, coeficientes de dilatación y espesores de ambas capas. Koster *et al.* [127] visualizaron posteriormente el flujo convectivo para

los sistemas FC70/aceite silicona 10 *cSt* y FC70/aceite silicona 50 *cSt*. Azuma *et al.* [128] observaron una estructura de flujo multicelular en el líquido superior de una celda abierta al aire. Villers y Platten [20], Napolitano *et al.* [129], Wang *et al.* [130] estudiaron teóricamente el caso de la convección debida al empuje y la tensión interfacial para el caso unidimensional, y Liu *et al.* [131] trataron la misma geometría pero con la superficie superior abierta al aire. Posteriormente, Doi y Koster [21] analizaron la convección termocapilar en geometrías bidimensionales y condiciones de microgravedad, cuando la superficie superior está abierta al aire, y determinaron en que condiciones la capa inferior permanece en reposo. Se han efectuado simulaciones numéricas bidimensionales por Liu *et al.* [131] y Doi y Koster [21] en sistemas con relación de aspecto finita, que confirman análisis teóricos previos según los cuales la convección en la capa encapsulada (líquido inferior) se puede reducir significativamente escogiendo un líquido encapsulante (líquido superior) adecuado. Crespo *et al.* [132] mostraron numéricamente que en un sistema agua/FC75 en microgravedad se reduce significativamente el flujo, y que la deformación de la interfase es despreciable, incluso para grandes números de Marangoni. Liu *et al.* [133] efectuaron un estudio numérico teniendo en cuenta el empuje y la tensión interfacial con una interfase deformable, mostrando una reducción del flujo en el líquido encapsulado (*Ga As*) cuando el encapsulante (*B₂O₃*) es altamente viscoso.

Aún no ha habido un estudio exhaustivo del flujo base que se establece en bicapas líquidas calentadas lateralmente, ni de su estabilidad con respecto a perturbaciones bidimensionales ni tridimensionales. En este capítulo extendemos el estudio del capítulo anterior al caso de dos líquidos superpuestos, aunque nos restringiremos a las inestabilidades convectivas. Para ello, formulamos el problema matemáticamente teniendo en cuenta las fuerzas termocapilares y la gravedad, hacemos un estudio exhaustivo del estado base que caracteriza este sistema, y efectuamos un análisis de estabilidad con respecto a perturbaciones bidimensionales y tridimensionales.

5.1 Acoplamiento de fluidos en sistemas bicapa

En dos líquidos superpuestos e inmiscibles existen cinco formas diferentes de acoplamiento en los flujos convectivos (ver la Fig. 5.1):

- La capa inferior se desestabiliza por efecto del empuje y arrastra al líquido superior (ver la Fig. 5.1(a)).
- La capa superior se desestabiliza por efecto del empuje y arrastra al líquido inferior (ver la Fig. 5.1(b)).

Para ciertas profundidades las fuerzas de empuje son similares en ambos líquidos, siendo posible dos nuevos tipos de fenómenos:

- Acoplamiento mecánico (ver la Fig. 5.1(c)), caracterizado porque los rollos de cada capa líquida rotan en direcciones opuestas.
- Acoplamiento térmico (ver la Fig. 5.1(d)), caracterizado porque los rollos giran en cada capa en la misma dirección.

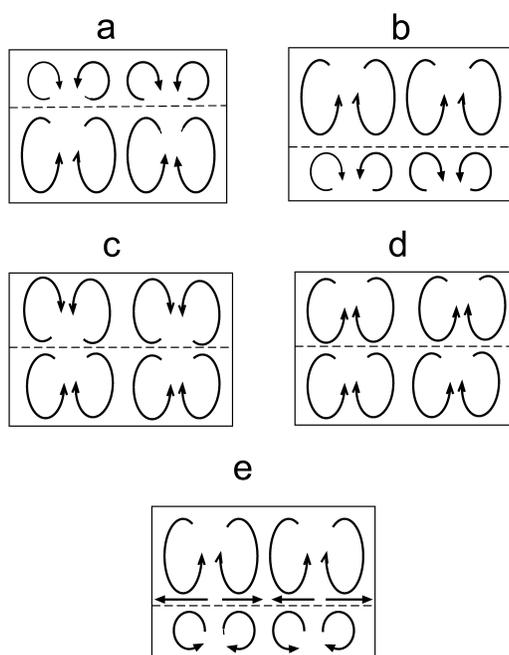


Figura 5.1: Esquemas de los cinco tipos de acoplamiento convectivo en bicapas líquidas. Adaptado de Johnson y Narayanan [134].

En el acoplamiento puramente mecánico, cada capa se mueve independientemente y la interfase es isoterma, y en el térmico debe haber un línea de velocidad nula en la interfase para mantener la condición de adherencia.

- Acoplamiento térmico debido a la tensión interfacial. Se da habitualmente en sistemas gas-líquido en los que la convección debida a efectos de empuje predomina en la capa de gas (ver la Fig. 5.1(e)).

5.2 Formulación del problema

Consideremos un sistema formado por dos capas horizontales superpuestas de líquidos inmiscibles, con espesores $h^{(i)}$, densidades $\rho^{(i)}$, viscosidades cinemáticas $\nu^{(i)}$, coeficientes de dilatación $\alpha^{(i)}$, conductividades térmicas $\lambda^{(i)}$, y difusividades térmicas $\kappa^{(i)}$; donde los superíndices $i = 1, 2$ se refieren a las capas inferior y superior, respectivamente. Se supone que el sistema tiene una extensión horizontal infinita, y está limitado en la dirección vertical por dos paredes horizontales rígidas y conductoras (ver la Fig. 5.2). La interfase entre ambos líquidos se considera horizontal y no deformable, y se toma como origen de coordenadas.

El sistema se calienta horizontalmente, con un gradiente de temperatura constante β , creando un perfil de temperatura conductor $T = T_- + \beta x$, donde T_- denota la temperatura del lado frío. Consideramos válida la aproximación de Boussinesq en ambas capas. Como siempre, se cumple la ecuación de estado $\rho^{(i)} = \rho_0^{(i)} [1 - \alpha^{(i)}(T - T_-)]$, y la tensión interfacial disminuye con la temperatura $\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_-)$, donde $\gamma = -\frac{\partial \sigma}{\partial T}$.

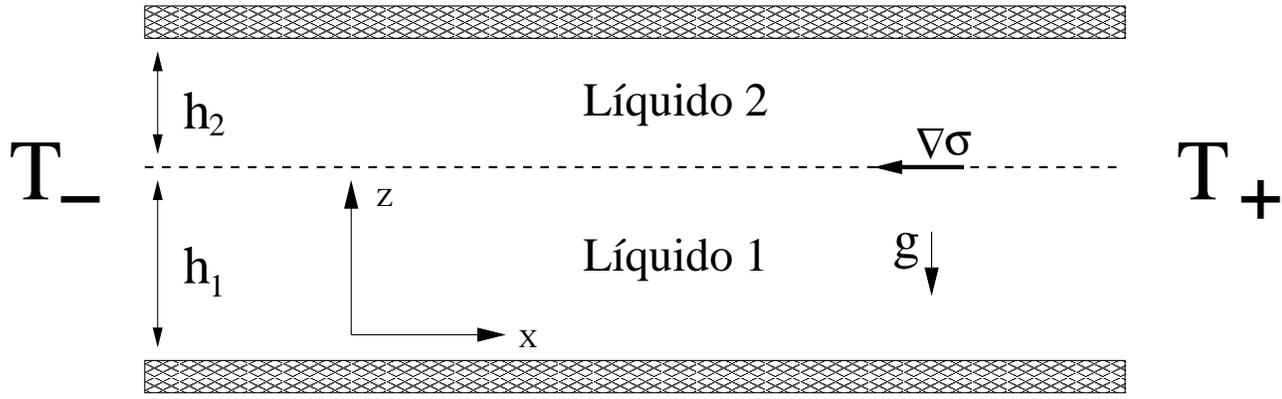


Figura 5.2: Diagrama del sistema bicapa. Dos líquidos inmiscibles superpuestos, limitados horizontalmente por paredes rígidas y térmicamente conductoras, están sometidos a un gradiente horizontal de temperatura. Se supone que la interfase no es deformable, y que sobre el sistema actúan la gravedad y la tensión interfacial.

Recordemos que en cada líquido se han de cumplir las Ecs. 4.5 que enunciamos en el capítulo anterior

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(i)} = 0 \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(i)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(i)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(i)} = -\frac{\nabla p^{(i)}}{\rho_0^{(i)}} - g[1 - \alpha(T^{(i)} - T_-)]\hat{\mathbf{z}} + \nu^{(i)} \nabla^2 \mathbf{u}^{(i)} \quad (5.1b)$$

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(i)} \cdot \nabla) T^{(i)} = \kappa^{(i)} \nabla^2 T^{(i)} \quad (5.1c)$$

donde $\mathbf{u}^{(i)}$ ($u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}$) es el campo de velocidades, $p^{(i)}$ la presión termodinámica y g la aceleración de la gravedad. Las condiciones de contorno en las paredes rígidas y conductoras inferior y superior son:

$$z = -h^{(1)} \rightarrow \quad \mathbf{u}^{(1)} = 0, \quad T^{(1)} = T_w \quad (T_w = T_- + \beta x) \quad (5.2a)$$

$$z = h^{(2)} \rightarrow \quad \mathbf{u}^{(2)} = 0, \quad T^{(2)} = T_w \quad (T_w = T_- + \beta x) \quad (5.2b)$$

Además, se deben incluir las condiciones de continuidad de temperatura, flujo de calor, y velocidad en la interfase (la componente normal de la velocidad es nula en una interfase indeformable)

$$z = 0 \rightarrow \quad \mathbf{u}_h^{(1)} = \mathbf{u}_h^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} = 0, \quad T^{(1)} = T^{(2)}, \\ \lambda^{(1)} \partial_z T^{(1)} = \lambda^{(2)} \partial_z T^{(2)}, \quad \partial_z \mathbf{u}_h^{(2)} - \partial_z \mathbf{u}_h^{(1)} = -\frac{d\sigma}{dT} \nabla_h T^{(1)} \quad (5.3)$$

La última relación en (5.3) expresa el balance de tensiones tangenciales. Para transformar las ecuaciones de evolución y sus condiciones de contorno a forma adimensional elegimos las escalas del líquido

inferior: longitud $h^{(1)}$, tiempo $h^{(1)2}/\kappa^{(1)}$, velocidad $\kappa^{(1)}/h^{(1)}$, presión $\rho^{(1)}\nu^{(1)}\kappa^{(1)}/h^{(1)2}$, y temperatura $\beta h^{(1)}$. Por tanto, para el líquido inferior las ecuaciones (5.1) toman la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)} = 0 \quad (5.4a)$$

$$Pr^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(1)} \right] = -\nabla p^{(1)} - \left[\frac{(h^{(1)})^3 g}{\nu^{(1)} \kappa^{(1)}} - Ra(T^{(1)} - T_-) \right] \hat{\mathbf{z}} + \nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} \quad (5.4b)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla) T^{(1)} = \nabla^2 T^{(1)} \quad (5.4c)$$

mientras que para el superior tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)} = 0 \quad (5.5a)$$

$$Pr^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(2)} \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{(2)} - \left[\frac{(h^{(1)})^3 g}{\nu^{(1)} \kappa^{(1)}} - \alpha^* Ra(T^{(2)} - T_-) \right] \hat{\mathbf{z}} + \nu^* \nabla^2 \mathbf{u}^{(2)} \quad (5.5b)$$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla) T^{(2)} = \kappa^* \nabla^2 T^{(2)} \quad (5.5c)$$

Las condiciones de contorno adimensionalizadas se escriben

$$z = -1 \rightarrow \mathbf{u}^{(1)} = 0, \quad T^{(1)} = T_w \quad (T_w = T_- + x) \quad (5.6a)$$

$$z = h^* \rightarrow \mathbf{u}^{(2)} = 0, \quad T^{(2)} = T_w \quad (T_w = T_- + x) \quad (5.6b)$$

$$z = 0 \rightarrow \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} = 0, \quad T^{(1)} = T^{(2)}, \quad (5.6c)$$

$$\partial_z T^{(1)} = \lambda^* \partial_z T^{(2)}, \quad \eta^* \partial_z \mathbf{u}_h^{(2)} - \partial_z \mathbf{u}_h^{(1)} = Ma \nabla_h T^{(1)}$$

En las Ecs. (5.4-5.6) se han introducido los siguientes parámetros adimensionales

$$\alpha^* = \alpha^{(2)}/\alpha^{(1)}, \quad \kappa^* = \kappa^{(2)}/\kappa^{(1)}, \quad \nu^* = \nu^{(2)}/\nu^{(1)}, \quad \lambda^* = \lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}, \quad (5.7)$$

$$h^* = h^{(2)}/h^{(1)}, \quad \rho^* = \rho^{(2)}/\rho^{(1)}, \quad \eta^* = \rho^{(2)}\nu^{(2)}/\rho^{(1)}\nu^{(1)} = \rho^*\nu^*$$

El número de Prandtl está definido con respecto al líquido 1, es decir

$$Pr = \nu^{(1)}/\kappa^{(1)} \quad (5.8)$$

de la misma forma que el número de Rayleigh

$$Ra = \frac{\alpha^{(1)} \beta g (h^{(1)})^4}{\nu^{(1)} \kappa^{(1)}} \quad (5.9)$$

y el número de Marangoni

$$Ma = -\frac{d\sigma}{dT} \frac{\beta (h^{(1)})^2}{\rho^{(1)} \nu^{(1)} \kappa^{(1)}} \quad (5.10)$$

5.3 Estado base

Un gradiente horizontal de temperatura da lugar a un flujo básico en cada fluido [17] que depende de la coordenada vertical $\mathbf{u}^{(i)} = (u_0^{(i)}(z), 0, 0)$. Por otra parte, el perfil de temperatura es la superposición del gradiente impuesto y el campo $\tau^{(i)}(z)$ generado por el movimiento del fluido: $T^{(i)} = T_- + x + \tau^{(i)}(z)$ (en forma adimensional). Para calcular $u_0^{(i)}(z)$ y $\tau^{(i)}(z)$ sustituimos

$$\mathbf{u}^{(i)} = (u_0^{(i)}(z), 0, 0), \quad T^{(i)} - T_- = x + \tau^{(i)}(z) \quad (5.11)$$

en Ecs. (5.4) y (5.5), y eliminando la presión se obtiene

$$\partial_{z^3} u_0^{(1)} = Ra, \quad \partial_{z^2} \tau^{(1)} = u_0^{(1)} \quad (5.12a)$$

$$\nu^* \partial_{z^3} u_0^{(2)} = \alpha^* Ra, \quad \kappa^* \partial_{z^2} \tau^{(2)} = u_0^{(2)} \quad (5.12b)$$

con las condiciones de contorno correspondientes

$$z = -1 \rightarrow u_0^{(1)} = 0, \quad \tau^{(1)} = 0 \quad (5.13a)$$

$$z = h^* \rightarrow u_0^{(2)} = 0, \quad \tau^{(2)} = 0 \quad (5.13b)$$

$$z = 0 \rightarrow \tau^{(1)} = \tau^{(2)}, \quad u_0^{(1)} = u_0^{(2)} \quad (5.13c)$$

$$\partial_z \tau^{(1)} = \lambda^* \partial_z \tau^{(2)}, \quad \eta^* \partial_z u_0^{(2)} - \partial_z u_0^{(1)} = Ma$$

La condición de flujo de retorno aplicada a cada capa impone dos condiciones adicionales

$$\int_{-1}^0 u_0^{(1)} = 0, \quad \int_0^{h^*} u_0^{(2)} = 0 \quad (5.14)$$

Estas condiciones nos permiten calcular explícitamente los campos de velocidad y temperatura $u_0^{(i)}$ y $\tau^{(i)}$ del estado base. Sus expresiones explícitas se recogen en el apéndice D.

Como muestran las expresiones (D.1-D.4), los perfiles básicos de velocidad y temperatura contienen un término de empuje y otro termocapilar. El perfil de velocidad corresponde a un polinomio de segundo orden en el término interfacial y de tercer orden en el empuje, mientras que el perfil de temperatura es de cuarto orden en el término interfacial y de quinto en el empuje.

Los campos de velocidad y temperatura dependen de las relaciones de los coeficientes de dilatación, viscosidades, y de las profundidades; el perfil de temperatura depende también de la relación de las difusividades térmicas. Para un arreglo experimental dado (donde la relación Ma/Ra permanece fijada), el calentamiento no afecta a la forma de los perfiles de velocidad y temperatura puesto que ΔT aparece como un factor constante en $u_0^{(i)}$ y $\tau^{(i)}$ (incluido en Ra y Ma). Cada perfil de velocidad tiene una raíz localizada en su pared rígida correspondiente (ya que $\tau^{(1)}(-1) = \tau^{(1)}(h^*) = 0$). Hay siempre una segunda raíz en cada capa debida a la condición del flujo de retorno. En ausencia de gravedad ésta está localizada en $z = -1/3$ para el líquido inferior y en $z = h^{(2)}/3$ en el superior, es decir, a un tercio de la profundidad a partir de la interfase. En flujo consistiría en un celda

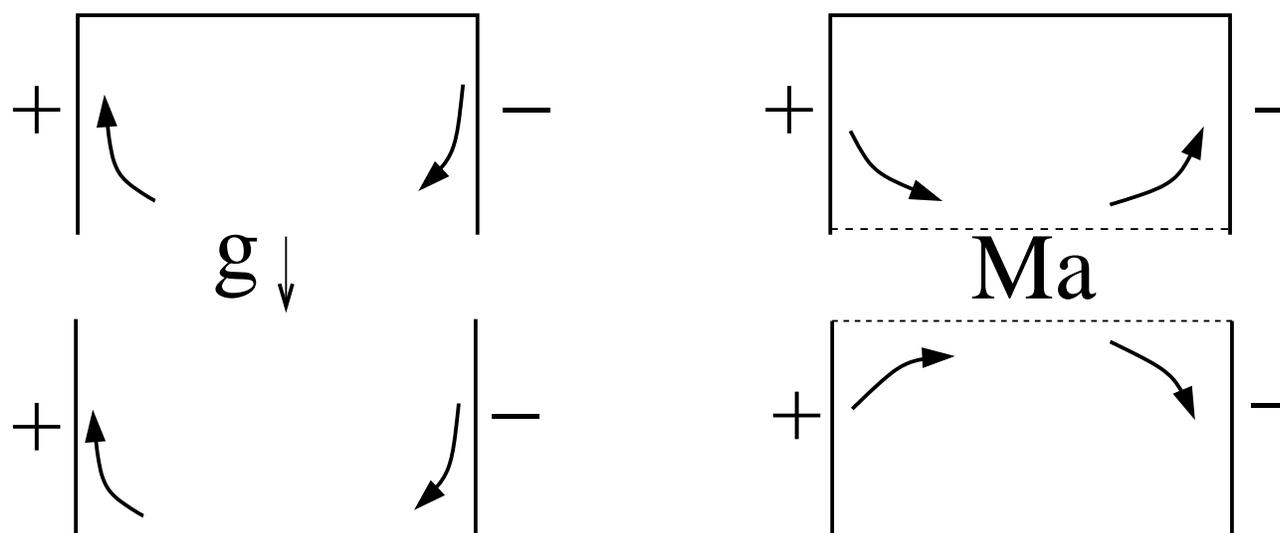


Figura 5.3: Sobre el sistema actúan la gravedad (izquierda) y la tensión interfacial (derecha). El empuje y las fuerzas termocapilares tienen la misma dirección en el líquido inferior y opuesta en el superior, donde entran en competencia.

convectiva en cada capa. Cuando se tiene en cuenta la gravedad la posición de esos puntos depende de las propiedades de ambos fluidos, y puede surgir una tercera raíz que da lugar a una segunda celda convectiva en cada capa. El perfil de temperatura de cada líquido también tiene una raíz localizada en su respectiva pared.

5.3.1 Perfiles de temperatura y velocidad del estado base

El flujo de base está determinado por los gradientes de tensión interfacial y por las diferencias de densidad. Los gradientes horizontales de temperatura generan fuerzas tangenciales que arrastran al fluido desde las regiones calientes a las frías. Cuando sólo actúan las fuerzas termocapilares se establece una circulación global a lo largo de la interfase que arrastrará el fluido desde el lado caliente al frío. En un contenedor finito, el fluido subiría por continuidad en la capa superior cerca de la pared fría y caería cerca de la caliente; por el contrario, en la capa inferior caería cerca de la pared fría y se elevaría en la caliente. Se observarían por tanto dos celdas contra-rotantes. El empuje también lleva el fluido desde las regiones calientes (menor densidad) a las regiones frías (mayor densidad). Puesto que el fluido se eleva en el lado caliente y desciende en el frío, el empuje favorecerá la formación de dos celdas contra-rotantes en ambas capas. El empuje y las fuerzas termocapilares actúan en la misma dirección en la capa inferior; de la misma forma que en sistemas de un sólo líquido con $\gamma > 0$. Sin embargo, operan en direcciones opuestas en el líquido superior, donde ambas compiten (ver la Fig. 5.3). De esta forma, el líquido 2 presenta una situación similar al de sistemas de un solo líquido con $\gamma < 0$ (esto sucede en algunas cerámicas y aleaciones líquidas, como *Ag Pb* [135]).

En las Figs. 5.4(a) y 5.4(b) se muestran los perfiles de velocidad y temperatura del estado base. En el eje horizontal se representa la profundidad total de los dos líquidos superpuestos ($h_T = h^{(1)} + h^{(2)}$), mientras que el eje vertical da el porcentaje de profundidad del líquido inferior con respecto a la

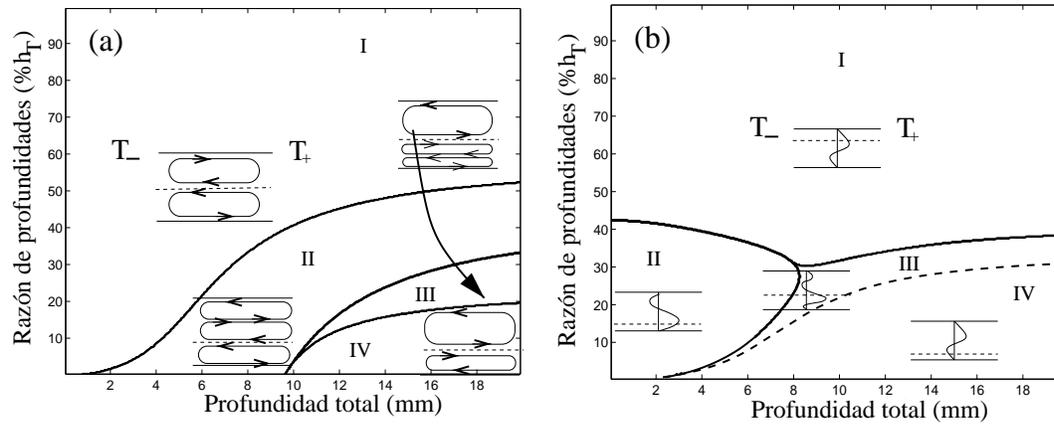


Figura 5.4: Perfiles de velocidad (izquierda) y temperatura (derecha) del estado base para una sistema compuesto por perfluorinato HT-70 (líquido inferior) y aceite de silicona de $5 cSt$ (líquido superior). La línea a trazos da la posición de $M1$ (para detalles ver el texto).

profundidad total \hat{h}_1 ($\hat{h}_1 = 100/(1 + h^*)$), al que llamaremos razón de profundidades por brevedad. Las curvas corresponden a una configuración formada por el perfluorinato HT-70 (líquido inferior) y un aceite de silicona de $5 cSt$ (líquido superior). Estos líquidos se han utilizado en experimentos con calentamiento vertical por Juel *et al.* [115] (sus propiedades físicas se enumeran en la Tab. 5.1).

En ambas gráficas se distinguen cuatro regiones diferentes, designadas (I) a (IV). Prestemos atención a la Fig. 5.4(a). La región (I) se extiende a todo el rango de h_T y abarca principalmente valores altos de \hat{h}_1 . El estado base consiste en una celda convectiva que se mueve ¹ en sentido horario en el líquido 2, y otra en sentido antihorario en el líquido 1. En esta región, la dirección de circulación general está gobernada por las fuerzas interfaciales. En la región (II), la competición entre el empuje y las fuerzas interfaciales da lugar a la creación de dos subcapas en el líquido 2. El movimiento en la subcapa próxima a la interfase está dominado por las fuerzas interfaciales, pero cerca de la pared superior el empuje aumenta y contribuye a la creación de otra subcapa. En las zonas (I) y (II), la estructura general del flujo en el líquido 1 no cambia por el movimiento del líquido superior. Sin embargo, para profundidades totales elevadas y pequeños \hat{h}_1 el movimiento en el líquido 1 está dirigido por el líquido superior; como sucede en las regiones (III) y (IV), en las que la dirección del flujo próximo a la interfase cambia de sentido, debido a que el empuje sobre el líquido 2 es tan fuerte que no solo determina en él el movimiento sino que también modifica la dirección del flujo cerca de la interfase. En la región (III), el líquido 1 presenta dos celdas de convección, pero el movimiento de la celda adyacente a la pared inferior no está gobernado por el líquido 2. En la región (IV) se tiene la situación opuesta a (I), con dos celdas de convección moviéndose en sentido contrario a (I). El comportamiento del líquido inferior en (IV) es análogo al de sistemas monocapa con $\gamma < 0$ [135].

Examinemos ahora el campo de temperatura del estado base (ver la Fig. 5.4(b)). Sus cuatro regiones no se corresponden con las del campo de velocidades, pero están relacionadas. La región

¹Hablamos de girar en un sentido u otro para describir con mayor sencillez el flujo de base, pero no existe estrictamente ningún giro porque estamos estudiando un sistema extenso sin paredes verticales.

Líquido	ρ (kg/m^3)	ν ($10^{-6} m^2/s$)	λ ($J/m s K$)	c_p ($J/kg K$)	α ($10^{-3} K^{-1}$)	γ (N/mK)	Pr	Cr
Aceite de silicona de 5 <i>cSt</i>	920	5	0.117	1590	1.05		62.512	
HT-70	1680	0.5	0.07	962	1.1		11.54	
Aceite de silicona de 5 <i>cSt</i> /HT-70	0.548	10	1.671	1.653	0.954	$-7.3 \cdot 10^{-5}$		$2.1 \cdot 10^{-6}$
n-Hexano	655	0.458	0.12	2270	1.41		5.675	
Acetonitrilo	776	0.476	0.118	2230	1.41		4.381	
n-Hexano/Acetonitrilo	0.844	0.962	1.017	1.018	1	$-1 \cdot 10^{-4}$		$7.8 \cdot 10^{-7}$
Agua	997	0.893	0.609	4180	0.257		6.111	
Fc-75	1760	0.945	0.063	1046	1.4		27.397	
Agua /Fc-75	0.566	0.945	9.59	3.996	0.183	$-4.7 \cdot 10^{-5}$		$3.3 \cdot 10^{-7}$
$B_2 O_3$	1648	2370	2	481.58	0.09		939.1	
<i>GaAs</i>	5720	0.49	17.8	434.01	0.187		0.068	
$B_2 O_3$ / <i>GaAs</i>	0.288	4836.73	0.112	1.1	481	$-1.2 \cdot 10^{-3}$		$3.4 \cdot 10^{-6}$

Tabla 5.1: Propiedades físicas de los pares de líquidos estudiados. Se proporciona también la razón entre las magnitudes físicas para cada configuración. El número de crispación se ha calculado para una profundidad de $h^{(1)} = 3 \text{ mm}$.

(I) cubre todo h_T y algo más de la mitad superior de la Fig. 5.4(b). El líquido 2 se encuentra estratificado inestablemente (la temperatura aumenta con la profundidad), y en el líquido 1 hay una subcapa cercana a la pared también estratificada de forma inestable, sobre ella se distingue una región estratificada de forma estable (la temperatura disminuye con la profundidad). El perfil del líquido 1 es similar al encontrado por Mercier y Normand [93] para números de Biot elevados. La región (II) es la única cerrada de las Figs. 5.4(a) y 5.4(b), en ella el líquido 1 está estratificado de forma estable y en el líquido 2 aparecen dos subcapas estratificadas establemente adyacentes a la pared y a la interfase, en medio de éstas hay otra región inestable, dando lugar a un perfil en forma de S invertida. La región (III) muestra el perfil de temperatura más complejo: los dos líquidos presentan un subcapa inestable en su pared y en la interfase, y una estable en el medio. La región (IV) cubre pequeños \hat{h}_1 y casi todo el rango de h_T , el perfil global es similar al de la región (I) pero con el líquido inferior estratificado de forma inestable.

5.4 Ecuaciones de evolución para las perturbaciones

En cuanto se aplica una diferencia de temperatura ΔT se desarrollan las celdas convectivas características del estado base, y si se incrementa ΔT se puede llegar a desestabilizarlas. Para analizar su estabilidad, escribimos la solución general del problema de la forma

$$\mathbf{u}^{(i)} = (u_0^{(i)} + u'^{(i)}, v'^{(i)}, w'^{(i)}), \quad T^{(i)} - T_- = x + \tau^{(i)} + \theta'^{(i)}, \quad p^{(i)} = p_0^{(i)} + p'^{(i)} \quad (5.15)$$

donde $(u'^{(i)}, v'^{(i)}, w'^{(i)})$, $\theta'^{(i)}$ y $p'^{(i)}$ denotan las perturbaciones del campo de velocidad, temperatura, y presión, respectivamente.

Las perturbaciones se descomponen en una suma de modos normales

$$(\mathbf{u}, \theta, p) = (\mathbf{u}(z), \theta(z), p(z)) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t) \quad (5.16)$$

donde ω es la tasa de crecimiento temporal compleja y \mathbf{k} el vector de onda, con componente k_x en la dirección del gradiente térmico y k_y en la perpendicular. Las primas se suprimen por claridad en las ecuaciones que siguen. Si se elimina la presión en la ecuación del momento y suprimiendo los términos no lineales se obtienen las siguientes ecuaciones para las perturbaciones:

líquido inferior

$$\partial_{z^2} u^{(1)} = L^{(1)} u^{(1)} + \frac{k_y^2}{k^2} Pr^{-1} \partial_z u_0^{(1)} w^{(1)} + i \frac{k_x}{k^2} (\partial_{z^3} w^{(1)} - L^{(1)} \partial_z w^{(1)}) \quad (5.17a)$$

$$\partial_{z^4} w^{(1)} = (L^{(1)} + k^2) \partial_{z^2} w^{(1)} - L^{(1)} k^2 w^{(1)} + Ra k^2 \theta^{(1)} - i k_x Pr^{-1} w^{(1)} \partial_{z^2} u_0^{(1)} \quad (5.17b)$$

$$\partial_{z^2} \theta^{(1)} = (k^2 + i(\omega + u_0^{(1)} k_x)) \theta^{(1)} + u^{(1)} + \partial_z \tau^{(1)} w^{(1)} \quad (5.17c)$$

líquido superior

$$\nu^* \partial_{z^2} u^{(2)} = L^{(2)} u^{(2)} + \frac{k_y^2}{k^2} Pr^{-1} \partial_z u_0^{(2)} w^{(2)} + i \frac{k_x}{k^2} (\nu^* \partial_{z^3} w^{(2)} - L^{(2)} \partial_z w^{(2)}) \quad (5.18a)$$

$$\nu^* \partial_{z^4} w^{(2)} = (\nu^* k^2 + L^{(2)}) \partial_{z^2} w^{(2)} - k^2 L^{(2)} w^{(2)} + Ra k^2 \alpha \theta^{(2)} - i k_x Pr^{-1} w^{(2)} \partial_{z^2} u_0^{(2)} \quad (5.18b)$$

$$\kappa^* \partial_{z^2} \theta^{(2)} = (\kappa^* k^2 + i(\omega + u_0^{(2)} k_x)) \theta^{(2)} + u^{(2)} + \partial_z \tau^{(2)} w^{(2)} \quad (5.18c)$$

donde se ha usado la siguiente notación

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= k^2 + iPr^{-1}(\omega + u_0^{(1)}k_x) \\ L^{(2)} &= \nu^*k^2 + iPr^{-1}(\omega + u_0^{(2)}k_x) \end{aligned}$$

y las condiciones de contorno correspondientes son

$$z = -1 \rightarrow u^{(1)} = w^{(1)} = \partial_z w^{(1)} = \theta^{(1)} = 0 \quad (5.19a)$$

$$z = h^* \rightarrow u^{(2)} = w^{(2)} = \partial_z w^{(2)} = \theta^{(2)} = 0 \quad (5.19b)$$

$$z = 0 \rightarrow u^{(1)} = u^{(2)}, \quad \partial_z w^{(1)} = \partial_z w^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} = 0 \quad (5.19c)$$

$$\theta^{(1)} = \theta^{(2)}, \quad \partial_z \theta^{(1)} = \lambda^* \partial_z \theta^{(2)}, \quad \eta^* \partial_z u^{(2)} - \partial_z u^{(1)} = ik_x Ma \theta^{(1)}$$

$$\eta^* \partial_z^2 w^{(2)} - \partial_z^2 w^{(1)} = Ma k^2 \theta^{(1)}$$

Este problema de autovalores se resuelve con un método espectral de tipo tau, aproximando las autofunciones con polinomios de Chebyshev de orden 16. Tomamos este orden porque hemos comprobado que es suficiente para asegurar la convergencia de los autovalores. Las curvas marginales se encuentran buscando el conjunto de valores k_x, k_y, Ma para los que la tasa de crecimiento temporal es nula.

5.4.1 Resultados del análisis de estabilidad

Existen tres mecanismos capaces de desestabilizar la bicapa. Los perfiles de temperatura del estado base (Fig. 5.4(b)) tienen regiones estratificadas de forma estable e inestable; las regiones estratificadas con un gradiente de temperaturas adverso son susceptibles de sufrir *inestabilidades de tipo Rayleigh-Bénard*. Un segundo mecanismo es la *inestabilidad de Bénard-Marangoni* que se da cuando la interfase es más fría que el fluido adyacente. Finalmente, surge un tercer mecanismo desestabilizante incluso cuando el interior de los líquidos es más frío que la interfase, con tal de que la velocidad en la interfase sea lo suficientemente alta como para superar el campo de temperatura estabilizante vertical, lo denominamos *inestabilidad de Smith-Davis* [89].

Debido al gran número de parámetros en las configuraciones bicapa, discutiremos los resultados escogiendo pares de líquidos usados en experimentos con calentamiento vertical. Hemos efectuado los cálculos para aceite de silicona de $5cSt$ (líquido superior) y perfluorinato HT-70 (líquido inferior), pero posteriormente también nos referiremos a otras combinaciones: agua (líquido superior) con el perfluorinato Fc-75 (líquido inferior), n-hexano (líquido superior) con acetonitrilo (líquido inferior), y trióxido de boro (líquido superior) con arseniuro de galio (líquido inferior). Las propiedades físicas de estos líquidos se recogen en la Tab. 5.1.

La deformabilidad se cuantifica generalmente a través del llamado *número de crispación*, definido por

$$Cr = \frac{\rho^{(1)} \nu^{(1)} \kappa^{(1)}}{\sigma_0 h^{(1)}} \quad (5.20)$$

Como se muestra en la Tab. 5.1, el valor de Cr es muy pequeño para los pares de líquidos y espesores examinados en el presente trabajo. Por tanto, la hipótesis de indeformabilidad de la interfase es

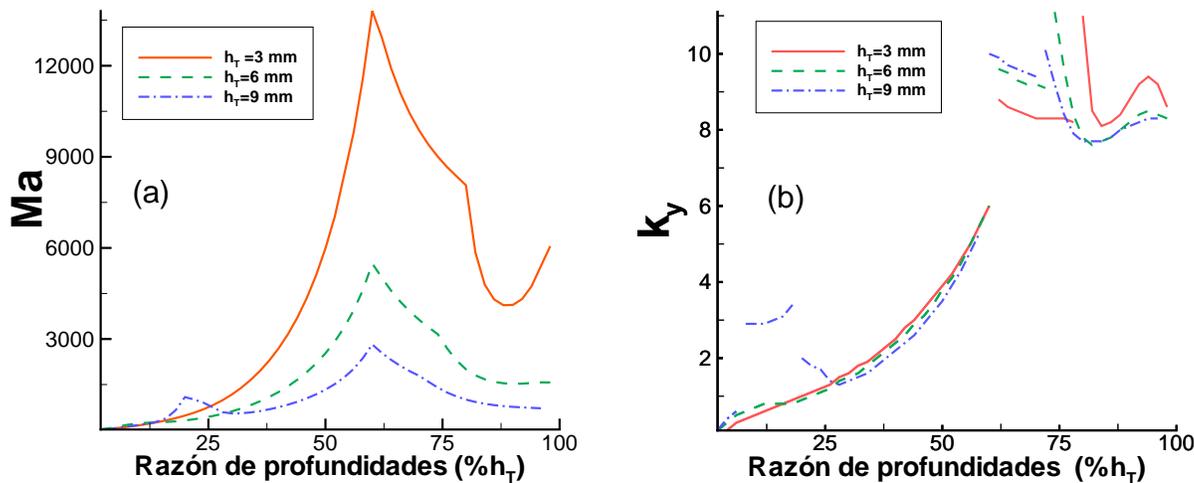


Figura 5.5: Marangoni (izquierda) y números de onda (derecha) críticos para perturbaciones bidimensionales ($k_x = 0$) en función de la razón de profundidades, para tres valores diferentes de la profundidad total. Los resultados corresponden al sistema formado por HT-70 (líquido inferior) y aceite de silicona de $5cSt$ (líquido superior).

razonable tal como se mostró en trabajos anteriores [136, 137]. Además, no le prestaremos atención a valores de \hat{h}_1 próximos a 0% o 100% ya que en esos casos surgirían movimientos típicos de películas delgadas, fuera del alcance de nuestro estudio.

Rollos estacionarios longitudinales

Consideremos perturbaciones bidimensionales caracterizadas por $k_x = 0$ y $\omega = 0$ (rollos estacionarios longitudinales), de forma similar a como han hecho Gershuni *et al.* [91] en el caso de una capa líquida limitada por paredes rígido-libre térmicamente conductoras y Mercier y Normand *et al.* [93] modelando la transferencia de calor en la superficie superior con un número de Biot.

La Fig. 5.5 muestra el Marangoni crítico y el número de onda transversal al flujo para los rollos estacionarios con respecto a \hat{h}_1 para tres valores diferentes de la profundidad total h_T (3, 6 y 9 mm). Para $h_T = 3, 6$ mm se observan tres ramas estacionarias, mientras que para $h_T = 9$ mm aparece una rama crítica adicional para pequeños \hat{h}_1 . Se ve en la Fig. 5.5(a) que el número de Marangoni crítico decrece con la profundidad total, esto es debido al efecto desestabilizante del aumento de la profundidad en las inestabilidades de Rayleigh-Bénard. El sistema es más estable en torno a $\hat{h}_1 \approx 60\%$ para todas las h_T . El salto entre ramas se aprecia mejor en las discontinuidades de k_y en la Fig. 5.5(b), donde cada discontinuidad separa un par de ramas. El número de onda k_y correspondiente a 3 y 6 mm aumenta con \hat{h}_1 en la primera rama (la de menores \hat{h}_1), pero decrece en la segunda como la de 9 mm, en la tercera rama la dependencia con la razón de profundidades es más complicada para las tres h_T . Las ramas se cruzan en puntos de codimensión dos, en los que se pueden producir diversas bifurcaciones

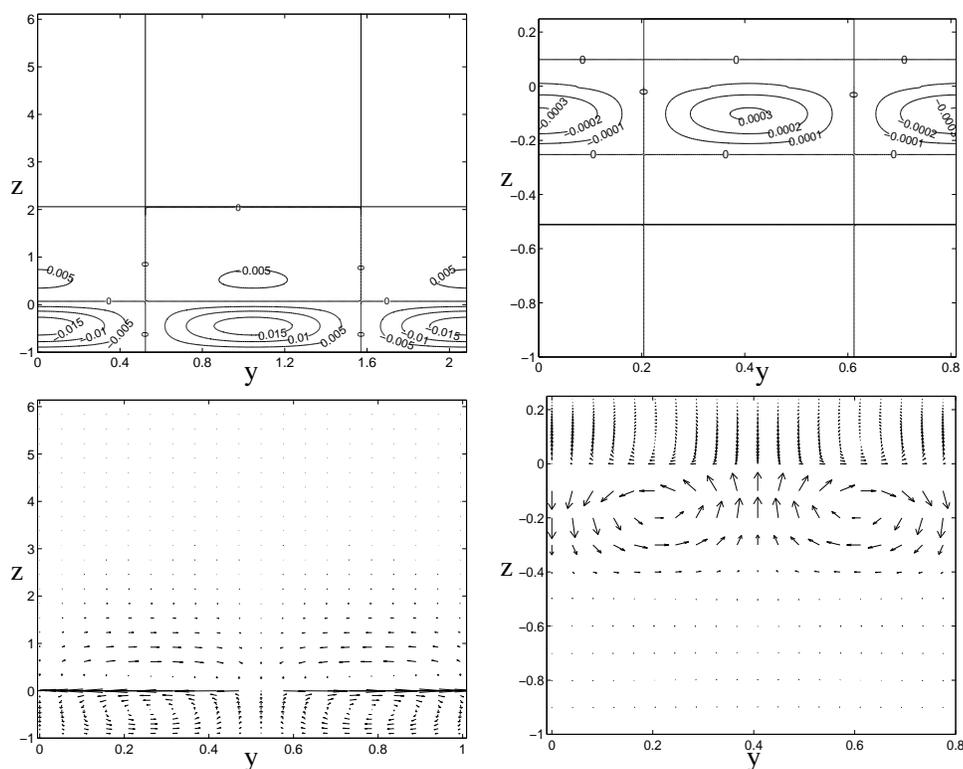


Figura 5.6: Isotermas (arriba) y campos de velocidad (abajo) en el plano z - y en los umbrales críticos para la pareja aceite de silicona $5 cSt/HT-70$, los dos casos se corresponden con dos ramas estacionarias diferentes: $\hat{h}_1 = 14\%$ (izquierda), $\hat{h}_1 = 80\%$ (derecha).

asociadas con la interacción entre modos [119]. La discontinuidad en el número de onda se debe a que la curva marginal de estabilidad es bimodal en su proximidad, y el mínimo absoluto cambia de un mínimo local a otro con número de onda distinto al variar \hat{h}_1 . Este cambio de modo crítico da lugar a nuevos estados en la bicapa líquida.

En la Fig. 5.6 se representan las isotermas y los campos de velocidad observados en el umbral de inestabilidad. Para la rama estacionaria de $\hat{h}_1 = 14\%$ (izquierda de la Fig. 5.6) aparecen unos gradientes intensos de temperatura en el seno del líquido 1, y se concentran en la interfase en el líquido 2, donde son más débiles. Los campos de velocidad de las perturbaciones se comportan igual. Los rollos rotan en distintas direcciones en cada capa, por lo que están acoplados mecánicamente [123, 124, 125]. También mostramos un estado correspondiente a una rama de mayores números de onda ($\hat{h}_1 = 80\%$ derecha de la Fig. 5.6). Los gradientes de temperatura se concentran cerca de la interfase en el líquido 1, y no llegan a penetrar en el seno del líquido. El campo de velocidad es también mayor en el líquido inferior y alcanza, aproximadamente, la misma profundidad que los gradientes de temperatura. El acoplamiento en esta rama también es mecánico. Vale la pena resaltar que la profundidad de la región de gradientes de temperatura más intensos es aproximadamente la misma en ambas ramas $\sim 0.014 \text{ mm}$. Las otras ramas estacionarias tienen sus propios tipos de comportamiento. Por ejemplo, la rama a la

izquierda del máximo Marangoni crítico (en torno a $\hat{h}_1 \approx 60\%$) tiene los gradientes más intensos de temperatura y velocidad en el líquido superior, mientras que la que se encuentra a su derecha está caracterizada por gradientes adyacentes a la pared inferior. Sin embargo, estas últimas ramas no son críticas debido a que el sistema se desestabiliza antes a través de un modo oscilatorio, como veremos a continuación.

Perturbaciones tridimensionales

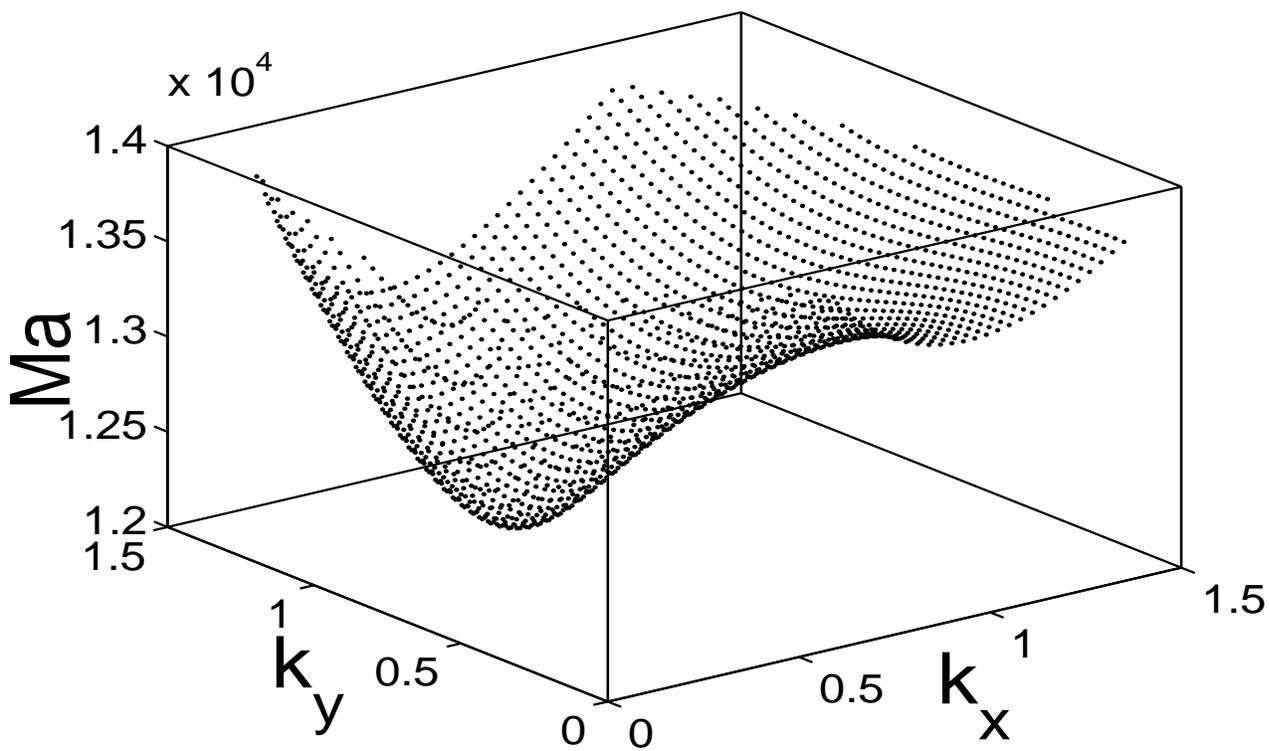
Hasta ahora hemos analizado las perturbaciones bidimensionales, pero no se puede excluir que las más inestables sean tridimensionales. Para encontrar los parámetros críticos se requiere una minimización con respecto a k_x y k_y .

Un gradiente horizontal de temperatura rompe la simetría de reflexión en la dirección aplicada. Por tanto, la superficie marginal es sólo simétrica bajo la transformación $k_y \rightarrow -k_y$. La superficie marginal presenta, en general, una topología complicada debido a que se pueden mezclar varias ramas. En la Fig. 5.7 se muestran superficies marginales de estabilidad típicas, con uno y dos mínimos locales. El umbral crítico es función de las componentes k_x y k_y del vector de onda crítico, que determinan la dirección de propagación φ en caso de inestabilidad oscilatoria. El eje positivo x está dirigido de la pared fría hacia la caliente, según el criterio que tomamos en la Ec. (5.11). Las ondas hidrotérmicas se propagan desde el lado frío al caliente para $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$, y para $\varphi \in [90^\circ, 180^\circ]$ la dirección de propagación es la opuesta. Vale la pena señalar que la simetría ($y \rightarrow -y$) del problema lineal hace que las ondas con números de onda $(k_x, \pm k_y)$ se desestabilicen simultáneamente, razón por la cual en lo sucesivo nos restringiremos a $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$, sin pérdida de generalidad.

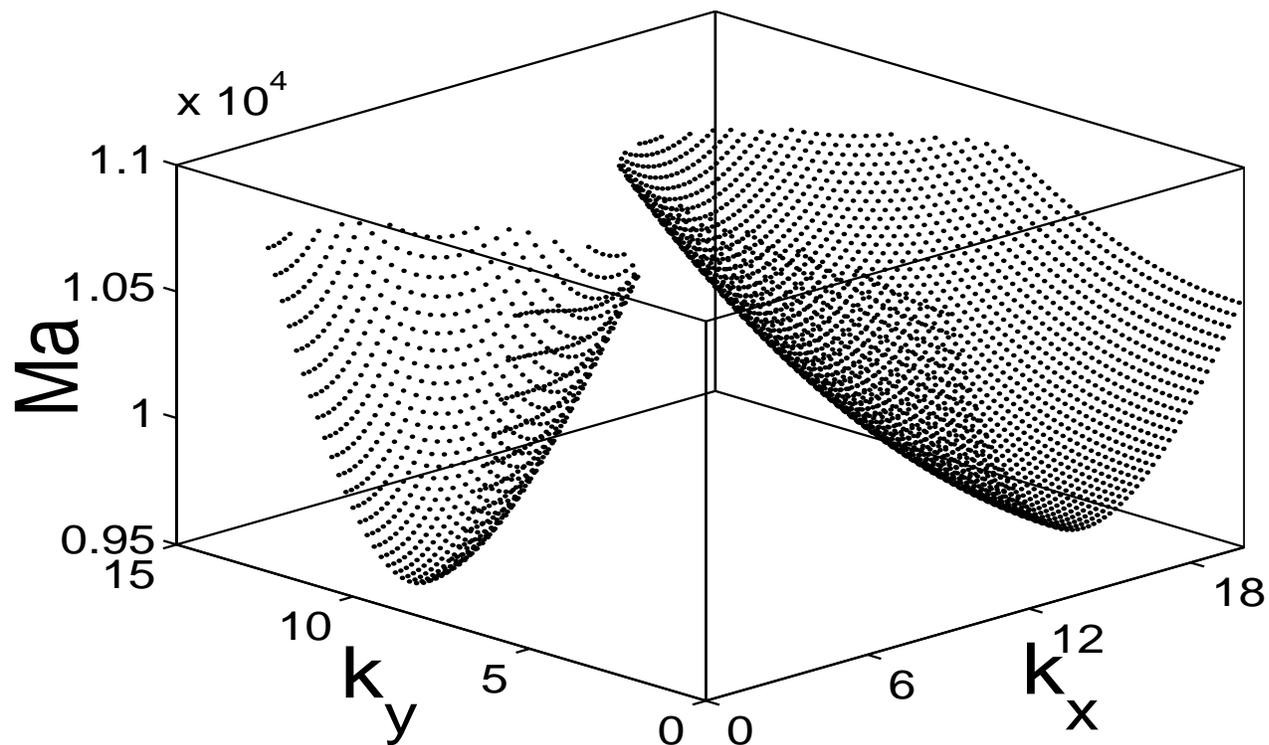
En la Fig. 5.8(a) se representan el número de Marangoni, frecuencia, ángulo, y módulo del número de onda críticos para el sistema HT-70 (líquido inferior) y aceite de silicona de 5 cSt con $h_T = 9 \text{ mm}$. La curva del Marangoni crítico posee un máximo local en $M1$ y un mínimo local situado en $\hat{h}_1 = 31\%$. El número de Marangoni alcanza su máximo valor en $M2$, un punto en el que se cruzan dos ramas diferentes. A la derecha de $M2$ el comportamiento del Marangoni crítico es el mismo que en sistemas monocapa formados por el líquido inferior. En ellos decrece también el número de Marangoni y k_y aumenta con la profundidad [91].

La caída de Ma bajo $M2$ no se puede explicar por una desestabilización de tipo Bénard-Marangoni del líquido 2, debido a que la temperatura en la interfase en $M2$ es mayor que en el interior del líquido 2 (como puede verse en la región (I) de la Fig. 5.4(b)). En el líquido 1, existen dos subcapas adyacentes a la interfase y a la pared inferior estratificadas de forma inestable, pero al disminuir \hat{h}_1 decrece su extensión. Por tanto, sólo existen tres posibles mecanismos que pueden desestabilizar el sistema en $M2$ y provocar la disminución del Marangoni crítico: 1) el líquido 2 es susceptible de desestabilizarse pues está estratificado de forma inestable y los efectos de empuje aumentan en él cuando \hat{h}_1 disminuye, 2) la subcapa del líquido 1 adyacente a la interfase puede sufrir inestabilidades de tipo Bénard-Marangoni, 3) si observamos la velocidad del flujo base en la interfase (Fig. 5.9) se ve que alcanza su mayor valor absoluto en $M2$, con lo cual el flujo en torno a la interfase podría vencer el efecto estabilizante de la tensión interfacial en el líquido superior y dar lugar a un inestabilidad de Smith-Davis. Estos mecanismos de inestabilidad actúan conjuntamente, y no es posible decir, antes de efectuar el análisis lineal de estabilidad, cual va a ser la posición de $M2$.

La posición de $M2$ depende de las propiedades físicas de ambos líquidos, las cuales afectan al



(a)



(b)

Figura 5.7: Superficies marginales de estabilidad para perturbaciones tridimensionales. (a) superficie marginal del par $B_2O_3 / GaAs$ para $h_T = 6 \text{ mm}$, $\hat{h}_1 = 10\%$; (b) superficie marginal del par aceite de silicona de $5 \text{ cSt} / HT-70$ para $h_T = 3 \text{ mm}$, $\hat{h}_1 = 71\%$. En el último caso se observan dos mínimos locales. La rotura de la simetría $k_x \leftrightarrow k_y$ se aprecia claramente en ambas figuras.

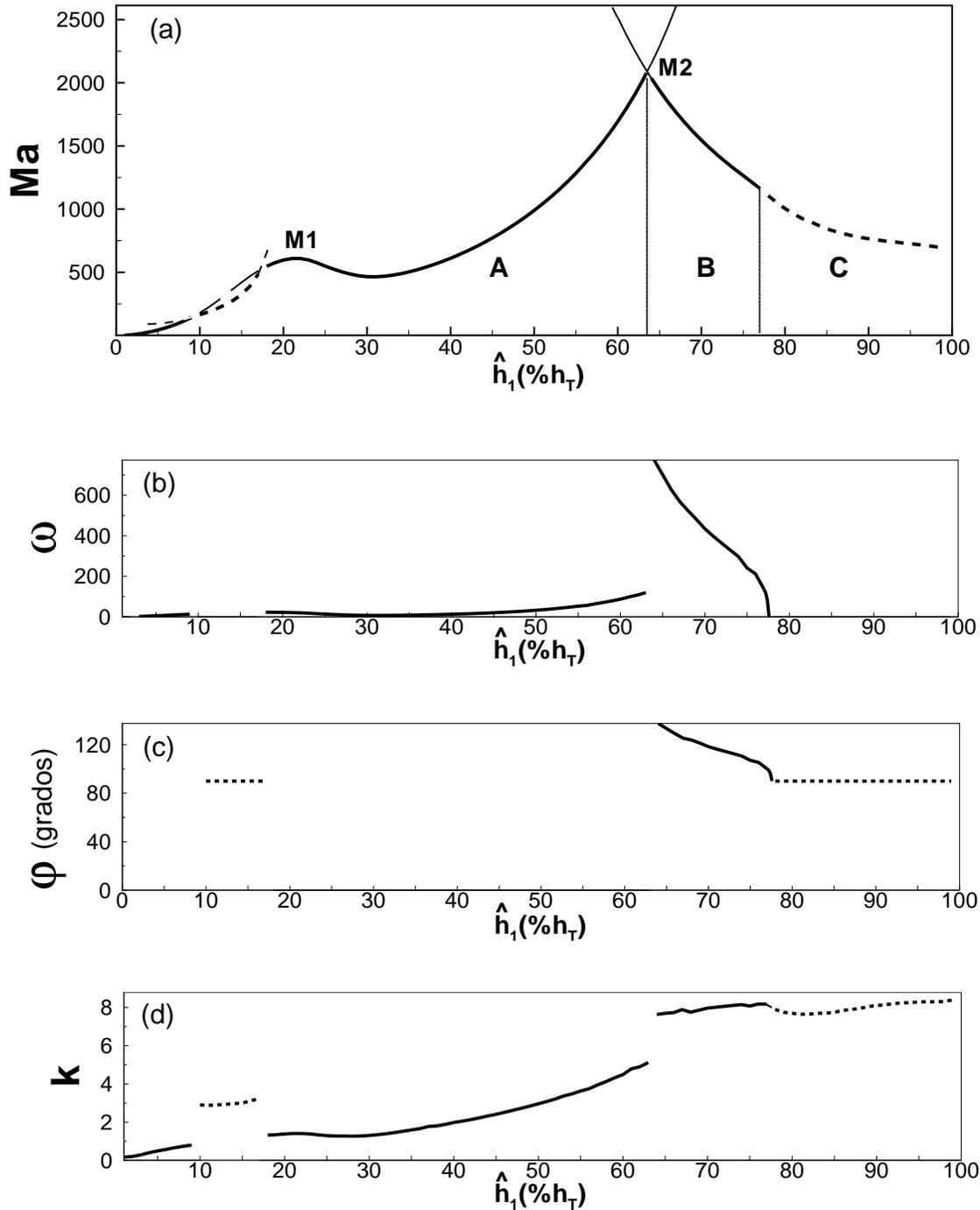


Figura 5.8: Parámetros críticos para el sistema formado por aceite de silicona de 5 *cSt* (líquido superior) y HT-70 (líquido inferior) con una profundidad total $h_T = 9$ mm. (a) Número de Marangoni, (b) frecuencia crítica, (c) ángulo del vector de onda crítico, (d) módulo del número de onda crítico. Línea continua: régimen oscilatorio, línea a tramos: régimen estacionario. En los puntos donde hay una interacción entre dos ramas se muestra la extensión de éstas en la curva del Marangoni crítico. Se obtienen distintos patrones característicos en las regiones A, B, y C, como se explica en el texto.

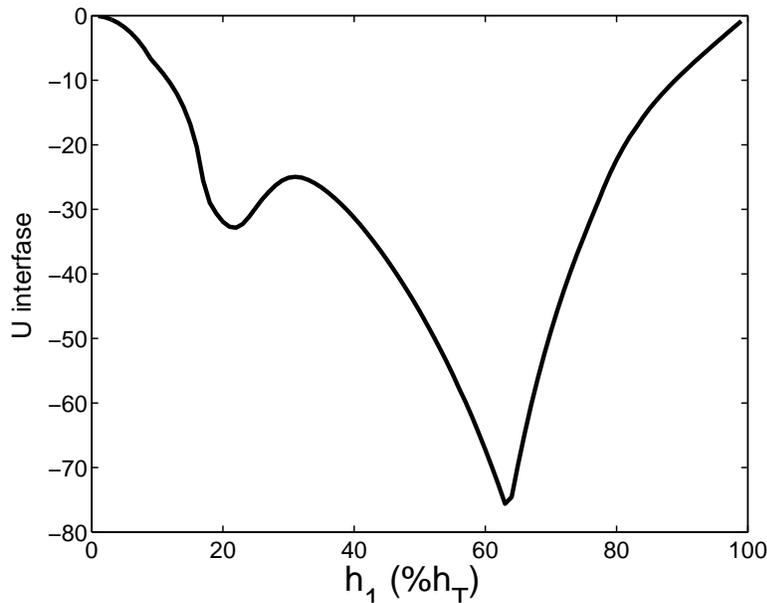


Figura 5.9: Velocidad del flujo base en la interfase, en el sistema formado por aceite de silicona de 5 cSt (líquido superior) y HT-70 (líquido inferior) con una profundidad total de 9 mm . La velocidad tiene signo negativo porque, para esta profundidad total, el líquido se dirige en la interfase desde el lado caliente al frío. Los puntos $M1$ y $M2$ aparecen claramente reflejados en esta figura como extremos locales.

campo de velocidades y temperatura de cada capa y por tanto a los mecanismos de inestabilidad. Para estudiar el efecto de los coeficientes de transporte -la viscosidad ν y la difusividad térmica κ - sobre la posición de $M2$, hemos considerado un sistema ideal formado por dos capas de aceite de silicona de 5 cSt en las que se han modificado los valores de ν y κ . En la Tab. 5.2 se da la posición de $M2$ para distintos valores de los coeficientes de transporte. Al aumentar la difusividad térmica y la viscosidad del líquido inferior, $M2$ se desplaza hacia valores mayores de \hat{h}_1 ; por el contrario, si se incrementa ν^* y κ^* en el líquido superior el desplazamiento es hacia valores menores de \hat{h}_1 . La posición de $M2$ también depende de la geometría del sistema: un aumento de h_T produce un desplazamiento hacia mayores valores de \hat{h}_1 . Sin embargo, para h_T elevados el desplazamiento se satura, como se ve en las curvas del número de Marangoni de las Figs. 5.8 y 5.10.

Un examen del perfil vertical de temperatura nos da la pista para entender la posición del máximo local $M1$ en $\hat{h}_1 = 21\%$. En la Fig. 5.4(b) tenemos el perfil vertical de temperatura; si nos fijamos en la profundidad total $h_T = 9 \text{ mm}$, y disminuimos \hat{h}_1 desde la región (I) hasta llegar a $\hat{h}_1 = 31\%$, el perfil vertical inestable del líquido superior se divide en dos subcapas inestables y una tercera estable en el medio. La forma del perfil de temperatura permanece inalterada en el líquido 1. En (III) hay una mayor extensión de las regiones estables que en (I), así en (III) nos encontramos con un aumento de Ma cuando \hat{h}_1 disminuye debido a la estabilización progresiva del líquido 2. La frontera entre las regiones (I) y (III) da la posición del mínimo local de la Fig. 5.8(a) en $\hat{h}_1 = 31\%$. Cuando se alcanza la región (IV), la estratificación de temperatura del líquido 1 se hace inestable y el sistema completo

ν^*	\hat{h}_1	κ^*	\hat{h}_1
0.1	84%	0.1	90%
1	81%	1	81%
10	68%	10	62%

Tabla 5.2: Posición de $M2$ en función de la relación de viscosidades (izquierda) y difusividades térmicas (derecha) de los dos líquidos. El caso $\nu^* = 1$, $\kappa^* = 1$ corresponde a una configuración ideal formada por dos capas del mismo líquido (aceite de silicona de 5 cSt).

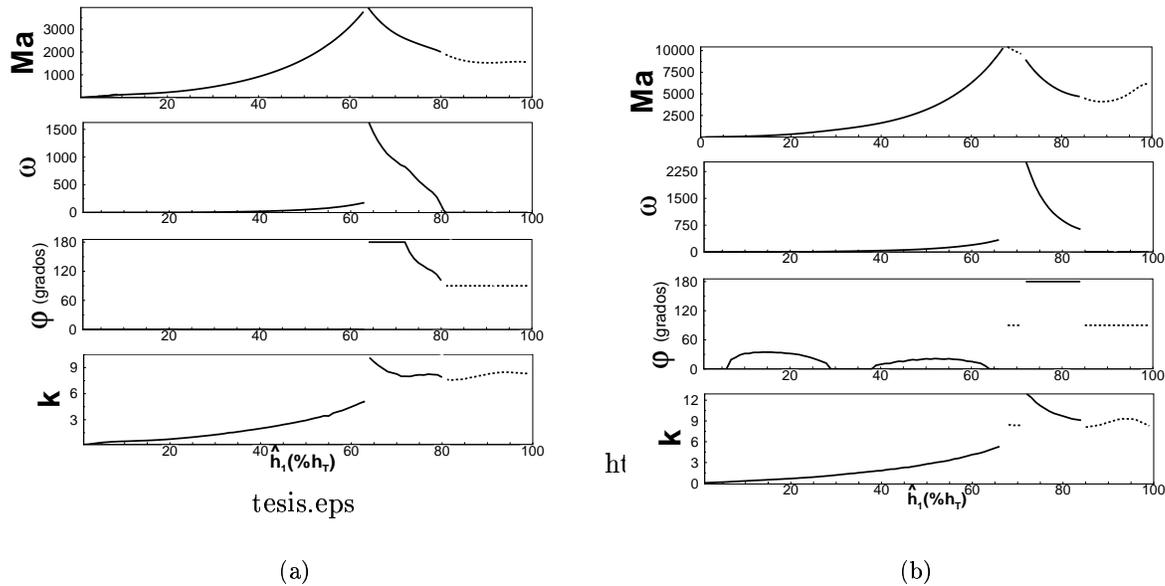


Figura 5.10: Parámetros críticos para la combinación formada por HT-70 (líquido inferior) y aceite de silicona de $5 cSt$ (líquido superior), con una profundidad total de 6 mm (a) y 3 mm (b). Línea continua: comportamiento oscilatorio, línea a trazos: comportamiento estacionario.

se desestabiliza más y más, con una disminución de Ma . Esto sucede porque los dos mecanismos que operan en el líquido 1 (termocapilaridad y empuje) son desestabilizantes y cooperativos. Por tanto, la frontera entre (III) y (IV) de la Fig. 5.4(b) da la posición de $M1$. En el interior de (IV), la disminución de Ma cuando \hat{h}_1 disminuye refleja la mayor importancia del efecto desestabilizante de la tensión interfacial. La posición de $M1$ queda predicha por el perfil vertical de temperatura del estado base y no se ve influida por el número de Prandtl, de acuerdo a las Ecs. (D.1- D.4).

Una observación detenida a las Figs. 5.8 y 5.10 nos permite discernir tres regiones distintas.

región A

La primera región (A) (ver la Fig. 5.8) se extiende desde los valores más pequeños de \hat{h}_1 hasta $M2$. El número de Marangoni aumenta al disminuir la profundidad del líquido 2, debido a que en éste los efectos de empuje decrecen, indicando que el líquido superior domina la dinámica en (A). El patrón en esta región consiste en ondas hidrotermales con ángulos de propagación nulos o pequeños. Se propagan desde el lado frío al caliente paralelas al flujo para $h_T = 6, 9 \text{ mm}$, desviándose hacia ángulos mayores cuando los efectos termocapilares son más importantes, como sucede para $h_T = 3 \text{ mm}$. El ángulo de propagación de los modos oscilatorios en este rango es similar al que se obtiene en sistemas de un solo líquido con valores altos de Pr [89]. Como se observa en la Fig. 5.8(d), la región (A) se caracteriza también por un aumento de $|k|$ con \hat{h}_1 , con una pequeña dependencia de $|k|$ con h_T . Para $h_T = 9 \text{ mm}$, en que los efectos de empuje son dominantes, la curva presenta una ventana de razones de profundidad ($6\% < \hat{h}_1 < 16\%$) en la que los modos críticos son rollos estacionarios. Este intervalo está limitado por puntos de codimensión 2, formados por la interacción de un modo Hopf con uno estacionario con números de onda diferentes. Este tipo de puntos también se encuentran en bicapas calentadas por debajo [115, 119].

región B

El inicio de la región (B) se caracteriza por un gran salto en la frecuencia en $M2$ para $h_T = 6,9 \text{ mm}$, y ligeramente desplazado por $\Delta\hat{h}_1 = 4\%$ para $h_T = 3 \text{ mm}$. Para $h_T = 6,9 \text{ mm}$, $M2$ está formado por la interacción de un par de modos Hopf con diferentes números de onda y frecuencias. En este punto de codimension 2 el sistema logra su configuración más estable con el mayor Ma . La diferencia entre los números de onda de los dos modos Hopf se debe a la aparición de una componente grande k_y para $h_T = 9 \text{ mm}$, mientras que para $h_T = 6 \text{ mm}$ se da solamente un salto en la componente k_x del número de onda. Hasta donde nosotros sabemos este tipo de interacción entre dos modos oscilatorios no se ha encontrado en problemas de Bénard-Marangoni. Para $h_T = 3 \text{ mm}$, una pequeña rama estacionaria cerca de $M2$ evita la aparición de este tipo de interacción, generándose un punto de codimensión 2 por la interacción entre un modo Hopf y un modo estacionario. La dirección de propagación de las ondas hidrotermales en esta región se invierte con respecto a (A), propagándose desde el lado caliente al frío. La anchura de la región (B) disminuye con h_T , desde $\Delta\hat{h}_1 = 18\%$ para $h_T = 9 \text{ mm}$ a $\Delta\hat{h}_1 = 14\%$ para $h_T = 3 \text{ mm}$. El módulo del número de onda varía de forma más complicada que en la región (A), y es más sensible a la profundidad total. En la región (B), la fuerte competición entre las dos capas líquidas se refleja en mayores frecuencias de oscilación.

región C

La transición desde la zona (B) a la (C) es suave, con un decrecimiento monótono de la frecuencia hasta desaparecer. Esta región se caracteriza por los rollos longitudinales estacionarios, y se extiende hasta los valores más altos de \hat{h}_1 . A su vez alcanza valores menores de \hat{h}_1 cuando disminuye h_T . El líquido inferior gobierna la dinámica en la región (C). El comportamiento cualitativo del modulo del vector de onda crítico se ve poco afectado por la profundidad total.

En la Fig. 5.11(a) se muestran los parámetros críticos para la bicapa formada por el fluorinato Fc-75 (líquido inferior) y agua (líquido superior), en la Fig. 5.11(b) se reproducen los resultados para el par acetónitrilo (líquido inferior) y n-hexano (líquido superior). Los umbrales de estabilidad se han evaluado para una profundidad total de 6 mm en ambas configuraciones. Las curvas del Marangoni crítico presentan también los máximos $M1$ y $M2$, con las características que hemos discutido anteriormente. En el caso de Fc-75/agua se predicen ondas hidrotermales propagándose desde el lado frío al caliente en la región localizada entre $M1$ y $M2$, para los otros valores de la razón de profundidades se encuentran rollos estacionarios longitudinales. En la bicapa acetónitrilo/n-hexano se dan las mismas características que en aceite de silicona 5 cSt/HT-70, con un punto de codimension 2 creado por la interacción de dos modos Hopf. Las características generales discutidas en esta sección son válidas para todos los casos que hemos examinado.

De lo anterior, vemos que al variar la relación de profundidades en una bicapa es posible obtener: rollos longitudinales estacionarios, y ondas hidrotermales propagándose con pequeños ángulos (como en sistemas monocapa con un Prandtl elevado) y ángulos grandes (como en sistemas monocapa con pequeños números de Prandtl). Por tanto, una vez elegidos un par de líquidos, predecimos que es posible obtener todos los patrones observados en el umbral que se hallan con distintos líquidos en monocapas.

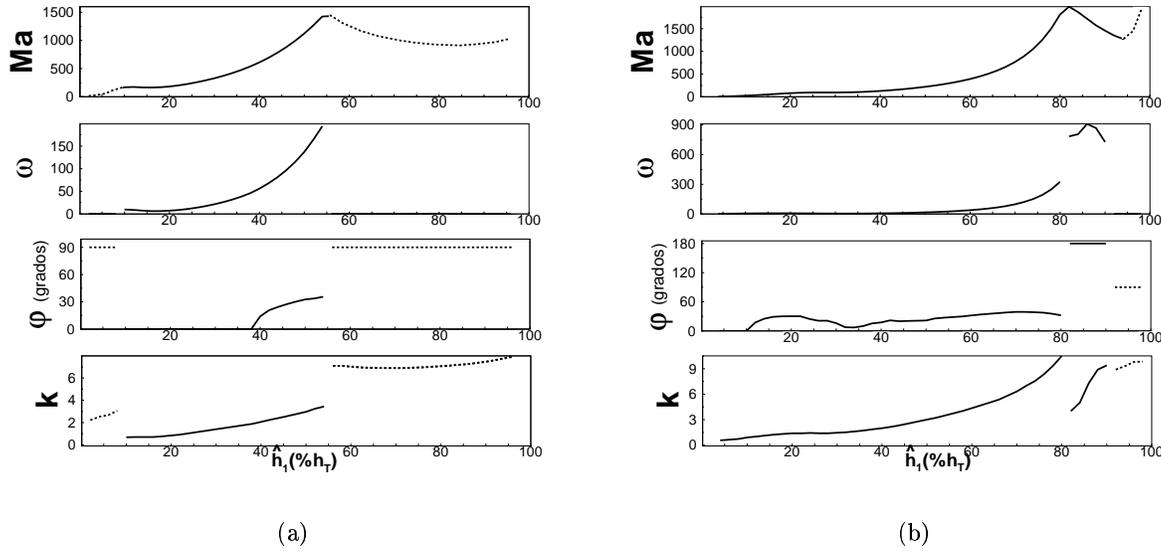


Figura 5.11: Parámetros críticos para el par: Fc-75 (líquido inferior) y agua (líquido superior) (a), y para la configuración formada por acetonitrilo (líquido inferior) y n-hexano (líquido superior) (b). La profundidad total para ambas combinaciones es $h_T = 6 \text{ mm}$.

5.5 Influencia de las condiciones de contorno térmicas

La convección en bicapas líquidas calentadas lateralmente tiene una aplicación de gran interés tecnológico en la *técnica de encapsulado líquido*, usada para minimizar la evaporación de un componente volátil -por ejemplo el arsénico cuando se desea obtener arseniuro de galio $GaAs$ - durante la fase de crecimiento cristalino de algunos materiales [138]. Esta técnica consiste en encapsular el fundente con un material de bajo punto de fusión como, por ejemplo, el trióxido de boro B_2O_3 . Es importante estudiar la dinámica de este sistema bicapa para evitar efectos indeseados en las propiedades del cristal.

A diferencia de los sistemas estudiados en las secciones previas, ahora estudiamos la situación de un par de líquidos encerrados entre paredes no completamente conductoras. De este modo podemos conocer la influencia de las condiciones de contorno en el flujo de base y estabilidad de la bicapa. El flujo de calor entre los líquidos y las paredes superior e inferior, a temperatura $T_w(x)$, se aproxima a través de la relación $\partial T^{(i)}/\partial z + B_i^{(i)}[T^{(i)} - T_w(x)] = 0$, donde $B_i^{(1)}$ es el número de Biot en la pared inferior y $B_i^{(2)}$ en la superior.

Las propiedades físicas del $AsGa$ y del B_2O_3 se enumeran en la Tab. 5.1. Si suponemos que las paredes horizontales tienen la misma conductividad (es fácil imaginar que sean del mismo material), podemos fijar $B_i^{(1)} = 0.1$ y $B_i^{(2)} = 1$ debido a que la relación de conductividades entre este par de fluidos es aproximadamente 10. En la Fig. 5.12 se observan cuatro regiones para los flujos básicos de velocidad (Fig. 5.12(a)) y cinco perfiles de temperatura distintos (Fig. 5.12(b)). A pesar de la muy distinta naturaleza de estos fluidos con respecto a los estudiados anteriormente se observa la misma forma de las regiones del estado base. La única diferencia significativa es la aparición de un nuevo perfil

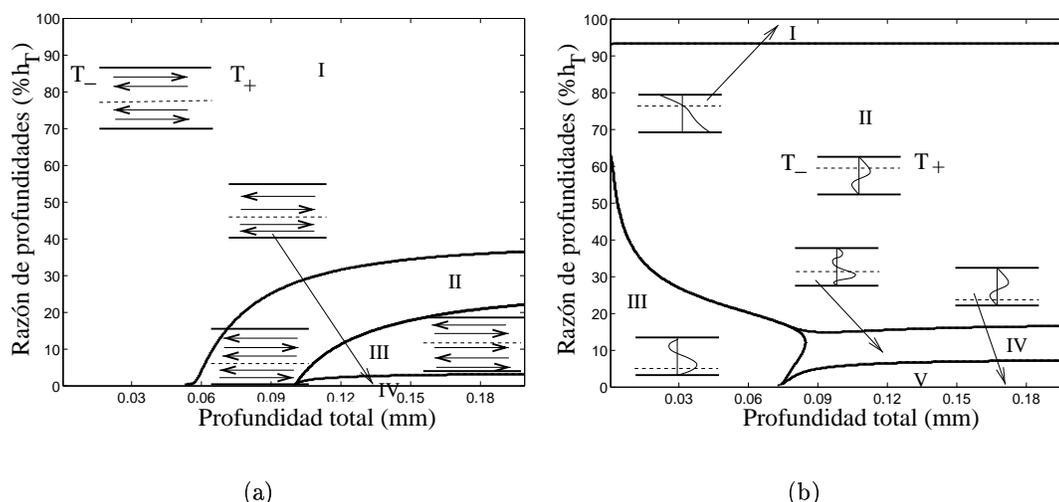


Figura 5.12: Perfiles de velocidad (izquierda) y temperatura (derecha) del estado base para una sistema compuesto por $B_2 O_3$ (líquido superior) y $Ga As$ (líquido inferior).

de temperatura (región I en la Fig.5.12(b)) localizado a altas relaciones de profundidad ($\hat{h}_1 > 92\%$), e independiente de la profundidad total h_T . El perfil de temperatura en (I) es casi lineal en cada capa y se aproxima al que tendría una bicapa calentada por abajo, en el estado conductivo del problema de Bénard-Marangoni [139]. Cuanto más aislantes son las paredes la frontera de la región (I) se desplaza hacia menores \hat{h}_1 , mientras que el resto de regiones permanecen prácticamente inalteradas [140].

En la Fig. 5.13 se representa el Marangoni crítico Ma , frecuencia de oscilación ω , ángulo de propagación φ y módulo del número de onda k en función de \hat{h}_1 para una profundidad total de $h_T = 6 \text{ mm}$. El punto más estable M es, de nuevo, un punto de codimensión 2 resultante de la interacción entre dos modos Hopf con diferentes números de onda propagándose en direcciones opuestas (ver las Figs. 5.13(c), 5.13(d)). En M el componente encapsulado $Ga As$ tiene un perfil de temperatura estable, mientras que el encapsulante posee tres subcapas: una región intermedia inestablemente estratificada y dos estables, una en contacto con la pared superior y otra con la interfase. También se distinguen aquí los tres comportamientos citados anteriormente. En (A), las ondas hidrotermales se propagan con un ángulo próximo a 90° . La diferencia entre las regiones (A) y (B) se debe principalmente al modo y frecuencia de los modos críticos, siendo ambos más pequeños en (A). En (C), las ondas hidrotermales se propagan desde el lado caliente al frío para $31\% \leq \hat{h}_1 \leq 58\%$ y $88\% \leq \hat{h}_1 \leq 100\%$, y del lado frío al caliente cuando $59\% \leq \hat{h}_1 \leq 87\%$. Sin embargo, para $\hat{h}_1 > 58\%$ la frecuencia de las ondas es muy pequeña (de orden $O(10^{-2})$), por tanto serán vistas como rollos estacionarios transversales en un experimento.

5.6 Conclusiones

Hemos investigado el comienzo de la convección en sistemas constituidos por dos capas líquidas superpuestas e inmiscibles, calentadas lateralmente [140, 141]. El sistema está limitado por dos paredes

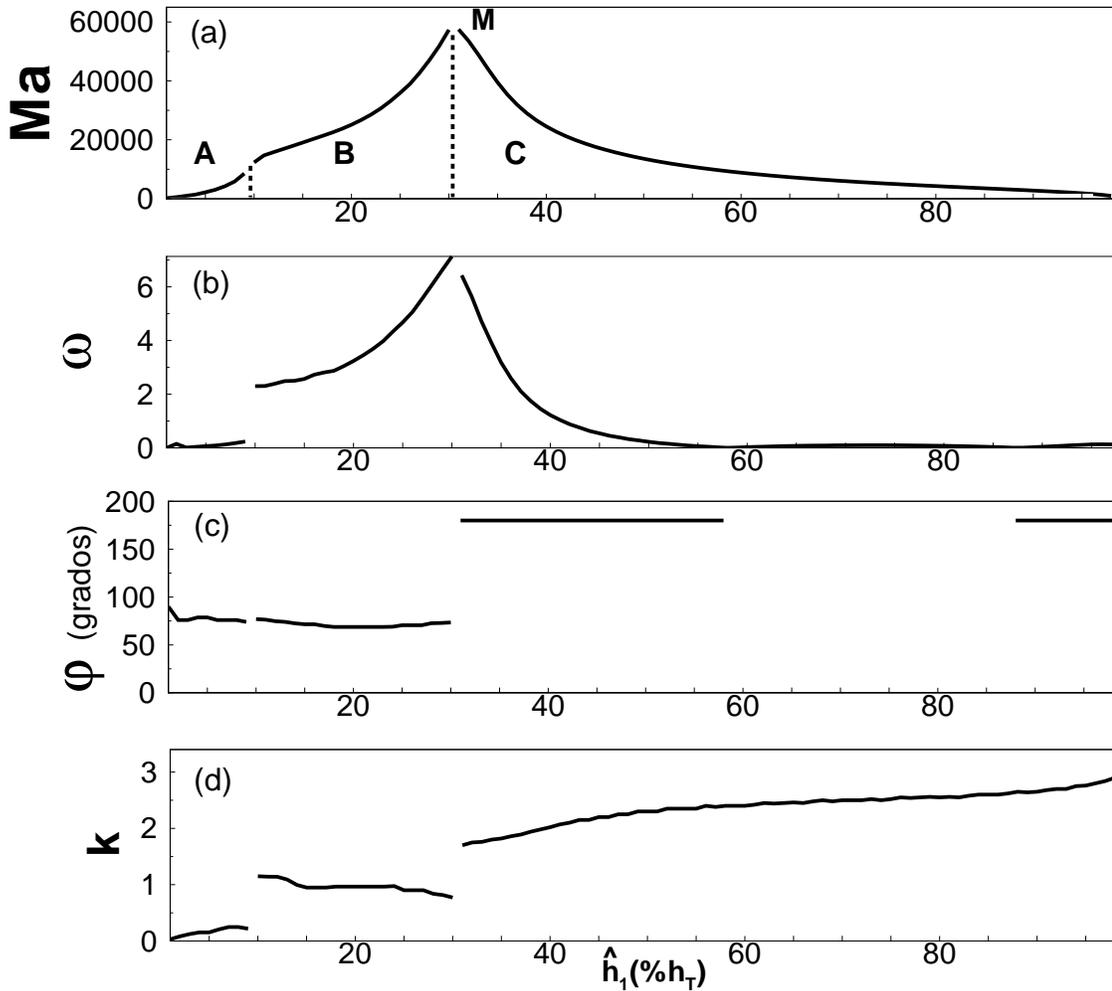


Figura 5.13: Valores críticos de la configuración formada por $B_2 O_3$ (líquido superior) y $Ga As$ (líquido inferior) para una profundidad total $h_T = 6 \text{ mm}$. (a) Marangoni crítico, (b) frecuencia crítica, (c) ángulo del número de onda crítico, y (d) módulo del número de onda crítico.

rígidas horizontales, y se supone que la interfase es indeformable. Las fuerzas que actúan son la tensión interfacial y la gravedad, que son cooperativas en la capa inferior y competitivas en la superior. El número de parámetros es mucho mayor que en sistemas monocapa. Hemos considerado cuatro combinaciones diferentes de líquidos: perfluorinato HT-70 con aceite de silicona de 5 cSt , perfluorinato Fc-75 con agua, acetonitrilo con n-hexano y trióxido de boro con arseniuro de galio. Las tres primeras combinaciones se han elegido porque ya han sido usadas en experimentos de Bénard-Marangoni con calentamiento vertical, y esperamos que los resultados motiven a otros investigadores a repetir los experimentos con un calentamiento lateral.

Se han obtenido y discutido los campos de velocidad y temperatura del estado base. Para una configuración experimental y un calentamiento dados, los dos parámetros de control son la profundidad

total y la profundidad relativa entre los líquidos. En un diagrama usando esos dos parámetros, se distinguen cuatro regiones para los perfiles de velocidad y temperatura para paredes térmicamente conductoras. La interacción entre la tensión interfacial y el empuje puede dar lugar a: 1) una celda contra-rotante en cada capa, 2) dos celdas contra-rotantes en la capa superior y una celda en la inferior, en ambos casos existe alrededor de la interfase un flujo desde el lado caliente al frío; 3) dos celdas contra-rotantes en el líquido inferior y una celda en el superior, 4) una celda contra-rotante en cada líquido, pero con el fluido moviéndose en la interfase desde el lado frío al caliente en los últimos dos casos. Hemos determinado también los perfiles de temperatura que resultan de la interacción de la difusividad térmica y el movimiento del fluido. Cuando se consideran paredes horizontales no conductoras surge un quinto perfil de temperatura, independiente de la profundidad total.

Se han obtenido las ecuaciones de evolución para las perturbaciones del estado base y resuelto el problema de autovalores asociado. Hemos llevado a cabo también el estudio de perturbaciones bidimensionales, hallado las ramas estacionarias y discutido el comportamiento físico asociado a ellas cuando son críticas. A continuación, el análisis de estabilidad se ha extendido a perturbaciones tridimensionales. La topología de la superficie marginal de estabilidad puede ser bastante complicada con varios mínimos locales. El sistema posee una amplia variedad de regímenes en función de la naturaleza de los líquidos, su profundidad total, y profundidad relativa. Sin embargo, se pueden destacar varias características generales. La posición del máximo local $M1$ se explica en términos del perfil de temperatura del estado base del líquido inferior, mientras que el Marangoni crítico más elevado $M2$ se corresponde a un punto de codimensión 2 resultante de la interacción de dos modos Hopf de diferente frecuencia y número de onda. Además se observan tres patrones distintos: 1) ondas hidrotermales que se propagan desde el lado frío al caliente con un ángulo pequeño, típico de calentamiento lateral en sistemas monocapa con elevado Prandtl, 2) ondas hidrotermales que se propagan desde el lado caliente al frío, y 3) rollos estacionarios longitudinales.

La variedad de resultados confirma que el problema del calentamiento lateral en sistemas bicapa es una área de investigación prometedora, tanto desde el punto de vista teórico como del experimental, de los fenómenos oscilatorios en convección termocapilar. Como desarrollo futuro de este trabajo proponemos la simulación numérica de las ecuaciones de las perturbaciones en torno al punto $M2$, donde se espera una dinámica rica. También falta por desarrollar las ecuaciones de tipo de Ginzburg-Landau para el estudio de la inestabilidades oscilatorias en el régimen no lineal. Tratar el caso de interfase deformable es una tarea complicada, pero su estudio resultaría también de interés.

Parte III

Conclusiones generales

Conclusiones generales

Hemos recogido los resultados principales y su discusión en las conclusiones de cada capítulo, no obstante los resumimos ahora de forma sintética.

Se ha abordado en esta tesis el estudio de inestabilidades termoconvectivas en dos situaciones: en convección con rotación en condiciones no-Boussinesq y en capas líquidas calentadas lateralmente.

En la primera parte de la tesis se ha tratado la estabilidad de un fluido no-Boussinesq en convección con rotación. Para ello hemos utilizado en primer lugar un modelo hidrodinámico simplificado que nos ha permitido ver las características básicas de la convección NB. Después hemos estudiado el caso de un fluido cuya viscosidad depende de la temperatura, a partir de las ecuaciones hidrodinámicas fundamentales. Podemos destacar los siguientes resultados:

- Hemos corroborado que las correcciones NB hacen que la bifurcación primaria del estado conductivo sea subcrítica.
- Los efectos NB son responsables de los términos cuadráticos de las ecuaciones de amplitud, incluidos los espaciales. Estos últimos aumentan el rango de estabilidad de hexágonos con números de onda distintos al crítico.
- Hemos obtenido por primera vez expresiones analíticas de los coeficientes de las ecuaciones de amplitud para un fluido NB en convección con rotación. Los nuevos coeficientes que surgen con la rotación aumentan monótonamente con ésta.
- Nuestros resultados concuerdan con los de Busse [31] y Palm *et al.* [35] para el caso de convección NB sin rotación.
- Los rangos de estabilidad de rollos, hexágonos, y el umbral de los hexágonos oscilantes con respecto a perturbaciones homogéneas dependen fuertemente de la tasa de rotación.
- Dentro de un intervalo de tasas de rotación, los hexágonos se transforman directamente en hexágonos oscilantes, lo cual permite acceder directamente a ese estado sin los efectos espurios que conlleva la coexistencia con rollos.
- A partir de la ecuación de la fase en presencia de rotación, se ha determinado la estabilidad de los hexágonos con respecto a perturbaciones de fase de larga longitud de onda, y hallado que la rotación aumenta el rango de número de onda próximos al crítico en que los hexágonos son estables frente a este tipo de perturbaciones.

- Hemos estudiado la estabilidad de los hexágonos con respecto a perturbaciones de fase arbitrarias, viendo que influyen más que las perturbaciones de larga longitud de onda a medida que aumenta la tasa de rotación.
- Las simulaciones numéricas de las ecuaciones de amplitud están de acuerdo con el umbral de estabilidad y frecuencia predichos para los hexágonos oscilantes.

En la segunda parte de la tesis hemos abordado el problema de la estabilidad de capas líquidas sometidas a un gradiente de temperatura a lo largo de su interfase. Para el caso de una sola capa líquida abierta al aire, se ha estudiado la aparición y características de las ondas hidrotermales como fruto de una inestabilidad absoluta. Para ello hemos considerado números de onda complejos en la dirección del flujo y determinado la relación de dispersión numéricamente. Aunque hemos centrado nuestros cálculos en un líquido de $Pr = 10.3$ se esperan que sean válidos también para otros Prandtl intermedios. Destacamos las siguientes conclusiones:

- Se obtiene el mismo comportamiento cualitativo para los parámetros críticos de la inestabilidad absoluta con independencia de las condiciones de contorno.
- Se encuentran dos regímenes distintos en los parámetros críticos de la inestabilidad absoluta que se corresponden con dos ramas marginales absolutas diferentes.
- Nuestros resultados para la inestabilidad absoluta concuerdan con los experimentos de Pelacho *et al.* [101, 102] y Burguete *et al.* [100] tanto cualitativa como cuantitativamente. También se aproximan más a los datos experimentales que los resultados para la inestabilidad convectiva de Smith y Davis [17] para el caso puramente termocapilar, y de Mercier y Normand [93] cuando se considera además el empuje.
- Hemos identificado las ramas absolutas obtenidas con las ondas de tipo OH1 y OH2 halladas en los experimentos, y explicamos la distinta forma de propagación entre las ondas OH1 y OH2 como un salto de ramas absolutas.

Se ha estudiado también la estabilidad de dos líquidos superpuestos e inmiscibles sometidos a calentamiento lateral. Para ellos hemos llevado a cabo un estudio completo de los distintos estados base que caracterizan este sistema, teniendo en cuenta la influencia de la tensión interfacial y la gravedad. Hemos investigado la estabilidad con respecto a perturbaciones en dos y tres dimensiones en varios pares de líquidos de interés experimental y tecnológico. Citamos las siguientes conclusiones:

- Hemos hallado cuatro tipos de flujo y hasta cinco perfiles de temperatura que caracterizan el estado de base.
- Las ramas estacionarias asociadas a distintas relaciones de profundidad se corresponden con gradientes de velocidad y temperatura localizados en distintas regiones de la bicapa.
- Este sistema muestra tres tipos de patrones: ondas hidrotermales propagándose desde el lado frío al caliente con un pequeño ángulo, ondas propagándose del caliente al frío, y rollos estacionarios longitudinales.

- Para determinados espesores de los líquidos, surgen puntos de codimensión dos formados por la interacción entre un modo Hopf y uno estacionario, y entre dos modos Hopf con distinta frecuencia y número de onda. Este último tipo de punto es la primera vez que lo encontramos en problemas de inestabilidades termocapilares.
- La forma de los diagramas de flujos de base, y de los umbrales con respecto a la razón de espesores, no dependen de la pareja de líquidos considerados en la bicapa.

Apéndice A

Modelo de Segel

A continuación realizamos el análisis de escalas del modelo de Segel (2.11) hasta tercer orden, para determinar su ecuación de amplitud.

Orden ϵ^1 : El análisis de escalas a este orden nos lleva a la ecuación del problema lineal

$$L_0 W^{(1)} = 0 \rightarrow -\nabla_0^6 W^{(1)} + Ra_c \nabla_{h_0}^2 W^{(1)} - 2\Upsilon \cos \pi z W^{(1)} = 0 \quad (\text{A.1})$$

que como hemos visto en el análisis lineal de estabilidad del capítulo segundo tiene por solución

$$W^{(1)} = (\sin \pi z + \Upsilon K \sin 2\pi z) \sum_{j=1}^3 (A_j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c.)$$

donde

$$Ra_c = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} \quad (\text{A.3})$$

y

$$K = \frac{1}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - (k^2 + \pi^2)^3} \quad (\text{A.4})$$

Orden ϵ^2 :

$$L_0 W^{(2)} + L_1 W^{(1)} = -\partial_{z^2} (W^{(1)} W_z^{(1)}) \quad (\text{A.5})$$

Al haber combinaciones cuadráticas de $W^{(1)}$ despreciaremos los términos de $O(\Upsilon^2)$ por ser de menor magnitud que el resto.

La alternativa de Fredholm afirma que una ecuación de la forma

$$MX = N \quad (\text{A.6})$$

donde M es un operador lineal, X las incógnitas y N términos no lineales, tiene solución si y sólo si el kernel del problema homogéneo adjunto

$$M^\dagger \tilde{X} = 0 \quad (\text{A.7})$$

es ortogonal a la parte no homogénea de la ecuación original, es decir

$$\langle \tilde{X} | N \rangle = 0 \quad (\text{A.8})$$

donde el adjunto del operador lineal está definido por

$$\langle \tilde{X} | MX \rangle = \langle X | M^\dagger \tilde{X} \rangle \quad (\text{A.9})$$

En la ecuación (A.5) la parte lineal $L_0 W^{(2)}$ es autoadjunta, con lo que la alternativa de Fredholm se escribe

$$\langle W^{(1)} | -\partial_{z^2} (W^{(1)} W_z^{(1)}) - L^{(1)} W^{(1)} \rangle = 0 \quad (\text{A.10})$$

La condición resolutoria anterior da lugar a una restricción, separando la parte real de la imaginaria tenemos que se han de verificar las dos relaciones

$$\begin{aligned} \text{Parte Real: } & Ra^{(1)} k^2 A_1 + \frac{3}{2} \pi^3 \Upsilon K 2 \bar{A}_{11}^{(2)} \bar{A}_{11}^{(3)} + O(\Upsilon^2) = 0 \\ \text{Parte Imaginaria: } & 6k(k^2 + \pi^2)^2 - 2 Ra_c k + O(\Upsilon^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

De la última expresión obtenemos

$$Ra_c = 3(k^2 + \pi^2)^2 + O(\Upsilon^2) \quad (\text{A.12})$$

este valor junto con (A.3) permite hallar el número de onda crítico en el contexto del análisis de múltiples escalas

$$k_c = \frac{\pi^2}{2} + O(\Upsilon^2) \quad (\text{A.13})$$

La forma general de la solución de (A.5) es la suma de una solución particular no trivial de la ecuación completa más la solución del problema homogéneo

$$W^{(2)} = W_p^{(2)} + W_h^{(2)} \quad (\text{A.14})$$

La solución del problema homogéneo es la misma que la del problema lineal $W_h^{(2)} = W^{(1)}$. Podemos buscar una solución particular de la forma

$$\begin{aligned} W_p^{(2)} = & (\alpha_0 \sin 2\pi z + \alpha_1 \Upsilon \sin \pi z + \alpha_2 \Upsilon \sin 3\pi z) \left(\sum_{j=1}^3 (A_{21}^j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c.) \right) \\ & + (\alpha_0' \sin 2\pi z + \alpha_1' \Upsilon \sin \pi z + \alpha_2' \Upsilon \sin 3\pi z) \left(\sum_{j=1}^3 (A_{22}^j \exp 2i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c.) \right) \\ & + (\alpha_0'' \sin 2\pi z + \alpha_1'' \Upsilon \sin \pi z + \alpha_2'' \Upsilon \sin 3\pi z) \left(\sum_{j=1}^3 (A_{22}^{ji} \exp i(\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{x} + c.c.) \right) \\ & + (\alpha_0''' \sin 2\pi z + \alpha_1''' \Upsilon \sin \pi z + \alpha_2''' \Upsilon \sin 3\pi z) A_{20} \\ & + \Upsilon \alpha^{Ra^{(1)}} \sin 2\pi z \sum_{j=1}^3 (A_j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c.) + \Upsilon \alpha^\nabla \sin 2\pi z \sum_{j=1}^3 (\nabla A_j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c.) \end{aligned}$$

Los términos espaciales en $W_p^{(2)}$ aparecen como consecuencia de las correcciones NB. Además los términos NB hacen que los modos verticales dependan de los módulos de los vectores de onda horizontales.

Si se sustituye $W^{(2)}$ y $W^{(1)}$ en (A.5), después de igualar los coeficientes de los distintos armónicos y aplicar la alternativa de Fredholm obtenemos los coeficientes de $W_p^{(2)}$ relevantes para nuestros cálculos

$$\begin{aligned} \alpha_1 A_{21}^1 &= \frac{\alpha_0 A_{21}^1 - 4\pi^3 K \overline{A}_{11}^{(2)} \overline{A}_{11}^{(3)}}{(k^2 + \pi^2)^3 - k^2 Ra_c}, & \alpha_0 A_{21}^1 &= \frac{4\pi^3 K \overline{A}_{11}^{(2)} \overline{A}_{11}^{(3)}}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - k^2 Ra_c} \\ \alpha^{Ra^{(2)}} &= \frac{Ra^{(2)} k^2 K}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - k^2 Ra_c}, & \alpha^\nabla &= \frac{-2i Ra_c k K + i6k K (k^2 + 4\pi^2)^2}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - k^2 Ra_c} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Order ϵ^3 :

$$L_0 W^{(3)} + L_1 W^{(2)} + L_2 W^{(1)} = -\partial_\tau (W^{(1)}) - \partial_{z^2} (W^{(1)} W_z^{(2)} + W^{(2)} W_z^{(1)}) \quad (\text{A.16})$$

La derivada temporal a segundo orden ∂_τ aparece por primera vez en el análisis de escalas. Por tanto, es el orden más bajo en el que es posible obtener una ecuación de evolución para la amplitud. Sustituyendo $W^{(2)}$ y $W^{(1)}$ en el lado derecho y aplicando la alternativa de Fredholm (despreciando correcciones cuadráticas) se llega después de algunos cálculos a la ecuación de evolución a tercer orden

$$\begin{aligned} \partial_\tau \overline{A}_{11}^{(1)} &= i\Upsilon K 6k \alpha_0 (k^2 + 4\pi^2)^2 (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1) A_{21}^{(1)} + i6k (k^2 + \pi^2)^2 (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1) A_{11}^{(1)} \\ &+ i\Upsilon 6k \alpha_1 (k^2 + \pi^2)^2 (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1) A_{21}^{(1)} + 12k^2 (k^2 + \pi^2)^2 (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1)^2 A_{11}^{(1)} \\ &+ 3(k^2 + \pi^2)^2 (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1)^2 A_{11}^{(1)} + Ra^{(2)} k^2 A_{11}^{(1)} - i\Upsilon K 2k \alpha_0 (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1) A_{21}^{(1)} \\ &- i Ra_c 2k (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1) A_{11}^{(1)} - i\Upsilon Ra_c 2k \alpha_1 (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1) A_{21}^{(1)} - Ra_c (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1)^2 A_{11}^{(1)} \\ &+ \Upsilon Ra^{(1)} K \alpha_0 k^2 (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1) A_{21}^{(1)} + Ra^{(1)} k^2 A_{11}^{(1)} + \Upsilon Ra^{(1)} \alpha_1 k^2 A_{21}^{(1)} - i Ra^{(1)} 2k (\hat{n}_1 \cdot \nabla_1)^2 A_{11}^{(1)} \\ &- \frac{\pi^3}{2} (A_{20} A_{11}^{(1)} + \overline{A}_{21}^{(2)} \overline{A}_{11}^{(3)} + \overline{A}_{21}^{(3)} \overline{A}_{11}^{(2)} + A_{21}^{(1)} \overline{A}_{11}^{(1)} + A_{22}^{(12)} A_{11}^{(2)} + A_{22}^{(13)} A_{11}^{(3)}) \\ &+ 2\frac{3}{2}\pi^3 \Upsilon K 2 \overline{A}_{11}^{(2)} \overline{A}_{11}^{(3)} - 2\frac{\pi^3}{2} \Upsilon \alpha^{Ra^{(1)}} \overline{A}_{11}^{(2)} \overline{A}_{11}^{(3)} \\ &- \frac{\pi^3}{2} \Upsilon \alpha^\nabla (\overline{A}_{11}^{(3)} (\hat{n}_2 \cdot \nabla_1) \overline{A}_{11}^{(2)} + \overline{A}_{11}^{(2)} (\hat{n}_3 \cdot \nabla_1) \overline{A}_{11}^{(3)}) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Apéndice B

Ecuación de la fase para hexágonos en presencia de rotación

Partimos de una ecuación de amplitud general para el caso de convección con rotación en presencia de efectos NB. Añadimos un término α_2 a la Ec. (3.43).

$$\begin{aligned} \partial_t A_1 = & \mu A_1 + \delta \bar{A}_2 \bar{A}_3 - g_1 |A_1|^2 A_1 - (g_2 + \varpi) |A_2|^2 A_1 - (g_2 - \varpi) |A_3|^2 A_1 \\ & + \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 A_1 + i\beta_1 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] + i\beta_2 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] \\ & + i\alpha_2 [\bar{A}_2 \partial_{\tau_3} \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \partial_{\tau_2} \bar{A}_2] + i\alpha_1 [\bar{A}_2 \partial_{\tau_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{\tau_2} \bar{A}_2] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Para obtener la parte lineal de la ecuación de la fase en un patrón hexagonal introducimos perturbaciones no homogéneas en la solución hexagonal estacionaria

$$A_j = H(1 + r_j + i\phi) \exp i\mathbf{q}_j \cdot \mathbf{x}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{B.2})$$

Si sustituimos esta expresión en (B.1), separando las partes real e imaginaria y linealizando obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 = & \mu r_1 + \delta H(r_2 + r_3) - 3g_1 H^2 r_1 - (g_2 + \nu) H^2 (r_1 + 2r_2) - (g_2 - \nu) H^2 (r_1 + 2r_3) - q^2 \xi_0^2 r_1 \\ & + \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 r_1 - 2q \xi_0^2 \partial_{x_1} \phi_1 + \beta_1 H (\partial_{x_3} \phi_3 + \partial_{x_2} \phi_2 + 2q(r_2 + r_3)) + \beta_2 H (\partial_{x_3} \phi_3 - \partial_{x_2} \phi_2) \\ & + \alpha_2 H (\partial_{\tau_3} \phi_3 + \partial_{\tau_2} \phi_2) + \alpha_1 H (\partial_{\tau_3} \phi_3 - \partial_{\tau_2} \phi_2) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 = & \mu \phi_1 - \delta H(\phi_2 + \phi_3) - g_1 H^2 \phi_1 - (g_2 + \nu) H^2 \phi_1 - (g_2 - \nu) H^2 \phi_1 - q^2 \xi_0^2 \phi_1 \\ & + \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 \phi_1 + 2q \xi_0^2 \partial_{x_1} r_1 + \beta_1 H (\partial_{x_3} r_3 + \partial_{x_2} r_2 - 2q(\phi_2 + \phi_3)) + \beta_2 H (\partial_{x_3} r_3 - \partial_{x_2} r_2) \\ & + \alpha_2 H (\partial_{\tau_3} r_3 + \partial_{\tau_2} r_2) + \alpha_1 H (\partial_{\tau_3} r_3 - \partial_{\tau_2} r_2) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La ecuaciones de evolución para los otros índices se obtienen por permutación cíclica. Teniendo en cuenta que las amplitudes del patrón hexagonal verifican

$$0 = \mu H + \delta H^2 - g_1 H^3 - (g_2 + \varpi) H^3 - (g_2 - \varpi) H^3 - \xi_0^2 q^2 H + 2q\beta_1 H^2 \quad (\text{B.5})$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
r_1 &= (\delta + 2\beta_1 q)H(r_2 + r_3 - r_1) - 2g_1 H^2 r_1 - 2g_2 H^2(r_2 + r_3) + 2\varpi H^2(r_3 - r_2) \\
&+ \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 r_1 - 2q\xi_0^2 \partial_{x_1} \phi_1 + \beta_1 H(\partial_{x_3} \phi_3 \partial_{x_2} \phi_2 + 2q(r_2 + r_3)) \\
&+ \beta_2 H(\partial_{x_3} \phi_3 - \partial_{x_2} \phi_2) + \alpha_1 H(\partial_{\tau_3} \phi_3 - \partial_{\tau_2} \phi_2) + \alpha_2 H(\partial_{\tau_3} \phi_3 + \partial_{\tau_2} \phi_2)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &= -(\delta + 2\beta_1 q)H(\phi_2 + \phi_3 + \phi_1) + \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 \phi_1 + 2q\xi_0^2 \partial_{x_1} r_1 + \\
&+ \beta_1 H(\partial_{x_3} r_3 + \partial_{x_2} r_2 - 2q(\phi_2 + \phi_3)) + \beta_2 H(\partial_{x_3} r_3 - \partial_{x_2} r_2) + \\
&+ \alpha_1 H(\partial_{\tau_3} r_3 - \partial_{\tau_2} r_2) + \alpha_2 H(\partial_{\tau_3} r_3 + \partial_{\tau_2} r_2)
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Las variaciones en la amplitud son más rápidas que las de la fase, así su evolución esta regida por esta última. Eliminando adiabáticamente r_i y teniendo en cuenta que los términos de la forma $\partial_{x_i}^2 r_i$ son despreciables (por generar derivadas de orden $\partial_{x_i}^3 \phi_i$) reescribimos el sistema anterior como

$$\begin{pmatrix} f_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ f_2(\phi_2, \phi_3, \phi_1) \\ f_3(\phi_3, \phi_1, \phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

donde los elementos de matriz son

$$a = -(\delta + 2\beta_1 q + 2g_1 H) \tag{B.9}$$

$$b = \delta + 2\beta_1 q - 2g_2 H - 2\varpi H \tag{B.10}$$

$$c = \delta + 2\beta_1 q - 2g_2 H + 2\varpi H \tag{B.11}$$

y las funciones f_i están dadas por

$$\begin{aligned}
f_1(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= \frac{2q\xi_0^2 \partial_{x_1} \phi_1}{H} - (\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1))\partial_{x_3} \phi_3 \\
&- (\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))\partial_{x_2} \phi_2 \\
&- \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)\partial_{x_2} \phi_3 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)\partial_{x_3} \phi_2
\end{aligned} \tag{B.12}$$

el resto se obtiene por permutación cíclica de los subíndices de las variables. Resolviendo el sistema lineal de ecuaciones hallamos la expresión de las amplitudes r_i en función de las fases ϕ_i

$$r_1 = J\partial_{x_1} \phi_1 + K\partial_{x_2} \phi_2 + M\partial_{x_3} \phi_3 - B\partial_{x_1} \phi_2 + B'\partial_{x_2} \phi_1 + C\partial_{x_1} \phi_3 - C'\partial_{x_3} \phi_1 \tag{B.13}$$

$$-A\partial_{x_2} \phi_3 + A'\partial_{x_3} \phi_2 \tag{B.14}$$

Los coeficientes son

$$J = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \left\{ \frac{\xi_0^2 2q}{H} (a^2 - bc) - (c^2 - ab) (\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)) \right\}$$

$$- (b^2 - ac)(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)) \} \quad (\text{B.15})$$

$$K = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \left\{ \frac{\xi_0^2 2q}{H} (c^2 - ab) - (b^2 - ac)(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)) \right. \\ \left. - (a^2 - bc)(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)) \right\} \quad (\text{B.16})$$

$$M = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \left\{ \frac{\xi_0^2 2q}{H} (b^2 - ac) - (a^2 - bc)(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)) \right. \\ \left. - (c^2 - ab)(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)) \right\} \quad (\text{B.17})$$

$$B = \frac{b^2 - ac}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1) \quad B' = \frac{b^2 - ac}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ C = \frac{c^2 - ab}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 - \alpha_1) \quad C' = \frac{c^2 - ab}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1) \quad (\text{B.18}) \\ A = \frac{a^2 - bc}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1) \quad A' = \frac{a^2 - bc}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc} \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

sustituyendo en la ecuación de amplitud (B.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_F = & \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 \phi_1 + 2q \xi_0^2 (J \partial_{x_2}^2 \phi_1 + K \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_2 + M \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_3) \quad (\text{B.19}) \\ & + 2q \xi_0^2 (-B \partial_{x_1}^2 \phi_2 + B' \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_1 + C \partial_{x_1}^2 \phi_3 - C' \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_1 - A \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_3 + A' \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_2) \\ & - (\delta + 2q\beta_1)(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \\ & + H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))(J \partial_{x_3}^2 \phi_3 + K \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_1 + M \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_2) \\ & + H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))(-B \partial_{x_3}^2 \phi_1 + B' \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_3 + C \partial_{x_3}^2 \phi_2 - C' \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_3 - A \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_2 + A' \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_1) \\ & + H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))(J \partial_{x_2}^2 \phi_2 + K \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_3 + M \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_1) \\ & + H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))(-B \partial_{x_2}^2 \phi_3 + B' \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_2 + C \partial_{x_2}^2 \phi_1 - C' \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_2 - A \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_1 + A' \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_3) \\ & + H \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)(J \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_3 + K \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_1 + M \partial_{x_2}^2 \phi_2) \\ & + H \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)(-B \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_1 + B' \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_3 + C \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_2 - C' \partial_{x_2}^2 \phi_3 - A \partial_{x_1} \partial_{x_2} \phi_2 + A' \partial_{x_2}^2 \phi_1) \\ & + H \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)(J \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_2 + K \partial_{x_3}^2 \phi_3 + M \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_1) \\ & + H \frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)(-B \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_3 + B' \partial_{x_3}^2 \phi_2 + C \partial_{x_2} \partial_{x_3} \phi_1 - C' \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_2 - A \partial_{x_3}^2 \phi_1 + A' \partial_{x_1} \partial_{x_3} \phi_3) \end{aligned}$$

las otras dos fases $\dot{\phi}_2$ y $\dot{\phi}_3$ se obtienen de manera similar.

Definiendo la fase total como $\Phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ se determina su ecuación de evolución

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = & D_1(\partial_{x_1^2}\phi_1 + \partial_{x_2^2}\phi_2 + \partial_{x_3^2}\phi_3) + D_2(\partial_{x_1^2}\phi_2 + \partial_{x_2^2}\phi_3 + \partial_{x_3^2}\phi_1) \\ & + D_3(\partial_{x_1^2}\phi_3 + \partial_{x_2^2}\phi_1 + \partial_{x_3^2}\phi_2) + D_4(\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi_2 + \partial_{x_2}\partial_{x_3}\phi_3 + \partial_{x_3}\partial_{x_1}\phi_1) \\ & + D_5(\partial_{x_1}\partial_{x_3}\phi_3 + \partial_{x_2}\partial_{x_1}\phi_1 + \partial_{x_3}\partial_{x_2}\phi_2) + D_6(\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi_3 + \partial_{x_2}\partial_{x_3}\phi_1 + \partial_{x_3}\partial_{x_1}\phi_2) - 3(v + 2q\beta_1)\Phi \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} D_1 = & \xi_0^2 + 2q\xi_0^2 J + H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))J + H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))J \\ & + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)M + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)K \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} D_2 = & -2q\xi_0^2 B - H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))B - H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))B \\ & - H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)C' - H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)A \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} D_3 = & 2q\xi_0^2 C + H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))C + H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))C \\ & + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)A' + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)B' \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} D_4 = & 2q\xi_0^2 K - 2q\xi_0^2 C' + H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))K + H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))K \\ & - H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))C' - H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))C' \\ & + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)J - H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)A + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)M - H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)B \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} D_5 = & 2q\xi_0^2 M + 2q\xi_0^2 B' + H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))M + H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))M \\ & + H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))B' + H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))B' \\ & + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)K + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)C + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)J + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)A' \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} D_6 = & 2q\xi_0^2(A' - A) + H(\beta_1 + \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 + \alpha_2))(A' - A) + H(\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2))(-A + A') \\ & + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_2 + \alpha_1)(-B + B') + H\frac{2}{\sqrt{3}}(\alpha_1 - \alpha_2)(C - C') \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

La fase total Φ es un modo rápido con lo que se puede eliminar adiabáticamente en (B.20), $\partial_t \Phi = 0$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{3(\delta + 2q\beta_1)} \left\{ D_1(\partial_{x_1^2}\phi_1 + \partial_{x_2^2}\phi_2 + \partial_{x_3^2}\phi_3) + D_2(\partial_{x_1^2}\phi_2 + \partial_{x_2^2}\phi_3 + \partial_{x_3^2}\phi_1) \right. \\ & \left. + D_3(\partial_{x_1^2}\phi_3 + \partial_{x_2^2}\phi_1 + \partial_{x_3^2}\phi_2) + D_4(\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi_2 + \partial_{x_2}\partial_{x_3}\phi_3 + \partial_{x_3}\partial_{x_1}\phi_1) \right. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$+D_5(\partial_{x_1}\partial_{x_3}\phi_3 + \partial_{x_2}\partial_{x_1}\phi_1 + \partial_{x_3}\partial_{x_2}\phi_2) + D_6(\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi_3 + \partial_{x_2}\partial_{x_3}\phi_1 + \partial_{x_3}\partial_{x_1}\phi_2) \}$$

Sustituyendo esta expresión en (B.19) obtenemos una nueva expresión para $\dot{\phi}_1$, y por permutación cíclica de los índices obtenemos ecuaciones análogas para $\dot{\phi}_2$ y $\dot{\phi}_3$. La aproximación adiabática de la fase $\partial\Phi = 0$ implica una ligadura para las fases de los tres modos, de forma que sólo dos de ellas son libres. Teniendo en cuenta lo anterior podemos definir

$$\phi_x = -(\phi_2 + \phi_3) \quad (\text{B.28})$$

$$\phi_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_2 - \phi_3) \quad (\text{B.29})$$

y después de algunos cálculos llegamos a la ecuación de evolución de ϕ_x

$$\begin{aligned} -(\dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3) = & \quad (\text{B.30}) \\ \dot{\phi}_x = D_\perp \nabla^2 \phi_x + (D_\parallel - D_\perp)(\partial_x^2 \phi_x + \partial_x \partial_y \phi_y) + D_{\times 1} \nabla^2 \phi_y - D_{\times 2}(\partial_y^2 \phi_y + \partial_x \partial_y \phi_x) \end{aligned}$$

Seguindo un procedimiento similar se obtiene $\dot{\phi}_y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}}(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) = & \quad (\text{B.31}) \\ \dot{\phi}_y = D_\perp \nabla^2 \phi_y + (D_\parallel - D_\perp)(\partial_y^2 \phi_y + \partial_x \partial_y \phi_x) - D_{\times 1} \nabla^2 \phi_x + D_{\times 2}(\partial_x^2 \phi_x + \partial_x \partial_y \phi_y) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} D_{\times 1} = & \frac{1}{d^2 + f^2} \left\{ -\frac{d^2 H^2}{e} \alpha_2 (\sqrt{3} \alpha_1 + \beta_1) + \frac{d H^2}{e} q 3 \alpha_2 (2gH + e + 2q\beta_1) \xi_0^2 \right. \\ & - \frac{12H^5}{e} \alpha_2 \varpi^2 (H(\sqrt{3} \alpha_1 + \beta_1) - 2q\xi_0^2) + \sqrt{3} d H q \beta_2 \xi_0^2 \\ & \left. + \frac{1}{4} H^2 f ((\alpha_2 + \sqrt{3} \beta_2)^2 + (\beta_1 - \sqrt{3} \alpha_1)^2) - f q^2 \xi_0^4 \right\} \quad (\text{B.32}) \end{aligned}$$

$$D_{\times 2} = \frac{\sqrt{3} \beta_2 (H^2 \beta_1 - q H \xi_0^2) + \alpha_2 (3q \xi_0^2 H - 2H^2 \beta_1 - \sqrt{3} H^2 \alpha_1)}{e} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} D_\perp = & \frac{\xi_0^2}{4} - \frac{H^2 \alpha_2 (\alpha_2 - \sqrt{3} \beta_2)}{e} + \frac{1}{d^2 + f^2} \left\{ \frac{H^2 d}{4} ((\alpha_2 + \sqrt{3} \beta_2)^2 + (\beta_1 - \sqrt{3} \alpha_1)^2) - q^2 \xi_0^4 d \right. \\ & \left. - H f q \xi_0^2 (\alpha_2 + \sqrt{3} \beta_2) \right\} \quad (\text{B.34}) \end{aligned}$$

$$D_\parallel - D_\perp = \frac{\xi_0^2}{2} - \frac{2q^2 \xi_0^4}{e} - \frac{H^2}{e} (\beta_1 (\beta_1 + \sqrt{3} \alpha_1) - \alpha_2 (\alpha_2 - \sqrt{3} \beta_2)) + \frac{H \xi_0^2}{e} q (3\beta_1 + \sqrt{3} \alpha_1) \quad (\text{B.35})$$

con

$$d = 2H^2(g_1 - g_2) + 2(\delta + 2q\beta_1)H \quad (\text{B.36})$$

$$e = 2H^2(g_1 + 2g_2) - (\delta + 2q\beta_1)H \quad (\text{B.37})$$

$$f = 2\sqrt{3}H^2\varpi \quad (\text{B.38})$$

$$H = \frac{\delta + 2q\beta_1 + \sqrt{(\delta + 2q\beta_1)^2 + 4(\mu - \xi_0^2 q^2)(g_1 + 2g_2)}}{2(g_1 + 2g_2)} \quad (\text{B.39})$$

Finalmente, agrupando las ecuaciones anteriores y expresando todo en notación vectorial, escribimos la ecuación de la fase de una estructura hexagonal en rotación de forma más compacta como:

$$\partial_t \phi = D_{\perp} \nabla^2 \phi + (D_{\parallel} - D_{\perp}) \nabla (\nabla \cdot \phi) - D_{\times 1} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla^2 \phi) + D_{\times 2} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla) (\nabla \cdot \phi) \quad (\text{B.40})$$

Apéndice C

Fluido no-Boussinesq en convección con rotación

Realizamos un análisis perturbativo de las ecuaciones para un fluido en convección con rotación con una viscosidad linealmente dependiente con la temperatura. Para ello partimos de las ecuaciones (3.29)

Orden ϵ^1 : Las contribuciones NB producen correcciones de segundo orden en los parámetros críticos de la convección, como vimos en el capítulo dedicado a los fenómenos NB, despreciándolas tenemos que el problema lineal aproximado es

$$L_0 X^{(1)} = 0 \quad (\text{C.1})$$

o equivalentemente en forma matricial

$$\begin{pmatrix} -\nabla_0^4 & T_a^{1/2} \partial_z & -\nabla_{h_0}^2 \\ -T_a^{1/2} \partial_z & -\nabla_0^2 & 0 \\ Ra_c & 0 & \nabla_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{(1)} \\ \zeta^{(1)} \\ \theta^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

cuyas soluciones son

$$(w^{(1)}, \zeta^{(1)}, \theta^{(1)}) = (\cos \pi z, \zeta_0 \sin \pi z, a_0 \cos \pi z) \left(\sum_{j=1}^3 A_j \exp i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. \right), \quad (\text{C.3})$$

donde se ha definido

$$a_0 = \frac{Ra_c}{k^2 + \pi^2} \quad (\text{C.4a})$$

$$\zeta_0 = -\frac{\pi T_a^{1/2}}{k^2 + \pi^2} \quad (\text{C.4b})$$

El operador lineal adjunto L_0^\dagger se determina a través de la relación $\langle \tilde{X} \cdot L_0 X \rangle = \langle X \cdot L_0^\dagger \tilde{X} \rangle$ en la que el producto escalar $\langle | \rangle$ se define de forma usual $\langle a|b \rangle = \int_V \bar{a} b dV$. Después de algunas integraciones se encuentra que

$$L_0^\dagger = \begin{pmatrix} -\nabla_0^4 & T_a^{1/2} \partial z & Ra_c \\ -T_a^{1/2} \partial z & -\nabla_0^2 & 0 \\ -\nabla_{h_0}^2 & 0 & \nabla_0^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

y el problema homogéneo $L_0^\dagger X^* = 0$ tiene soluciones de la forma $X^* = (w^{(1)*}, \zeta^{(1)*}, \theta^{(1)*}) = \left(w^{(1)}, \zeta^{(1)}, \frac{k^2}{Ra_c} \theta^{(1)} \right)$

Orden ϵ^2 : A este orden se ha de verificar la relación

$$L_0 X^{(2)} + L_1 X^{(1)} = N_2 \quad (\text{C.6})$$

La condición resolutoria la obtenemos proyectando las autofunciones del problema adjunto sobre los términos lineales espaciales y sobre los no lineales

$$\langle (w^{(1)*}, \zeta^{(1)*}, \theta^{(1)*}) \cdot (N_2 - L_1 X^{(1)}) \rangle = 0 \quad (\text{C.7})$$

donde

$$L_1 = \begin{pmatrix} -4\nabla_0^2(\nabla_0 \nabla_1) & 0 & -2(\nabla_0 \nabla_1) \\ 0 & -2(\nabla_0 \nabla_1) & 0 \\ Ra^{(1)} & 0 & 2(\nabla_0 \nabla_1) \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

y

$$N_2 = \begin{pmatrix} -\Gamma[-\nabla_{h_0}^2 \psi_{00}^{11}, z + \partial_z(\partial_{x_0} \psi_{00}^{11}, x + \partial_{y_0} \psi_{00}^{11}, y)] \\ \Gamma(\partial_{x_0} \psi_{00}^{11}, y - \partial_{y_0} \psi_{00}^{11}, x) \\ (\mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla_0) \theta^{(1)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

La ecuación (C.7) da lugar a una ligadura, que después de separar la parte real de la imaginaria permite obtener las relaciones

$$\begin{aligned} \text{Parte Real:} & \quad -Ra^{(1)} A_1 + \Gamma \frac{8 Ra_c}{3 k^2} \left(k^4 + \pi^4 + \frac{\pi^2 k^2}{2} + \zeta_0^2 \left(\frac{k^2}{2} - \pi^2 \right) \right) \bar{A}_{11}^{(2)} \bar{A}_{11}^{(3)} \\ \text{Parte Imaginaria:} & \quad -4 k (k^2 + \pi^2)^3 + 2 k \pi^2 (Ra_c + T_a) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

La última relación junto con el valor que obtenemos para Ra_c a orden ϵ^1 nos proporciona el número de onda crítico k_c que deducimos en el primer capítulo.

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores las soluciones del problema no homogéneo a segundo orden son las siguientes:

$$\zeta_p^{(2)} = \cos 2\pi z \left(\sum_{j=1}^3 \zeta_{21}^j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. + \sum_{j=1}^3 \zeta_{22}^{ji} \exp i(\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{x} + c.c. \right) \quad (C.11)$$

$$+ \zeta^\nabla \sin \pi z \left(\sum_{j=1}^3 (\hat{n}_j \cdot \nabla) A_j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} - c.c. \right) + \Gamma \zeta^\Gamma \sin 2\pi z (\overline{A_2 A_3} \exp i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \dots)$$

$$w_p^{(2)} = \sin 2\pi z \left(\sum_{j=1}^3 A_{21}^j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. + \sum_{j=1}^3 A_{22}^{ji} \exp i(\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{x} + c.c. \right) \quad (C.12)$$

$$+ w^\nabla \cos \pi z \left(\sum_{j=1}^3 (\hat{n}_j \cdot \nabla) A_j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} - c.c. \right) + \Gamma w^\Gamma \cos 2\pi z (\overline{A_2 A_3} \exp i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \dots)$$

$$\theta_p^{(2)} = \sin 2\pi z \left(\theta_{20} + \sum_{j=1}^3 \theta_{21}^j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. + \sum_{j=1}^3 \theta_{22}^{ji} \exp i(\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{x} + c.c. \right) \quad (C.13)$$

$$+ \theta^\nabla \cos \pi z \left(\sum_{j=1}^3 (\hat{n}_j \cdot \nabla) A_j \exp i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} - c.c. \right) + \Gamma \theta^\Gamma \cos 2\pi z (\overline{A_2 A_3} \exp i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \dots)$$

Donde los coeficientes son

$$\begin{aligned} \theta^\nabla &= 2ik \frac{\zeta_0^2 Ra_c - a_0(k^2 + \pi^2)(1 + \zeta_0^2)}{Ra_c^2 + (k^2 + \pi^2)^2(1 + \zeta_0^2)}, & w^\nabla &= -2ik \frac{a_0^2 + \zeta_0^2}{a_0 Ra_c + (k^2 + \pi^2)(1 + \zeta_0^2)}, \\ \zeta^\nabla &= \frac{2ik\zeta_0}{a_0 Ra_c + (k^2 + \pi^2)(1 + \zeta_0^2)}, & u_{20} &= \frac{2i\pi}{k^2}, \\ A_{21}^i &= \frac{3\pi k^2 a_0}{2((k^2 + 4\pi^2)^3 + 4\pi^2 T_a - Ra_c k^2)} \overline{A_{11}^{(j)}} \overline{A_{11}^{(k)}}, & (\mathbf{k}_i &= -\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_k), \\ A_{22}^{ij} &= \frac{\pi k^2 a_0}{2((3k^2 + 4\pi^2)^3 + 4\pi^2 T_a - 3Ra_c k^2)} A_{11}^{(i)} \overline{A_{11}^{(j)}}, & \theta_{20} &= \frac{a_0 k^2}{2\pi} (|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2), \\ \theta_{21}^i &= A_{21}^i \frac{(k^2 + 4\pi^2)^3 + 4\pi^2 T_a}{k^2 + 4\pi^2}, & \theta_{22}^{ij} &= A_{22}^{ij} \frac{(3k^2 + 4\pi^2)^3 + 4\pi^2 T_a}{3k^2 + 4\pi^2}, \\ \zeta_{21}^i &= -\frac{2\zeta_0(k^2 + \pi^2)A_{21}^i}{k^2 + 4\pi^2}, & \zeta_{22}^{ij} &= -\frac{2\zeta_0(k^2 + \pi^2)A_{22}^{ij}}{3k^2 + 4\pi^2}, \\ w^\Gamma &= -\frac{a_0(k^2 + \pi^2)(k^2 + 4\pi^2)^2 + 2a_0(k^2 + \pi^2)(-k^2 + 2\pi^2)\zeta_0^2}{2(k^2 + 4\pi^2)^3 - 2k^2 Ra_c + 8\pi^2 T_a} \\ \theta^\Gamma &= -\frac{a_0 Ra_c (k^2 + \pi^2)}{2(k^2 + 4\pi^2)} \frac{(k^2 + 4\pi^2)^2 + 2(k^2 - 2\pi^2)\zeta_0^2}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - k^2 Ra_c + 4\pi^2 T_a} \\ \zeta^\Gamma &= \frac{-a_0 \zeta_0}{2(k^2 + 4\pi^2)} \frac{2(k^2 + \pi^2)^2(k^2 + 4\pi^2)^2 + k^2(k^2 - 2\pi^2)Ra_c - (k^2 - 2\pi^2)(k^2 + 4\pi^2)^3}{(k^2 + 4\pi^2)^3 - k^2 Ra_c + 4\pi^2 T_a} \end{aligned}$$

Hemos despreciado correcciones en Γ de los términos cúbicos. Por último, hacemos referencia a que la solución particular de la ecuación

$$L_0 X_{p, Ra^{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Ra^{(1)} \cos \pi z \left(\sum_{j=1}^3 A_j \exp i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. \right) \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

no existe. Sin embargo, es posible encontrar soluciones aproximadas de la forma

$$w = \frac{Ra_1}{Ra_c} \cos \pi z \left(\sum_{j=1}^3 A_j \exp i \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + c.c. \right) \quad (\text{C.15a})$$

$$\zeta = 0 \quad (\text{C.15b})$$

$$\theta = 0 \quad (\text{C.15c})$$

que introducen correcciones del orden $\frac{Ra^{(1)}}{Ra_c}$ en el segundo miembro de la ecuación (C.6). Estas correcciones son mucho menores que el resto de los términos que aparecen si la expansión en potencias de ϵ es adecuada, ya que entonces $Ra^{(1)} \ll Ra_c$.

Orden ϵ^3 : A este orden tenemos la ecuación

$$L_0 X^{(3)} + L_1 X^{(2)} + L_2 X^{(1)} = N_3 \quad (\text{C.16})$$

donde

$$L_2 = \begin{pmatrix} -2\nabla_0^2 \nabla_1^2 - 4(\nabla_0 \nabla_1)^2 & 0 & -\nabla_1^2 \\ 0 & -\nabla_1^2 & 0 \\ Ra^{(1)} & 0 & \nabla_1^2 - \partial \tau \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

y el término no lineal a tercer orden es

$$N_3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Gamma (-\nabla_{h_0}^2 \psi_{00, z}^{12} + \partial_z (\partial_{x_0} \psi_{00, x}^{12} + \partial_{y_0} \psi_{00, y}^{12})) \\ -\Gamma (-\nabla_{h_0}^2 \psi_{00, z}^{21} + \partial_z (\partial_{x_0} \psi_{00, x}^{21} + \partial_{y_0} \psi_{00, y}^{21})) \\ -\Gamma (-\nabla_{h_0}^2 \psi_{10, z}^{11} + \partial_z (\partial_{x_0} \psi_{10, x}^{11} + \partial_{y_0} \psi_{10, y}^{11})) \\ -\Gamma (-\nabla_{h_0}^2 \psi_{01, z}^{11} + \partial_z (\partial_{x_0} \psi_{01, x}^{11} + \partial_{y_0} \psi_{01, y}^{11})) \\ -\Gamma (-2(\nabla_0 \nabla_1) \psi_{00, z}^{11} + \partial_z (\partial_{x_1} \psi_{00, x}^{11} + \partial_{y_1} \psi_{00, y}^{11})) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \Gamma (\partial_{x_0} \psi_{00, y}^{12} - \partial_{y_0} \psi_{00, x}^{12}) \\ +\Gamma (\partial_{x_0} \psi_{00, y}^{21} - \partial_{y_0} \psi_{00, x}^{21}) \\ +\Gamma (\partial_{x_0} \psi_{10, y}^{11} - \partial_{y_0} \psi_{10, x}^{11}) \\ +\Gamma (\partial_{x_0} \psi_{01, y}^{11} - \partial_{y_0} \psi_{01, x}^{11}) \\ +\Gamma (\partial_{x_1} \psi_{00, y}^{11} - \partial_{y_1} \psi_{00, x}^{11}) \end{pmatrix} \\ (\mathbf{u}^{(2)} \cdot \nabla_0) \theta^{(1)} + (\mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla_0) \theta^{(2)} + (\mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla_1) \theta^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

sustituimos las soluciones particulares a primer y segundo orden, X_1 y X_2 , en el término no lineal N_3 . A continuación se aplica la alternativa de Fredholm y deducimos la ecuación de evolución de la

amplitud a este orden. Ésta, junto con la condición resolutoria a segundo orden nos da las ecuaciones de tipo Ginzburg-Landau buscadas

$$\begin{aligned} \partial_t A_1 = & \mu A_1 + \delta \bar{A}_2 \bar{A}_3 - g_1 |A_1|^2 A_1 - (g_2 + \varpi) |A_2|^2 A_1 - (g_2 - \varpi) |A_3|^2 A_1 \\ & + \xi_0^2 \partial_{x_1}^2 A_1 + i\beta_1 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] + i\beta_2 [\bar{A}_2 \partial_{x_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{x_2} \bar{A}_2] \\ & + i\alpha_1 [\bar{A}_2 \partial_{\tau_3} \bar{A}_3 - \bar{A}_3 \partial_{\tau_2} \bar{A}_2], \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

las ecuaciones para las otras dos amplitudes se obtienen por permutaciones cíclicas. Los coeficientes vienen dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\Delta Ra}{Ra_c}, \\ \xi_0^2 &= \frac{12(k^2 + \pi^2)}{Ra_c}, \\ \delta &= -\Gamma \frac{8}{3k^2\pi} \left(k^4 + \pi^4 + \frac{\pi^2 k^2}{2} + \xi_0^2 \left(\frac{k^2}{2} - \pi^2 \right) \right), \\ g_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{k^2 + \pi^2}, \\ g_2 &= \frac{1}{Ra_c k^2} \left(\frac{a_0 k^2}{2} + \frac{3}{4} \pi \theta_{21} + \frac{\pi}{4} \theta_{22} \right), \\ \nu &= \frac{1}{Ra_c k^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \theta_{21} \zeta_0 - \frac{\sqrt{3}}{4} \theta_{22} \zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{4} k^2 a_0 \zeta_{21} - \frac{\sqrt{3}}{4} k^2 a_0 \zeta_{22} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{4(a_0 k^2 - Ra_c) \theta^\Gamma \Gamma}{3\pi a_0 k Ra_c} - \frac{8(k^2 + 4\pi^2) W^\Gamma \Gamma}{3\pi a_0 k (\pi^2 - \zeta_0^2) + k^2 (\pi^2 + \zeta_0^2)} + \frac{8\zeta^\Gamma \Gamma \zeta_0}{3\pi a_0 k} - \frac{2\zeta^\nabla \left(-1 + \frac{2\pi^2}{k^2}\right) \Gamma \zeta_0}{3\pi i k^2} - \frac{2(k^2 - 2\pi^2) W^\nabla \Gamma \zeta_0^2}{3\pi i k^2} \\ &+ \frac{2\theta^\nabla \Gamma (2k^4 + 2\pi^2 (\pi^2 - \zeta_0^2) + k^2 (\pi^2 + \zeta_0^2))}{3\pi a_0 i k^2} - \frac{2\Gamma (2\pi^2 (\pi^2 - \zeta_0^2) + k^2 (4\pi^2 + 3\zeta_0^2))}{3\pi k^3}, \\ \beta_2 &= \frac{2\zeta^\nabla (k^2 - 2\pi^2) \Gamma}{\sqrt{3} i k^2} - \frac{2(-7k^2 + 4\pi^2) \Gamma \zeta_0}{\sqrt{3} k^3} - \frac{4(k^2 - 2\pi^2) \theta^\nabla \Gamma \zeta_0}{\sqrt{3} a_0 i k^2} - \frac{2(-k^2 + 2\pi^2) W^\nabla \Gamma \zeta_0}{\sqrt{3} i k^2}, \\ \alpha_1 &= -\frac{4(a_0 k^2 - Ra_c) \theta^\Gamma \Gamma}{\sqrt{3} a_0 \pi k Ra_c} - \frac{8(k^2 + 4\pi^2) W^\Gamma \Gamma}{\sqrt{3} a_0 \pi k} + \frac{8\zeta^\Gamma \Gamma \zeta_0}{\sqrt{3} a_0 \pi k} - \frac{2\Gamma (8k^4 + k^2 \pi^2 + 2\pi^4 - 2\pi^2 \zeta_0^2)}{\sqrt{3} \pi k^3} \\ &- \frac{2W^\nabla \Gamma (2k^4 + 2\pi^2 (\pi^2 - \zeta_0^2) + k^2 (\pi^2 + \zeta_0^2))}{\sqrt{3} \pi i k^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Apéndice D

Perfiles de velocidad y temperatura del estado base de una bicapa calentada lateralmente

Las expresiones para los perfiles de velocidad $u_0^{(i)}$ y temperatura $\tau^{(i)}$ del estado base de un sistema formado por dos líquidos inmiscibles superpuestos son:

$$u_0^{(1)} = \frac{1}{48 (h^* + \mu^*) \nu^*} [-12 h^* Ma \nu^* (1 + 4z + 3z^2) + Ra\{(h^*)^3 \alpha^* \mu^* - h^* \nu^* + 4\mu^* ((h^*)^3 \alpha^* + \nu^*) z + 3 ((h^*)^3 \alpha^* \mu^* + 3h^* \nu^* + 4\mu^* \nu^*) z^2 + 8 (h^* + \mu^*) \nu z^3\}] \quad (D.1)$$

$$u_0^{(2)} = \frac{1}{48 h^* (h^* + \mu^*) \nu^*} [-12 Ma \nu^* ((h^*)^2 - 4h^* z + 3z^2) + Ra\{(h^*)^4 \alpha^* \mu^* - (h^*)^2 \nu^* + 4h^* ((h^*)^3 \alpha^* + \nu^*) z - 3 (4(h^*)^3 \alpha^* + 3(h^*)^2 \alpha^* \mu^* + \nu^*) z^2 + 8h^* \alpha^* (h^* + \mu^*) z^3\}] \quad (D.2)$$

$$\tau^{(1)} = \frac{1}{2880 (h^* + \lambda^*) (h^* + \eta^*) \nu^* \kappa^*} [60 Ma \{ (h^*)^2 \nu^* (h^* \lambda^* + \kappa^*) + h^* \lambda^* \nu^* ((h^*)^2 - \kappa^*) z - 6h^* (h^* + \lambda^*) \nu^* \kappa^* z^2 - 8h^* (h^* + \lambda^*) \nu^* \kappa^* z^3 - 3h^* (h^* + \lambda^*) \nu^* \kappa^* z^4 \} + Ra \{ h^* \nu^* (5 (h^*)^2 \lambda^* + 9h^* \kappa^* + 4\eta^* \kappa^*) - (h^*)^4 \alpha^* (4 (h^*)^2 \lambda^* + 9h^* \lambda^* \eta^* + 5\eta^* \kappa^*) - (\nu^* (-5 (h^*)^3 + 9h^* \kappa^* + 4\eta^* \kappa^*) + \alpha^* (4 (h^*)^6 + 9 (h^*)^5 \eta^* - 5 (h^*)^3 \eta^* \kappa^*)) \lambda^* z + 30h^* (h^* + \lambda^*) ((h^*)^2 \alpha^* \eta^* - \nu^*) \kappa^* z^2 + 40 (h^* + \lambda^*) \eta^* ((h^*)^3 \alpha^* + \nu^*) \kappa^* z^3 + 15 (h^* + \lambda^*) ((h^*)^3 \alpha^* \eta^* + 3h^* \nu^* + 4\eta^* \nu^*) \kappa^* z^4 + 24 (h^* + \lambda^*) (h^* + \eta^*) \nu^* \kappa^* z^5 \}] \quad (D.3)$$

$$\tau^{(2)} = \frac{-1}{2880 h^* (h^* + \lambda^*) (h^* + \eta^*) \nu^* \kappa^*} [60 Ma \{ - (h^*)^3 \nu^* (h^* \lambda^* + \kappa^*) + (h^*)^2 \nu^* (-(h^*)^2 + \kappa^*) z + 6 (h^*)^2 (h^* + \lambda^*) \nu^* z^2 - 8h^* (h^* + \lambda^*) \nu^* z^3 + 3 (h^* + \lambda^*) \nu^* z^4 + Ra (h^*)^2 (- (\nu^* (5 (h^*)^2 \lambda^* + 9h^* \kappa^* + 4\eta^* \kappa^*)) + (h^*)^3 \alpha^* (4 (h^*)^2 \lambda^* + 9h^* \lambda^* \eta^* + 5\eta^* \kappa^*)) \}] \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned}
& +h^* (\nu^* (-5 (h^*)^3 + 9 h^* \kappa^* + 4 \eta^* \kappa^*) + \alpha^* (4 (h^*)^6 + 9 (h^*)^5 \eta^* - 5 (h^*)^3 \eta^* \kappa^*)) z \\
& -30 (h^*)^2 (h^* + \lambda^*) ((h^*)^2 \alpha^* \eta^* - \nu^*) z^2 - 40 h^* (h^* + \lambda^*) ((h^*)^3 \alpha^* + \nu^*) z^3 \\
& +15 (h^* + \lambda^*) ((h^*)^2 \alpha^* (4 h^* + 3 \eta^*) + \nu^*) z^4 - 24 h^* \alpha^* (h^* + \lambda^*) (h^* + \eta^*) z^5 \}]
\end{aligned}$$

El fluido inferior (superíndice 1) está definido en el dominio $z \in [-1, 0]$ y el fluido superior (superíndice 2) en el intervalo $z \in [0, h^*]$, de acuerdo a las definiciones dadas en la sección 5.2.

Apéndice E

Inestabilidades absolutas y convectivas

Habitualmente se realizan dos tipos de análisis de estabilidad lineal. En unos casos, como en el problema de la convección de Rayleigh-Bénard o el flujo de Taylor-Couette, las perturbaciones del flujo básico evolucionan en el tiempo partiendo de una configuración espacial inicial, de forma que los números de onda k son reales mientras que la frecuencia es una función compleja de los números de onda $\omega = \omega_r(k_r, k_i) + i\omega_i(k_r, k_i)$. Los casos $\omega_i > 0$, $\omega_i = 0$ y $\omega_i < 0$, corresponden a modos temporalmente amplificados, neutros, y amortiguados, respectivamente. En otros casos, como en los problemas de capa límite o flujos con cizalladura, las perturbaciones del flujo evolucionan en el espacio desde una configuración temporal local, de forma que la frecuencia es real $\omega = \omega_r$, mientras que los números de onda son funciones complejas de la frecuencia $k = k_r(\omega_r + i\omega_i) + i k_i(\omega_r, \omega_i)$. Los casos $k_i < 0$, $k_i = 0$ y $k_i > 0$ corresponden a modos o ramas espacialmente amplificados, neutros y amortiguados, respectivamente.

Las inestabilidades de tipo absoluto han recibido mucha menos atención. En este apéndice nos ocupamos sucintamente de su descripción matemática y relación con las inestabilidades convectivas.

Seguimos a Bers [142], Huerre y Monkewitz [110], y Huerre y Rossi [143] para describir las inestabilidades absolutas y convectivas. Estos autores se basan en la respuesta a un impulso, definido por una función δ de Dirac en el espacio y el tiempo, ejercido sobre el sistema.

Si las inestabilidades crecen desde pequeñas perturbaciones, basta con determinar la respuesta al impulso espacio-temporal, es decir, la función de Green del problema. A continuación se muestran los pasos generales de la teoría analítica en el caso unidimensional para medios homogéneos en el espacio y en el tiempo, sin necesidad de hacer referencia a ningún modelo en particular.

La ecuación diferencial parcial que gobierna el problema lineal se expresa como

$$D(-i\partial/\partial x, i\partial/\partial t; R)\psi(x, t) = 0 \quad (\text{E.1})$$

Si el estado básico se perturba con una forzante $S(x, t)$, el nuevo estado satisface la ecuación diferencial forzada

$$D(-i\partial/\partial x, i\partial/\partial t; R)\psi(x, t) = S(x, t) \quad (\text{E.2})$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior se utiliza el método de las funciones de Green. La función de Green asociada con el operador lineal D satisface la ecuación

$$D(-i\partial/\partial x, i\partial/\partial t; R)G(x, t) = \delta(x)\delta(t) \quad (\text{E.3})$$

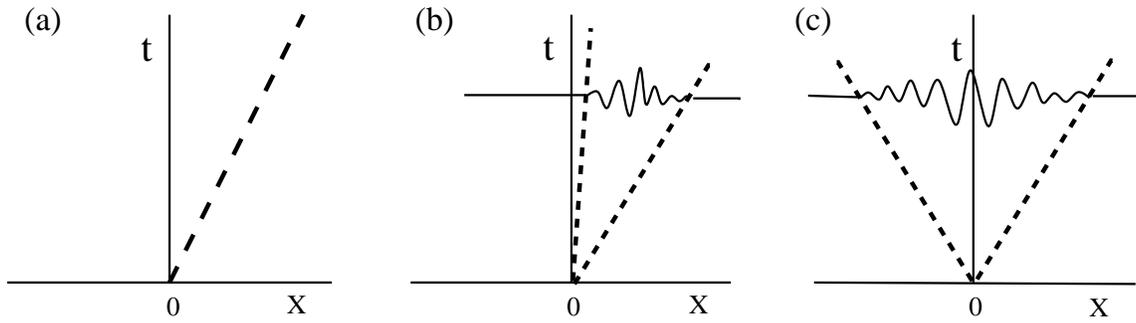


Figura E.1: Tipos de respuestas a una perturbación inicial localizada en un punto del espacio: (a) flujo estable, (b) flujo convectivamente inestable y (c) flujo absolutamente inestable.

con las correspondientes condiciones de contorno. La respuesta $\psi(x, t)$ a la forzante $S(x, t)$ viene dada por la convolución de $S(x, t)$ y la función de Green $G(x, t)$. Como se muestra en la Fig. E.1, hay tres tipos posibles de respuestas a un estado inicial localizado.

Si la amplitud decae asintóticamente con el tiempo en el dominio espacial entero, la función de Green asociada satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0 \quad \text{a lo largo de todos los rayos } x/t = \text{const.} \quad (\text{E.4})$$

entonces el estado base estudiado es *linealmente estable*. Por otra parte, cuando la función de Green verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty \quad \text{a lo largo de al menos un rayo } x/t = \text{const.} \quad (\text{E.5})$$

el estado base es *linealmente inestable*. En esta situación se pueden distinguir dos subtipos de inestabilidades. Si la perturbación inicial es arrastrada fuera de la posición de la fuente, el estado base es *convectivamente inestable*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0 \quad \text{a lo largo del rayo } x/t = 0. \quad (\text{E.6})$$

si la perturbación inicial es amplificada en la posición de la fuente y se extiende al sistema entero, la inestabilidad es *absolutamente inestable*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty \quad \text{a lo largo del rayo } x/t = 0. \quad (\text{E.7})$$

De esta forma, en los sistemas convectivamente inestables las perturbaciones que se amplifican sobre cualquier punto son arrastradas alejándose de él, con lo que la respuesta sobre cualquier punto acaba decreciendo y finalmente desapareciendo. Si la inestabilidad es de tipo absoluto, siempre habrá alguna perturbación que aumenta en magnitud en cualquier punto del espacio.

Es necesario establecer un criterio para discriminar entre flujos estables, convectivamente inestables, y absolutamente inestables. Para ello buscamos soluciones particulares de la ecuación (E.1) en forma de modos normales $\psi(x, t) = A \exp i(kx - \omega t)$. Introduciendo esta expresión en (E.1) se obtiene una ecuación algebraica en k y ω que es la relación de dispersión $D(k, \omega; R) = 0$. Ahora es necesario

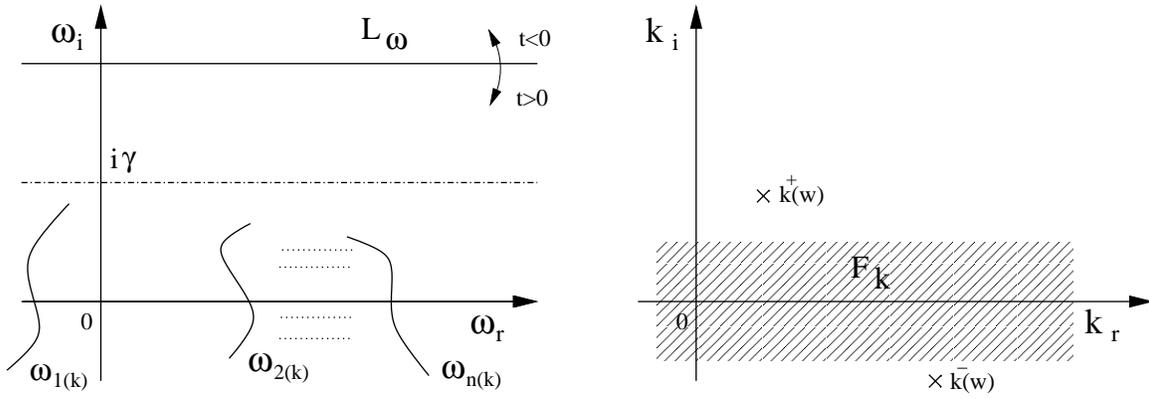


Figura E.2: Contornos de integración en el plano complejo de ω (izquierda) y de k (derecha). Las curvas en el plano de ω representan los modos temporales cuando k viaja a lo largo del contorno F_k .

hallar los ceros de esta ecuación, que se pueden encontrar tanto en forma de modos temporales como de ramas espaciales.

Para ver la relevancia de las ramas espaciales y temporales, veamos como surgen de la solución general de la Ec. (E.2). El campo de perturbaciones $\psi(x, t)$ se puede expresar como una suma de modos de Fourier

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{L_\omega} \int_{F_k} \psi(k, \omega) \exp[i(kx - \omega t)] dk d\omega \quad (\text{E.8})$$

Los contornos de integración son la trayectoria F_k en el plano complejo (k_r, k_i) y L_ω en el plano (ω_r, ω_i) , como se esquematiza en la Fig. E.2. Para garantizar el principio de causalidad ha de verificarse la condición $\psi(x, t) = 0$ para $t \leq 0$. Se supone que la solución $\psi(x, t)$ decae exponencialmente cuando $x \rightarrow \pm\infty$, de forma que la transformada de Fourier

$$\psi(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \exp(-ikx) dx \quad (\text{E.9})$$

esté bien definida en una banda del plano complejo k que incluye el eje real. Se escoge el contorno F_k en este dominio para asegurar la convergencia (ver la Fig. E.2). Como contorno de integración en el plano complejo ω , se toma una línea paralela a ω_r situada por encima de las tasas de crecimiento de todas las posibles fluctuaciones, que se suponen acotadas por un límite superior γ tal que $|\psi(x, t)| \leq K_0 \exp(\gamma t)$. γ debe ser mayor o igual que las tasas de crecimiento de todos los modos temporales. Así, la integral $\psi(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \exp(i\omega t) dt$ está bien definida para $t \rightarrow \infty$, y para $t \rightarrow -\infty$ el principio de causalidad asegura que $\psi(x, t) = 0$ para $t < 0$.

La ecuación diferencial parcial E.2 se reduce en el espacio de Fourier a la ecuación algebraica

$$D(k, \omega) \psi(k, \omega) = S(k, \omega) \quad (\text{E.10})$$

donde $S(k, \omega)$ es la transformada de Fourier de $S(x, t)$. Por tanto, en el espacio de Fourier tenemos que $\psi(k, \omega) = \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)}$. Volviendo al espacio físico con la transformada de Fourier inversa, el campo de perturbaciones linealizado viene dado por

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{L_\omega} \int_{F_k} \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)} \exp[i(kx - \omega t)] dk d\omega \quad (\text{E.11})$$

las únicas posibles singularidades del integrando de (E.11) son los polos de $\psi(x, t)$, es decir las soluciones de la relación de dispersión $D(k, \omega) = 0$. Por la elección del contorno de integración, F_k yace sobre el eje real y las singularidades del integrando coinciden con los modos temporales $\omega_j(k)$. Como vimos, el contorno L_ω está situado sobre las ramas $\omega_j(k)$ cuando k viaja a través de F_k . Si se supone que los polos son simples, el teorema de residuos asegura que

$$\psi(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(k, \omega_j(k)) \exp[i(kx - \omega_j(k)t)]}{\partial D / \partial \omega(k, \omega_j(k))} dk \quad (\text{E.12})$$

La expresión (E.12) está formada por un paquete de ondas compuesto por modos temporales evolucionando libremente, generados por la forzante $S(x, t)$. Según (E.12), el menor límite superior γ está dado por la máxima tasa de crecimiento temporal

$$\gamma = \omega_{i, \max} = \max\{\omega_{j,i}(k)\}, \text{ para todos los } k \text{ reales e índices } j \quad (\text{E.13})$$

De la expresión (E.12), se deducen los siguientes criterios de evolución temporal del campo de perturbaciones $\psi(x, t)$:

- (1) Si $\omega_{i, \max} < 0$ el estado base es linealmente estable.
- (2) Si $\omega_{i, \max} > 0$ el estado base es linealmente inestable.
- (3) Si $\omega_{i, \max} = 0$ el estado base es neutro.

Las ramas temporales y espaciales se han definido para valores reales de k y ω respectivamente. Se pueden introducir modos espaciales y temporales generalizados, como soluciones de la relación de dispersión $D(k, \omega) = 0$ en que los contornos de integración no yacen sobre los ejes reales.

Supongamos que L_ω está situado sobre $\gamma = \omega_{i, \max}$ en el plano complejo ω . Una importante propiedad de los modos espaciales generalizados, es que pueden ser divididos en dos conjuntos desconectados $k^+(\omega)$ y $k^-(\omega)$ localizados respectivamente sobre y bajo el eje k_r en el plano complejo k . Además, la separación de estos conjuntos se preserva cuando el contorno de integración L_ω se desplaza gradualmente hacia valores menores de ω_i . Siempre es posible deformar el contorno F_k de manera que sigan desconectadas las dos ramas $k^+(\omega)$ y $k^-(\omega)$. Si en el proceso de deformación los dos conjuntos $k^+(\omega)$ y $k^-(\omega)$ llegan a coincidir en un punto k_0 del espacio complejo k se producirá un pinzamiento (o punto cuspide) en el contorno F_k de las dos ramas espaciales generalizadas (ver la Fig. E.3). Denotaremos por ω_0 el valor $\omega(k_0)$.

Respuesta asintótica a un impulso. El proceso de pinzamiento está relacionado con la naturaleza convectiva/absoluta de la inestabilidad, para verlo debemos examinar el comportamiento asintótico de la respuesta $G(x, t)$ al impulso $S(x, t) = \delta(x)\delta(t)$. Según la ecuación (E.12), tenemos

$$G(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{F_k} \frac{\exp[i(kx - \omega(k)t)]}{\partial D / \partial \omega(k, \omega(k))} dk \quad (\text{E.14})$$

la función de Green se evalúa ahora en un lugar fijo x cuando $t \rightarrow \infty$. Supongamos que F_k en (E.14) sea uno de los contornos con pinzamiento F_p . Por definición, el punto de pinzamiento k_0 es un cero

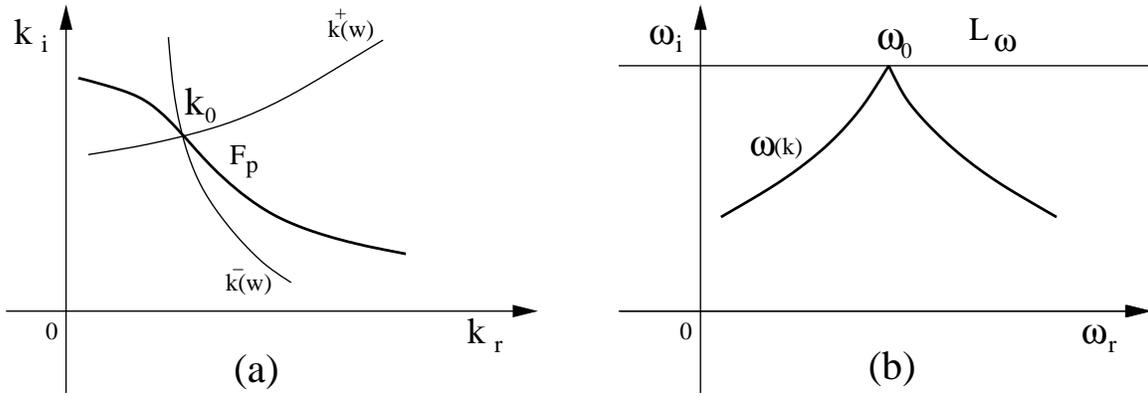


Figura E.3: Contorno de pinzamiento F_p en el plano complejo de k (izquierda) y modos temporales asociados en el plano complejo de ω . Los puntos de pinzamiento (k_0, ω_0) son el inicio de la inestabilidad absoluta.

doble de la relación de dispersión $D(k, \omega) = 0$ en $\omega = \omega_0$, lo cual implica

$$D(k_0, \omega_0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial D}{\partial k}(k_0, \omega_0) = 0 \quad (\text{E.15})$$

o equivalentemente

$$\omega_0 = \omega(k_0) \quad y \quad \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0 \quad (\text{E.16})$$

La expresión anterior puede servir como método analítico para buscar la transición convectiva/absoluta, aunque puede proporcionar valores espurios (k_0, ω_0) . Para garantizar que los valores obtenidos son correctos sólo se debe considerar el número de onda complejo k_0 con mayor tasa de crecimiento $\omega_{0,i}$, ya que corresponde a un punto de pinzamiento para las dos ramas espaciales k^+ y k^- .

Por construcción, los modos temporales $\omega(k)$ yacen bajo L_ω (definida como $\omega = i\omega_{0,i}$) cuando k se mueve a lo largo de F_p (Fig. E.3), y tocan L_ω en un solo punto ω_0 . El punto k_0 es, por tanto, un máximo global de la función $\omega_i(k)$ cuando k viaja a lo largo de F_p . Se demuestra [143] que k_0 es un punto de silla. La respuesta asintótica a un impulso a lo largo de un rayo $x/t = 0$ viene dada por la expresión (después de algunos cálculos):

$$G(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left[\frac{i\pi}{4} + i(kx - \omega(k)t)\right]}{\partial D / \partial \omega(k_0, \omega_0)} \left(t \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(k_0)\right)^{-1/2} \quad (\text{E.17})$$

La respuesta al impulso esta dominada por el número de onda absoluto complejo k_0 y por la frecuencia absoluta compleja ω_0 de velocidad de grupo cero en el sistema de referencia del laboratorio (el rayo $x/t = 0$). La tasa de crecimiento absoluta $\omega_{0,i}$ caracteriza el crecimiento asintótico de las perturbaciones en el sistema de referencia del laboratorio. La evolución temporal de $G(x, t)$ nos proporciona finalmente un criterio para distinguir las inestabilidades absolutas de las convectivas:

(1) Si el estado base es inestable ($\omega_{i,max} > 0$), y $\omega_{0,i} < 0$, el sistema retornará al estado inicial de reposo en cualquier punto fijo con respecto al sistema de referencia del laboratorio. Se da cuando el paquete de ondas inestable es arrastrado mientras incrementa su amplitud. La inestabilidad es

convectiva.

(2) Si el estado base es inestable ($\omega_{i,max} > 0$), y $\omega_{0,i} > 0$, las perturbaciones crecerán exponencialmente en el tiempo en cualquier punto fijo con respecto al sistema de referencia del laboratorio. La inestabilidad es *absoluta*.

Bibliografía

- [1] M.C. Cross y P.C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 5:851–1112, 1993.
- [2] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. Gén. Sci. Pures Appl.*, 11:1261–1271, 1900.
- [3] Lord Rayleigh. On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.*, 32:529–546, 1916.
- [4] E. Bodenschatz, W. Pesch y G. Ahlers. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 32:709–778, 2000.
- [5] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. The Clarendon Press, Oxford, 1961.
- [6] G. Veronis. Cellular convection with finite amplitude in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 5:401–435, 1959.
- [7] G. Küppers y D. Lortz. Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer. *J. Fluid Mech.*, 35:609–620, 1969.
- [8] F.H. Busse y K.E. Heikes. Convection in rotating layer: A simple case of turbulence. *Science*, 208:173–175, 1980.
- [9] Y. Tu y M.C. Cross. Chaotic domain structure in rotating convection. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2515–2518, 1992.
- [10] R. Ecke, Y. Hu, R. Mainieri y G. Ahlers. Excitation of spirals and chiral symmetry breaking in Rayleigh-Bénard convection. *Science*, 269:1704–1707, 1995.
- [11] K.M.S. Bajaj, J. Liu, B. Naberhuis y G. Ahlers. Square patterns in Rayleigh-Bénard convection with rotation about a vertical axis. *Phys. Rev. Lett.*, 81:806–809, 1998.
- [12] A. M. Soward. Bifurcation and stability of finite amplitude convection in a rotating layer. *Physica D*, 14:227–241, 1985.
- [13] J. Millán-Rodríguez, C. Pérez-García, M. Bestehorn, M. Fantz y R. Friedrich. Pattern formation in convection of rotating fluids with broken vertical symmetry. *Phys. Rev. A*, 46:4729–4735, 1992.

- [14] H. Riecke, B. Echebarria, V. Moroz y F. Sain. Instabilities and defect chaos in models for rotating non-Boussinesq convection. *Proceedings of the 15th Symposium on Energy Engineering Sciences*, 2000.
- [15] J.R.A. Pearson. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.*, 4:489–500, 1958.
- [16] G. Gouesbet, C. Rozé y S. Meunier. Instabilities by local heating below an interface. *J. Non-Equil. Thermodyn.*, 25:337–379, 2000.
- [17] M.K. Smith y S.H. Davis. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layer. Part 1. Convective instabilities. *J. Fluid Mech.*, 132:119–144, 1983.
- [18] F. Daviaud y J.M. Vince. Traveling waves in a fluid layer subjected to a horizontal temperature gradient. *Phys. Rev. E*, 48:4432–4436, 1993.
- [19] F.M. Richter y C.E. Johnson. Stability of a chemically layered mantle. *J. Geophys. Res.*, 79:1635–1639, 1974.
- [20] D. Villers y J.K. Platten. Thermal convection in superposed immiscible liquid layers. *Appl. Sc. Res.*, 45:145–152, 1988.
- [21] T. Doi y J.N. Koster. Thermocapillary convection in two immiscible liquid layers with free surface. *Phys. Fluids A*, 5:1914–1927, 1993.
- [22] Q.S. Liu, B. Roux y M.G. Velarde. Thermocapillary convection in two-layer systems. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 41:1499–1511, 1998.
- [23] Y. Hu, W. Pesch, G. Ahlers y R. Ecke. Convection under rotation for Prandtl number near 1: Küppers-Lortz instability. *Phys. Rev. E*, 58:5821–5833, 1998.
- [24] L.A. Segel. The structure of non-linear cellular solutions to the Boussinesq equations. *J. Fluid Mech.*, 21:345–358, 1965.
- [25] E. Bodenschatz, J.R. de Bruyn, G. Ahlers y D.S. Cannell. Transition between patterns in thermal convection. *Phys. Rev. Lett.*, 67:3078–3081, 1991.
- [26] E. Pampaloni, C. Pérez-García, L. Albavetti y S. Ciliberto. Transition from hexagons to rolls in convection in fluids under non-Boussinesq conditions. *J. Fluid Mech.*, 234:393–416, 1992.
- [27] G. Ahlers. Effect of departures from the Oberbeck-Boussinesq approximation on the heat transport of horizontal convecting fluid layers. *J. Fluid Mech.*, 98:137–148, 1980.
- [28] D.S. Oliver y J.R. Booker. Planform of convection with strongly temperature-dependent viscosity. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*, 27:73–85, 1983.
- [29] S. Ciliberto, P. Coulet, J. Lega, E. Pampaloni y C. Pérez-García. Defects in roll-hexagon competition. *Phys. Rev. Lett.*, 65:2370–2373, 1990.
- [30] M. Assenheimer y V. Steinberg. Transition between spiral to target states in Rayleigh-Benard convection. *Nature*, 367:345–347, 1994.

- [31] F.H. Busse. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle. *J. Fluid Mech.*, 30:625–649, 1967.
- [32] A. Tschammer. *Nichtlineare aspekte der Rayleigh-Bénard konvektion in isotropen und anisotropen fluiden*. Tesis Doctoral, Universität Bayreuth, 1997.
- [33] A. Graham. Shear pattern in an unstable layer of air. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 232:285–296, 1933.
- [34] E. Palm. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection. *J. Fluid Mech.*, 8:183–192, 1960.
- [35] E. Palm, T. Ellingsen y B. Gjevik. On the occurrence of cellular motion in Bénard convection. *J. Fluid Mech.*, 30:651–661, 1967.
- [36] H. Haken. *Advanced Synergetics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [37] J. Guckenheimer y P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vectors Fields*. Springer, New York, 1988.
- [38] W.S. Edwards y S. Fauve. Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. *J. Fluid Mech.*, 278:123–148, 1994.
- [39] P. De Kepper, V. Castets, E. Dulos y J. Boissonade. Turing-type chemical patterns in the chlorite-iodide-malonic acid reaction. *Physica D*, 49:161–169, 1991.
- [40] F. Melo, P. Umbanhowar y H. Swinney. Hexagons, kinks and disorder in oscillated granular layers. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3838–3841, 1995.
- [41] G. Gunaratne, Q. Ouyang y H.L. Swinney. Pattern formation in the presence of symmetries. *Phys. Rev. E*, 50:2802–2820, 1994.
- [42] E.A. Kuznetsov, A.A. Nepomnyashchy y L.M. Pismen. New amplitude equation for Boussinesq convection and nonequilateral hexagonal patterns. *Phys. Lett. A*, 205:261–265, 1995.
- [43] J. Bragard y M. Velarde. Bénard-Marangoni convection: Planforms and related theoretical predictions. *J. Fluid Mech.*, 368:165–194, 1999.
- [44] J. Bragard. *Estructuras convectivas y ondas inducidas por gradientes térmicos en capas fluidas*. Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1996.
- [45] B. Echebarria y Pérez-García. Phase instabilities in hexagonal patterns. *Europhys. Lett.*, 43:35–40, 1998.
- [46] A.C. Newell y J.A. Whitehead. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38:279–303, 1969.
- [47] S. Zalesky. *Stabilité et modes de diffusion des structures hors d'équilibre*. Tesis Doctoral, Université de Paris VI, 1980.

- [48] L.A. Segel. The nonlinear interaction of a finite number of disturbances to a layer of fluid heated from below. *J. Fluid Mech.*, 21:359–384, 1965.
- [49] Y. Hu, R. Ecke y G. Ahlers. Time and length scales in rotating Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 74:5040–5043, 1995.
- [50] F. Zhong y R.E. Ecke. Pattern dynamics and heat transport in rotating Rayleigh-Bénard convection. *Chaos*, 2:163–171, 1992.
- [51] M.C. Cross y P.C. Hohenberg. Spatiotemporal chaos: A perspective. *Science*, 263:1569–1570, 1994.
- [52] M. Fantz, R. Friedrich, M. Bestehorn y H. Haken. Pattern formation in rotating Bénard convection. *Physica D*, 61:147–154, 1992.
- [53] B. Echebarria y H. Riecke. Instabilities of hexagon patterns in the presence of rotation. *Physica D*, 144:124–141, 2000.
- [54] B. Echebarria y H. Riecke. Instabilities of hexagonal patterns with broken chiral symmetry. *Physica D*, 139:97–108, 2000.
- [55] Y. Hu, R. Ecke y G. Ahlers. Convection under rotation for Prandtl numbers near one: Part I. Linear stability, wavenumber selection, and pattern dynamics. *Phys. Rev. E*, 55:6928–6949, 1997.
- [56] K.E. Heikes y F.H. Busse. Weakly nonlinear turbulence in a rotating convection layer. *Ann. NY Acad. Sci.*, 357:28–36, 1980.
- [57] S. Madruga, C. Pérez-García y G. Lebon. Rotating convection in fluids with a temperature-dependent viscosity. *Enviado a Phys. Fluids*.
- [58] S. Madruga y C. Pérez-García. Instabilities within a model for rotating convection. *Entropie*, 239:41–44, 2002.
- [59] S. Madruga y C. Pérez-García. Hexagonal patterns in a model for rotating convection. *Int. J. Bif. Chaos*, en prensa.
- [60] L.E. Scriven y C.V. Sterling. The Marangoni effects. *Nature*, 187:186–188, 1960.
- [61] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. *Ann. Chim. Phys.*, 7:23–62, 1900.
- [62] H.C. Gatos. Semiconductor crystal growth and segregation problems on earth and in space. En *Materials processing in the reduced gravity environment of Space*, editor, G.E. Rindone, páginas 355–371. Elsevier, Amsterdam, 1982.
- [63] D. Schwabe. Marangoni effects in crystal growth metals. *Phys. Chem. Hydrodyn.*, 2:263–280, 1981.

- [64] C.H. Chun y W. Wuest. Experiments on the transition from the steady to the oscillatory convection of a floating zone under reduced gravity effect. *Acta Astronaut.*, 6:1073–1082, 1979.
- [65] F. Preisser, D. Schabe y A. Scharmann. Steady and oscillatory thermocapillary convection in liquid columns with free cylindrical surface. *J. Fluid Mech.*, 26:545–567, 1983.
- [66] D. Schwabe, R. Velten y A. Scharmann. The instability of surface tension driven flow in models for floating zones under normal and reduced gravity. *J. Cryst. Growth*, 99:1258–1264, 1990.
- [67] V. Petrov, M.F. Schatz, K.A. Muehlner, S.J. VanHook y W.D. McCormick. Nonlinear control of remote unstable states in a liquid bridge convection. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3779–3782, 1996.
- [68] V. Petrov, A. Haaning, K.A. Muehlner, S.J. VanHook y H.L. Swinney. Model-independent nonlinear control algorithm with application to a liquid bridge experiment. *Phys. Rev. E*, 58:427–433, 1998.
- [69] R. Velten, D. Schwabe y A. Scharmann. The periodic instability of thermocapillary convection in cylindrical liquid bridges. *Phys. Fluids A*, 3:267–279, 1991.
- [70] S. Frank y D. Schwabe. Temporal and spatial elements of thermocapillary convection in floating zones. *Exp. Fluids*, 23:234–251, 1997.
- [71] A. Prakash y J.N. Koster. Steady thermocapillary convection in a GaAs melt encapsulated by molten B_2O_3 . *J. Mat. Syn. and Proc.*, 4:43–49, 1996.
- [72] D. Schwabe, U. Möller, J. Schneider y A. Scharmann. Instabilities of shallow dynamic thermocapillary liquid bridges. *Phys. Fluids A*, 4:2368–2381, 1992.
- [73] A.B. Ezersky, A. Garcimartín, H.L. Mancini y C. Pérez-García. Spatiotemporal structure of hydrothermal waves in Marangoni convection. *Phys. Rev. E*, 48:4414–4422, 1993.
- [74] Y. Kamotani, J.H. Lee y S. Ostrach. An experimental study of oscillatory thermocapillary convection in cylindrical containers. *Phys. Fluids A*, 4:955–962, 1992.
- [75] S. Hoyas, H. Herrero y A.M. Mancho. Bifurcation diversity of dynamic thermocapillary liquid layers. *Phys. Rev. E*, 66:057301, 2002.
- [76] P. Gillon y G.M. Homsy. Combined thermocapillary-buoyancy convection in a cavity: An experimental study. *Phys. Fluids*, 8:2953–2963, 1996.
- [77] M.G. Braunsfurth y G.M. Homsy. Combined thermocapillary-buoyancy convection in a cavity. Part II. An experimental study. *Phys. Fluids*, 9:1277–86, 1997.
- [78] D. Villers y J.K. Platten. Coupled buoyancy and Marangoni convection in acetone: Experiments and comparison with numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 234:487–510, 1992.
- [79] C. De Saedeleer, A. Garcimartín, G. Chavepeyer y J.K. Platten. The instability of a liquid layer heated from the side when the upper surface is open to air. *Phys. Fluids*, 8:670–76, 1996.

- [80] R.J. Riley y G.P. Neitzel. Instability of thermocapillary-buoyancy convection in shallow layers. Part 1. Characterization of steady and oscillatory instabilities. *J. Fluid Mech.*, 359:143–164, 1998.
- [81] C.A. Carter y J.M. Harris. Comparisons of models describing the thermal lens effect. *Appl. Optics*, 23:476–481, 1984.
- [82] G. Refai y M.M. Yovanovich. Numerical study of natural convection from discrete heat sources in a vertical square enclosure. *J. Thermophys.*, 1992:121–127, 1992.
- [83] G. Gouesbet, M. Rhazi y M.E. Weill. New heartbeat phenomenon and the concept of 2D-turbulence. *Appl. Optics*, 22:304–309, 1983.
- [84] S. Meunier, B. Maheu y G. Gouesbet. Combined approaches and characterization of experimental chaotic attractors in thermal lensing. *Physica D*, 58:423–440, 1992.
- [85] M.E. Weill, M. Rhazi y G. Gouesbet. Experimental investigation of oscillatory phenomena produced by a hot wire located near and below a free surface. *J. Phys. France*, 46:1501–1506, 1985.
- [86] C. Rozé, G. Gouesbet y R. Darrigo. Oscillatory instabilities produced by heat from a temperature-controlled hot-wire below an interface. *J. Fluid Mech.*, 250:253–276, 1993.
- [87] G. Gouesbet. New presentation of experimental results for overstability phenomena produced by a hot-wire located near and below a free surface. *Phys. Chem. Hydrodyn.*, 8(3):349–352, 1987.
- [88] G. Gouesbet y J. Maquet. A simple model to understand overstability in thermal lensing. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16:133–141, 1989.
- [89] M.K. Smith. Instability mechanisms in dynamic thermocapillary liquid layers. *Phys. Fluids*, 29:3182–3186, 1986.
- [90] P. Laure y B. Roux. Linear and nonlinear analysis of the Hadley circulation. *J. Cryst. Growth*, 97:226–234, 1989.
- [91] G.Z. Gershuni, P. Laure, V.M. Myznikov, B. Roux y E.M. Zhukhovitsky. On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers. *Micrograv. Q.*, 2:141–152, 1992.
- [92] P. M. Parmentier, V.C. Regnier y G. Lebon. Buoyant-thermocapillary instabilities in medium-Prandtl fluid layers subjected to a horizontal temperature gradient. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 6:2417–2427, 1993.
- [93] J.F. Mercier y C. Normand. Buoyant-thermocapillary instabilities of differentially heated liquid layers. *Phys. Fluids*, 8:1433–1445, 1996.
- [94] J. Priede y G. Gerbeth. Convective, absolute, and global instabilities of thermocapillary-buoyancy convection in extended layers. *J. Fluid Mech.*, 56:4187–4199, 1997.

- [95] M.K. Smith. The nonlinear stability of dynamic thermocapillary liquid layers. *J. Fluid Mech.*, 194:391–415, 1988.
- [96] H. Ben Hadid y B. Roux. Thermocapillary convection in long layers of low-Prandtl-number melts subjected to a horizontal temperature gradient. *J. Fluid Mech.*, 221:77–103, 1990.
- [97] H. Ben Hadid y B. Roux. Buoyancy and thermocapillary-driven flows in differentially heated cavities for low-Prandtl-number fluids. *J. Fluid Mech.*, 235:1–36, 1992.
- [98] M.K. Smith y S.H. Davis. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layer. Part 2. Surface-wave instabilities. *J. Fluid Mech.*, 132:145–162, 1983.
- [99] S. Benz, P. Hintz, R.J. Riley y G.P. Neitzel. Instability of thermocapillary-buoyancy convection in shallow layers. Part 2. Suppression of hydrothermal waves. *J. Fluid Mech.*, 359:165–180, 1998.
- [100] J. Burguete, N. Mukolobwiz, F. Daviaud, N. Garnier y A. Chiffaudel. Buoyant-thermocapillary instabilities in an extended liquid layer subjected to a horizontal temperature gradient. *Phys. Fluids*, 13:2773–2787, 2001.
- [101] M.A. Pelacho y J. Burguete. Temperature oscillations of hydrothermal waves in thermocapillary-buoyancy convection. *Phys. Rev. E*, 59:835–840, 1999.
- [102] M.A. Pelacho, A. Garcimartín y J. Burguete. Local Marangoni number at the onset of hydrothermal waves. *Phys. Rev. E*, 62:477–483, 2000.
- [103] M.A. Pelacho. *Ondas hidrotermales en sistemas confinados*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, 2000.
- [104] C. Normand, Y. Pomeau y M. Velarde. Convective instability: A physicist's approach. *Rev. Mod. Phys.*, 49:581–624, 1977.
- [105] P.C. Dauby, P. Parmentier, G. Lebon y M. Grmela. Coupled buoyancy and thermocapillary convection in a viscoelastic Maxwell fluid. *J. Phys. Cond. Matt.*, 5:4343–4352, 1993.
- [106] G. Lebon, P.M. Parmentier, O. Teller y P.C. Dauby. Bénard-Marangoni instability in a viscoelastic Jeffreys fluid layer. *Rheol. Acta*, 33:257–266, 1994.
- [107] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni y T.A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [108] P. Laure y I. Mutabazi. Nonlinear analysis of instability modes in the Taylor-Dean system. *Phys. Fluids*, 6:3630–3642, 1994.
- [109] P. Bot, O. Cadot y I. Mutabazi. Secondary instability mode of a roll pattern and transition to spatiotemporal chaos in the Taylor-Dean system. *Phys. Rev. E*, 58:3089–3097, 1994.
- [110] P. Huerre y P.A. Monkewitz. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22:473–537, 1990.

- [111] N. Garnier. *Ondes non-linéaires a une et deux dimensions dans une mince couche de fluide*. Tesis Doctoral, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2000.
- [112] N. Garnier, A. Chiffaudel, F. Daviaud y A. Prigent. Nonlinear dynamics of waves and modulated waves in 1D thermocapillary flows I: General presentation and periodic solutions; II: Convective/absolute transition. *Physica D*, 174:1–29, 1987.
- [113] S. Madruga y C. Pérez-García. Thermocapillary instabilities in laterally heated liquid layers. En *Compte-rendus de la 5^e Rencontre du Non-Linéaire*, editores, Y. Pomeau y R. Ribotta, páginas 135-140. Non Linéaire Publications, Paris, 2002.
- [114] R.W. Zeren y W.C. Reynolds. Thermal instabilities in two-fluid horizontal layers. *J. Fluid Mech.*, 53:305–327, 1972.
- [115] A. Juel, J.M. Burgess, W.D. McCormick, J.B. Swift y H.L. Swinney. Surface tension-driven convection patterns in two liquid layers. *Physica D*, 143:169–186, 2000.
- [116] W.A. Tokaruk, T.C.A. Molteno y S.W. Morris. Bénard-Marangoni convection in two layered liquids. *Phys. Rev. Lett.*, 84:3590–3593, 2000.
- [117] G.Z. Gershuni y E.M. Zhukhovitskii. *Convective Stability in Incompressible Fluids*. Keter, Jerusalem, 1976.
- [118] F.H. Busse y G. Sommermann. Double-layer convection: A brief review and some recent experimental results. En *Advances in Multi-Fluid Flows.*, editores, Y.Y. Renardy, A.V. Coward, D. Papageorgiou y S.M. Sun, páginas 33–41. SIAM, 1996.
- [119] K. Fujimura y Y. Renardy. The 2:1 steady/Hopf mode interaction in the two-layer Bénard problem. *Physica D*, 85:25–65, 1995.
- [120] D. Johnson y R. Narayanan. Geometric effects on convective coupling and interfacial structures in bilayer convection. *Phys. Rev. E*, 56:5462–5472, 1997.
- [121] Y.Y. Renardy y C.G. Stoltz. Time-dependent pattern formation for convection in two layers of immiscible liquids. *Int. J. Mult. Flow*, 26:1875–1889, 2000.
- [122] A. Engel y J.B. Swift. Planform selection in two-layer Bénard-Marangoni convection. *Phys. Rev. E.*, 62:6540–6552, 2000.
- [123] P. Cardin y H.C. Nataf. Nonlinear dynamical coupling observed near the threshold of convection in a two-layer system. *Europhys. Lett.*, 14:655–660, 1991.
- [124] R. Cardin, H.C. Nataf y P. Dewost. Thermal coupling in layered convection: Evidence for an interface viscosity control from mechanical experiments and marginal stability analysis. *J. Phys. II*, 1:599–622, 1991.
- [125] H.C. Nataf, S. Moreno y P. Cardin. What is responsible for thermal coupling in layered convection ?. *J. Phys. France*, 49:1707–1714, 1988.

- [126] D. Villers y J.K. Platten. Influence of interfacial tension gradients on thermal convection in two superposed immiscible liquid layers. *Appl. Sc. Res.*, 47:177–191, 1990.
- [127] J.N. Koster, A. Prakash, D. Fujita y T. Doi. Bénard and Marangoni convection in multiple liquid layers. En *Proceedings of the VIIIth European Symposium on Materials and Fluid Sciences in Microgravity*, páginas 221–226. ESA SP-33, 1992.
- [128] H. Azuma, S. Yoshihara, M. Ohnishi y T. Doi. Upper layer flow phenomena in two immiscible liquid layers subject to a horizontal temperature gradient. En *Microgravity Science Technology*, páginas 154–155. Hanser Publisher, 1991.
- [129] L.G. Napolitano, A. Viviani y R. Savino. Natural and Marangoni convection in two superposed immiscible fluid layers with horizontal heating. En *Proceedings of the First European Symposium on Fluids in Space*, páginas 79–118. ESA SP-353, 1992.
- [130] C.H. Wang, M. Sen y P. Vasseur. Analytical investigation of Bénard-Marangoni convection heat transfer in a shallow cavity filled with two immiscible fluids. *Appl. Sc. Res.*, 48:5–53, 1991.
- [131] Q.S. Liu, G. Chen y G. Roux. Thermogravitational and thermocapillary convection in a cavity containing two superposed immiscible liquid layers. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 36:101–117, 1993.
- [132] E. Crespo, G.P. Extremet y R.L. Sani. Thermocapillary convection in a two-layer fluid system with flat interface. *Advances in Space Research*, 11:129–132, 1991.
- [133] J. Liu, J. Sun Z. Saghir y B. Roux. Maximum stable zone length in floating zone melting of *GaAs* an effect of liquid encapsulation. *43rd Congress of the international astronautical federation. Report IAF-92-0910*, 1992.
- [134] D. Johnson y R. Narayanan. A tutorial on the Rayleigh-Marangoni-Bénard problem with multiple layers. *Chaos*, 9:124–153, 1999.
- [135] J.K. Platten y D. Villers. On thermocapillary flows in containers with differentially heated side walls. En *Physicochemical Hydrodynamics: Interfacial phenomena*, editor, M.G. Velarde, páginas 311–366. NATO-ASI series, 1998.
- [136] G. Carneiro y C. Pérez-García. Linear stability analysis of Bénard-Marangoni convection in fluids with a deformable free surface. *Phys. Fluids A*, 3:292–298, 1991.
- [137] V.C. Regnier, P.C. Dauby y G. Lebon. Linear and nonlinear Rayleigh-Bénard-Marangoni instability with surface deformations. *Phys. Fluids*, 12:2787–2799, 2000.
- [138] T.A. Campbell y J.N. Koster. Modeling of liquid encapsulated gallium melts. *Acta Astronaut.*, 12:805–812, 1995.
- [139] D.D. Joseph y Y.Y. Renardy. *Fundamentals of Two-Fluids Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [140] S. Madruga, C. Pérez-García y G. Lebon. Instabilities in two-liquid layers subject to a horizontal temperature gradient. *Enviado a Phys. Fluids*.

- [141] S. Madruga, C. Pérez-García y G. Lebon. Convective instabilities in two superposed horizontal liquid layers heated laterally. *Aceptado en Phys. Rev. E*.
- [142] A. Bers. Space-time evolution of plasma instabilities-absolute and convective. En M.N. Rosenbluth y R.Z. Sagdeev, editor, *Handbook of plasma physics*, páginas 451–520. North-Holland, 1983.
- [143] P. Huerre y M. Rossi. Hydrodynamic instabilities in open flows. En Godrèche y Manneville, editor, *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*, páginas 81–294. Cambridge University Press, 1998.
- [144] S. Madruga, S. Boccaletti y M.A. Matías. Effect of a variable delay in delayed dynamical systems. *Int. J. Bif. Chaos*, 11:2875–2880, 2001.
- [145] S. Madruga, S. Boccaletti y M.A. Matías. Delayed dynamical systems with variable delay. En *Space-Time Chaos: Characterization, Control and Synchronization*, editores, S. Boccaletti, J. Burguete, W. González-Vinas y H.L. Mancini, páginas 113–122. World Scientific, 2001.

Summary of the work

This thesis is a contribution to the theoretical study of thermoconvective instabilities in liquid layers. The first part is devoted to stationary and oscillatory patterns and the second one mainly to propagative waves.

In part I convection under rotation in a fluid with temperature-dependent properties (non-Boussinesq), high Prandtl number and idealized boundary conditions is investigated. We perform a weakly nonlinear analysis to find out explicitly the coefficients of the amplitude equations as functions of the rotation rate. With NB effects and no rotation, stationary hexagonal patterns are obtained, while rotation terms lead to a Küppers-Lortz instability, which develops into oscillating hexagons. These amplitude equations describe stationary and oscillating hexagons near threshold, and include the Busse-Heikes model as a particular case. The threshold for oscillating hexagons is determined and the sideband instabilities as well as short wave-length instabilities of stationary hexagonal patterns are discussed.

In part II two different problems are studied. In order to understand the distinct regimes encountered in experiments in single liquid layers subjected to lateral heating it is important to distinguish between *absolute* and *convective* instabilities. We show the existence of two absolute branches which allow to explain some of the features found in experiments. We find a better agreement between the theoretical predictions for the hydrothermal waves and the experiments than found until now using the more conventional convective theory.

The stability of two superposed horizontal liquid layers subjected to a horizontal temperature gradient is also studied. The liquids are supposed to be immiscible with a nondeformable interface. The forces acting on the system are buoyancy and interfacial tension. Four different flow patterns and until five temperature profiles are found for the basic state. A linear perturbative analysis with respect to two and three dimensional perturbations reveals the existence of three kind of patterns. Depending on the relative height of both liquids several situations are predicted: either wave propagation from cold to hot regions, or waves propagating in the opposite direction or still stationary longitudinal rolls. The behavior of some pairs of liquids which have been used in experiments on bilayers in the case of vertical heating by other authors have been examined. The instability mechanisms are discussed and a qualitative interpretation of the different behaviors exhibited by the system is provided. In some configurations it is possible to find a codimension-two point created by the interaction of two Hopf modes with different frequencies and wavenumbers.