

# Aparición de defectos en la formación de estructuras

Memoria presentada por  
D. Sergio Fabián Casado Carlino  
para optar al grado de  
Doctor en Física.



DPTO. FÍSICA Y MATEMÁTICA APLICADA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE NAVARRA

---

Universidad de Navarra, E-31080 Pamplona, Navarra



# Aparición de defectos en la formación de estructuras

Memoria presentada por  
D. Sergio Fabián Casado Carlino  
para optar al grado de doctor en Física

Septiembre de 2002

Departamento de Física y Matemática Aplicada,  
Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra  
E-31080 Pamplona, España

**D. Wenceslao González Viñas**, Doctor en Ciencias Físicas y **D. Héctor Luis Mancini Maza**, Doctor en Ciencias Físicas.

**CERTIFICAN:** que la presente Memoria, “Aparición de defectos en la formación de estructuras” ha sido realizada bajo nuestra dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra por D. Sergio Fabián Casado Carlino.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos la presente certificación en Pamplona, el diez de Junio de dos mil dos.

Wenceslao González Viñas

Héctor Luis Mancini Maza

# Índice General

Agradecimientos.	1
Prólogo.	3
<b>1 Introducción</b>	<b>5</b>
1.1 Sistemas dinámicos . . . . .	5
1.1.1 Sistemas en equilibrio . . . . .	5
1.1.2 Sistemas disipativos . . . . .	6
1.2 El modelo teórico . . . . .	7
1.3 Defectos . . . . .	11
1.4 Los sistemas estudiados . . . . .	12
1.4.1 Convección en fluidos . . . . .	12
1.4.2 Sistema óptico tipo Kerr con realimentación . . . . .	20
1.5 Resultados anteriores . . . . .	24
<b>I Sistema convectivo de Bénard-Marangoni</b>	<b>27</b>
<b>2 Técnicas experimentales</b>	<b>29</b>
2.1 Fluido utilizado . . . . .	29
2.2 Celda convectiva . . . . .	31
2.3 Sistema de observación . . . . .	31
2.4 Medidas locales de temperatura y flujo de calor . . . . .	34
2.5 Proceso de medida . . . . .	34
<b>3 Tratamiento de datos</b>	<b>41</b>
3.1 Procesado de las imágenes . . . . .	41
3.1.1 Método geométrico . . . . .	41
3.1.2 Demodulación compleja . . . . .	45

---

3.2	Recuento de defectos en el método geométrico . . . . .	50
3.3	Análisis estadístico . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>53</b>
4.1	Recuento de defectos en la formación de la estructura . . . . .	53
4.2	Estudio sobre la dinámica de formación de los defectos . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Conclusiones sobre el sistema convectivo de Bénard-Marangoni</b>	<b>65</b>
<b>II</b>	<b>Sistema óptico tipo Kerr con realimentación</b>	<b>69</b>
<b>6</b>	<b>Técnicas experimentales</b>	<b>71</b>
6.1	Sistema experimental . . . . .	71
6.2	Proceso de medida y tratamiento de datos . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>79</b>
<b>8</b>	<b>Conclusiones sobre el sistema óptico tipo Kerr con realimentación</b>	<b>85</b>
<b>III</b>	<b>Sistema convectivo de Rayleigh-Bénard</b>	<b>87</b>
<b>9</b>	<b>Técnicas experimentales</b>	<b>89</b>
9.1	Celda convectiva . . . . .	89
9.2	Fluido utilizado . . . . .	91
9.3	Sistema de observación . . . . .	91
9.4	Medidas locales de temperatura . . . . .	93
9.5	Proceso de medida . . . . .	93
9.6	Procesado de las imágenes . . . . .	95
<b>10</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>99</b>
<b>11</b>	<b>Conclusiones sobre el sistema convectivo de Rayleigh-Bénard</b>	<b>101</b>
<b>12</b>	<b>Conclusiones generales</b>	<b>103</b>

## Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis directores, Héctor L. Mancini y Wenceslao González Viñas. Gracias a ellos ha sido posible realizar este trabajo. Wenceslao me ha explicado desde sus orígenes (ya que no había tenido materias específicas sobre el tema) la mecánica de fluidos, y siempre ha estado dispuesto a resolver toda duda que se me presentara, con mucha paciencia y capacidad. Con Héctor la relación ha sido distinta, más espaciada por cuestión de tiempo, pero no por eso menos valiosa, mostrándose también siempre dispuesto a resolver dudas o simplemente a escuchar consultas, no sólo referentes a la física.

Ellos han aportado a mi formación de investigador (en curso, por supuesto), pero no han sido los primeros. Daniel O. Cortázar me ha guiado en mis primeros pasos en un laboratorio, con él también he compartido un tiempo muy rico en aprendizaje en el Laboratorio de Láser de la Universidad Nacional de Mar del Plata, acompañados por toda la gente del departamento de Física de la Facultad de Ingeniería.

No pueden faltar en estos agradecimientos los miembros del departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, cada uno me ha aportado su ayuda, conocimiento y/o compañía a lo largo de éste trabajo. Con Diego Valladares he discutido sobre cuestiones estadísticas y de programación, y ha sido mi maestro en mis primeros intentos de hacer una simulación numérica. Javier Burguete ha sido siempre un auxilio a mano para cualquier duda sobre la transformada de Fourier, y también para aportar nuevas ideas o razonamientos. También han colaborado Diego Maza y Ángel Garcimartín en cuestiones experimentales y Carlos Pérez-García en las dudas teóricas. Con los ayudantes pasados, presentes y futuros he compartido muy buenos momentos: Blas Echevarría, Miguel Angel Pelacho, María Luisa Ramón, Andrea Vallone, Begoña Peña, Santiago Madruga, Cecilia Wolluschek, Alejandro Godoy, Carolina Mendoza, Montserrat Miranda, Iker Zuriguel, Angela Bernardini y Santiago de San Román. Y también con Fernando Varela, Sergio Ardanza, Jean Bragard, Pedro Elizalde, María

José Collados, Pilar Ayúcar, Stefano Boccaletti, Carmen Palacios, Ana Mancho, María Jesús Chasco, Inés Pérez Mariño, Antonio Peláez y Emilio Diaz Calavia.

A la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra, que con su aporte económico me ha hecho posible el estar aquí. Al Ministerio de Educación y Ciencia, que a través del Proyecto PB98-0208, ha financiado gran parte del instrumental utilizado para este trabajo y por medio de la Acción Integrada Hispano Italiana HI97-30 ha permitido la colaboración con el Instituto Nacional de Óptica Aplicada (Florencia, Italia).

Agradezco de un modo especial a Diana, que siempre ha estado a mi lado y me ha brindado todo. A mi familia, a los que están en Argentina y en Venezuela, y a mis amigos.

# Prólogo

La formación de patrones[1], estructuras con una cierta regularidad o simetrías, ha sido objeto de estudio de numerosos trabajos en los últimos años en el campo de la Física no lineal. Cuando se pretende estudiar la dinámica de estos sistemas, en muchos casos se encuentra que las estructuras contienen zonas en las cuales se pierde la regularidad. Estas zonas son llamadas genéricamente “defectos”, nombre que está de acuerdo con nuestra intuición, ya que justamente se trata de una irregularidad.

En el presente trabajo se estudia experimentalmente la aparición de defectos en un caso particular: la formación de la estructura. Los sistemas elegidos consisten en:

- una celda convectiva de Bénard-Marangoni, sistema en el que se cuenta con amplia experiencia en el laboratorio donde se llevaron a cabo los experimentos, y que tiene características que no sólo lo hacen adecuado para este fin, sino que aventaja a otros sistemas en los que se ha realizado este experimento principalmente en la relativa facilidad con que se puede visualizar el patrón emergente, tal como se muestra en la figura 1.
- una celda convectiva de Rayleigh-Bénard, sistema con varias características comunes con la celda anterior, como es la relativamente fácil visualización de la estructura.
- un sistema óptico tipo Kerr con realimentación, que nos ha permitido realizar ciertas comparaciones con la celda convectiva de Bénard-Marangoni, ya que da lugar a estructuras análogas. También nos ha permitido explorar un sistema con una naturaleza diferente a la convectiva.

Varios factores relacionados con características de la transición entre el estado homogéneo y la estructura se ponen de manifiesto en este estudio. Explicaremos como influyen estos factores en base a un modelo desarrollado por Kibble[2]

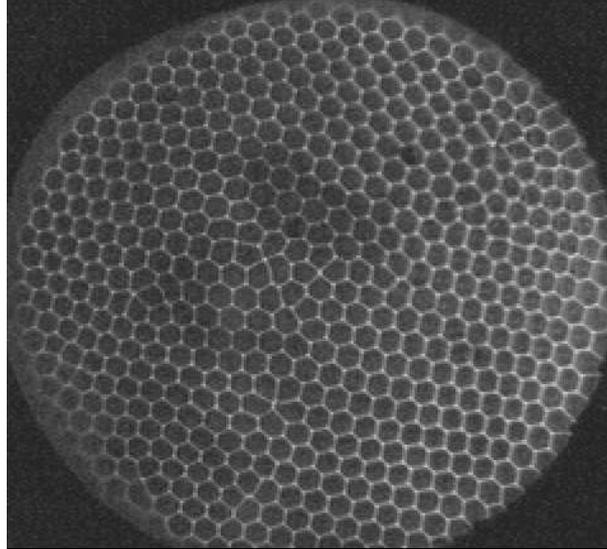


Figura 1: Patrón hexagonal correspondiente a la convección de Bénard-Marangoni. Las zonas irregulares se deben a que la estructura no es estacionaria, como la mayoría de las que estudiaremos en este trabajo.

y Zurek[3]. Diferentes trabajos han sido realizados con la intención de confirmar este modelo en sistemas dispares, como lo son los superfluidos o los cristales líquidos. Este trabajo aporta novedad principalmente al haber variado un parámetro constante en todos los experimentos anteriores, el tiempo característico del sistema, mediante la elección de fluidos con diferente viscosidad en la celda de Bénard-Marangoni.

También es importante destacar que las estructuras estudiadas están formadas por más de un modo, estando acoplados entre sí. Esto da lugar a diferencias respecto de los otros experimentos y del modelo teórico, el cual contempla la presencia de un único modo.

El objetivo de este trabajo es estudiar el modelo antes citado en los sistemas elegidos, analizando su validez y comparando los exponentes medidos con los predichos. Para esto se han realizado medidas estadísticas de la cantidad de defectos o de su densidad  $\rho = \frac{N_{defectos}}{N_{poligonos}}$  cuando ha sido posible, como función del tiempo empleado en cruzar la bifurcación. Para este tiempo hemos utilizado a lo largo de la memoria variables análogas que cambian la manera en que se han adimensionalizado, según el sistema estudiado. Ellas son:  $\tau_v$  en la parte I,  $\tau_q$  en la parte II y  $\tau_p$  en la parte III.

# Capítulo 1

## Introducción

En este primer capítulo se hace una breve introducción al modelo teórico propuesto por Kibble y Zurek, que enmarca el trabajo experimental llevado a cabo en tres sistemas diferentes. También se dedica un apartado al concepto de defecto en una estructura, básico en el modelo teórico. Por último, se comentan brevemente los sistemas experimentales en los que hemos trabajado: los sistemas convectivos de Bénard-Marangoni y de Rayleigh-Bénard y el sistema óptico tipo Kerr con realimentación. Si bien la extensa fenomenología de los sistemas en particular no debiera influir en los resultados de este trabajo según el modelo teórico existente, que hace referencia únicamente a características generales del sistema como es la dimensión y conceptos como la causalidad, se hace necesaria una pequeña introducción para que, tanto desde el punto de vista experimental como del teórico se comprendan algunos hechos plasmados en los capítulos siguientes.

### 1.1 Sistemas dinámicos

Pretendemos aquí hacer un breve resumen de los principales conceptos que utilizaremos en las secciones siguientes, al describir el modelo teórico propuesto por Kibble[2] y Zurek[3]. Dicho modelo considera sistemas en equilibrio, pero toda su línea argumental se puede extender a sistemas disipativos. Para llevar a cabo esta analogía, siempre desde el punto de vista del modelo, es necesario comparar varios conceptos correspondientes a uno y otro tipo de sistema.

#### 1.1.1 Sistemas en equilibrio

Llamamos sistema en equilibrio a aquel en el que no hay disipación de energía.

El estado del sistema se caracteriza por un conjunto de variables que se pueden elegir en base a diferentes criterios. El conjunto de todos los estados posibles del sistema forma el espacio de las fases. El sistema tendrá también un parámetro de control, que será parte de los parámetros de las ecuaciones que describen el sistema, y que estará relacionado con alguna cantidad física que se puede variar a lo largo de un experimento ideal, como puede ser la temperatura o el campo magnético externo.

Diremos que un estado del sistema es de equilibrio para un cierto valor del parámetro de control, cuando no cambia en el tiempo y es estable. A menudo, en sistemas formados por muchas partículas ocurre que, para ciertos valores, un pequeño cambio en el parámetro de control provoca discontinuidades o singularidades en las variables termodinámicas que describen el sistema, haciendo que un estado que anteriormente era de equilibrio pierda estabilidad. En este caso diremos que ha ocurrido una transición de fase en el sistema. El punto donde ocurre esta transición lo llamaremos punto crítico. Los comportamientos singulares de las cantidades termodinámicas en el punto crítico se acostumbra a describirlos mediante leyes de potencias en las que los exponentes con los cuales divergen caracterizan cualitativamente la naturaleza de la transición.

Una clasificación básica de las transiciones de fase nos lleva a dividir las en dos clases, las de primer o segundo orden. Una transición de fase es de primer orden cuando en el punto crítico existe una biestabilidad de dos estados, correspondientes al anterior y al posterior a la transición. Por el contrario, diremos que una transición es de segundo orden cuando en el punto crítico un estado pierde estabilidad en favor de otro.

### 1.1.2 Sistemas disipativos

En los sistemas disipativos existe una pérdida de energía permanentemente que se compensa con un aporte energético externo. Este intercambio constante se hace gracias a que el sistema está fuera del equilibrio. Por eso mismo no podemos utilizar las poderosas herramientas de la mecánica estadística de equilibrio, sino más bien debemos centrarnos en la teoría de bifurcaciones.

En este tipo de sistemas uno de los parámetros de control más representativos es la energía entregada al sistema, o una cantidad asociada a ésta. Análogamente a las transiciones de fase en los sistemas en equilibrio, aquí el sistema, para ciertos valores del parámetro de control, sufre una bifurcación. En ellas también hay ciertas cantidades físicas que son discontinuas o tienen un comportamiento

singular.

Al igual que en el caso de las transiciones de fase, también en las bifurcaciones un estado puede perder estabilidad en favor de otro o puede haber una región de biestabilidad. Diremos en el primer caso que la bifurcación es supercrítica, mientras que en el segundo caso es subcrítica.

Un sistema puede sufrir varias bifurcaciones a medida que aumentamos la energía entregada. A la primera de ellas se le suele llamar bifurcación primaria. Cuando se aumenta aún más el parámetro de control, el proceso se puede repetir varias veces, produciéndose nuevas bifurcaciones o inestabilidades secundarias. El estado final será la turbulencia totalmente desarrollada pasando por el caos espacio-temporal.

Si bien aquí se ha hecho referencia únicamente a características que utilizamos posteriormente en esta memoria, se puede ver una clasificación completa de los tipos de bifurcaciones en la referencia [4].

## 1.2 El modelo teórico

El modelo que describiremos ha sido concebido originalmente en el contexto de la cosmología temprana, concretamente en la formación de las galaxias inmediatamente después del Big-Bang[2], pero tiene en cuenta sólo aspectos generales, como la dimensión del sistema o conceptos como el de causalidad, por lo que en principio las líneas argumentales son válidas en otros campos diferentes. La extensión del modelo a sistemas de materia condensada fue hecha por Zurek[3], abriendo un nuevo campo de posibilidades en la validación de la propuesta original de Kibble.

El modelo se aplica a sistemas con una transición de fase de segundo orden en la que existe una rotura de simetría. Esto implica que en la transición la longitud de correlación se hace infinita en la transición, al igual que su tiempo característico. Sin embargo, cuando se cambia el parámetro de control cruzando la transición en un tiempo finito, la longitud de correlación no puede crecer más rápidamente que la velocidad máxima del sistema, que disminuye a medida que se acerca a la transición. Así, antes de alcanzar el punto crítico llega un momento en el cual la longitud de correlación no logra alcanzar su valor estacionario, y podríamos decir que se “congela”. De esta manera, esa longitud de correlación seleccionada por el sistema en función del ritmo de cambio del parámetro de control nos dará el orden del tamaño de los dominios que se formarán en la nueva estructura. El principal resultado del modelo es la predicción de cómo depende esta elección de los parámetros generales del sistema, y que no depende de los

detalles.

En general, en todo fenómeno crítico, el comportamiento del tiempo de relajación característico del sistema  $\tau$  cerca del punto crítico sigue una ley de potencias como se muestra en la figura 1.1, por lo que la dinámica del sistema se ralentiza a medida que se acerca a la transición. Por otra parte, la longitud de correlación también tiene un comportamiento crítico tipo ley de potencias, llegando a infinito en la transición misma, tal como se puede ver en la figura 1.1 (en un sistema real, su valor máximo será igual al tamaño del sistema).

Para entender mejor el modelo, analicemos que sucede cuando, estando cerca de la transición, se cambia dinámicamente el parámetro de control  $\epsilon$ . Si el parámetro de control está suficientemente alejado del punto crítico, un cambio en su valor modifica la longitud de correlación de forma pequeña y por lo tanto el sistema puede alcanzar rápidamente el nuevo estado estacionario. Sin embargo, cuando el sistema está cercano al punto crítico, un pequeño cambio en el parámetro de control provoca un crecimiento en la longitud de correlación cada vez mayor. Cuando dicho cambio en el parámetro de control se hace de manera cuasiestacionaria, el sistema es capaz de adaptar el valor de todas sus variables al nuevo parámetro de control. Por el contrario, cuando el cambio se hace en un tiempo finito, el sistema no puede adaptar el valor de sus variables al parámetro de control, ya que la longitud de correlación no puede crecer con una velocidad mayor que la velocidad máxima del sistema. Sumado a esto, en el caso de sistemas de materia condensada, la velocidad límite también dependerá de  $\epsilon$ , ya que esta relacionada con el tiempo de relajación característico.

Todos estos factores contribuyen a producir un virtual “congelamiento” de la longitud de correlación en las cercanías del punto crítico. De esta forma, los dominios en la nueva estructura formada tendrán como tamaño típico la longitud de correlación seleccionada antes de la transición.

Para determinar su valor[5], consideremos que el cambio en el parámetro de control es lineal<sup>1</sup>, siendo

$$\epsilon = \frac{t}{\tau_v} \tag{1.1}$$

donde  $\tau_v$  es la inversa de su ritmo de crecimiento (esta variable se usa en la parte I de la tesis, y es análoga a  $\tau_q$  en la parte II y a  $\tau_p$  en la parte III). La longitud de correlación seleccionada estará dada por la ecuación

---

<sup>1</sup>Aunque a primera vista pueda parecer restrictivo este requerimiento, es suficiente que el cambio en el parámetro de control se pueda linearizar en una región muy cercana al punto crítico.

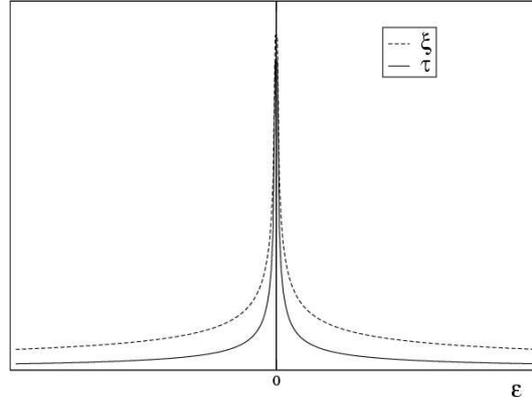


Figura 1.1: Comportamiento esquemático típico del tiempo de relajación característico y de la longitud de correlación frente al parámetro de control en una bifurcación que se cruza de forma cuasiestacionaria cuando el sistema es extenso. Las escalas son arbitrarias y distintas para cada variable. Para el gráfico mostrado, la transición ocurre cuando el parámetro de control  $\epsilon$  es igual a cero.

$$\frac{d\xi}{dt}(-t_{cong}) = v_{max} \quad (1.2)$$

donde  $-t_{cong}$  es el tiempo en el cual la longitud de correlación se “propaga” a la velocidad máxima del sistema. En ese instante la longitud de correlación se congela seleccionándose para después de la transición, y  $v_{max}$  es la velocidad máxima permitida en el sistema. Estimamos la velocidad máxima en los sistemas de materia condensada como:

$$v_{max} = \frac{\xi}{\tau} \quad (1.3)$$

También describimos los comportamientos críticos en la longitud de correlación y en el tiempo característico del sistema como[5]

$$\xi(\epsilon) = \xi_0 \epsilon^{-\nu} \quad , \quad \tau(\epsilon) = \tau_0 \epsilon^{-z\nu} \quad (1.4)$$

donde a  $z$  se le conoce como exponente crítico dinámico[6]. En base a las dependencias anteriores, se obtiene como estimación para el comportamiento crítico de la longitud de correlación congelada

$$\xi_{cong} \sim \tau_v^{\nu/(1+z\nu)} \quad (1.5)$$

Podemos relacionar la cantidad de defectos con la longitud de correlación aceptando que la primera se pueda escribir como

$$\rho = \frac{S}{(\xi_{cong})^d} \quad (1.6)$$

donde  $S$  es el tamaño del sistema (sus unidades dependerán de la dimensión) y  $d$  la dimensión. Para las estructuras estudiadas en esta memoria la dimensión es  $d = 2$ .

Por lo tanto, en nuestro caso, la cantidad de defectos, o su densidad  $\rho = \frac{N_{defectos}}{N_{poligonos}}$ , tiene la siguiente dependencia crítica:

$$\rho_{cong} \sim \tau_v^{-2\nu/(1+z\nu)} \quad (1.7)$$

Según la teoría de campo medio, el exponente crítico  $\nu$ , asociado a la longitud de correlación es  $\nu = 0.5$ .

Para el exponente crítico asociado al tiempo característico del sistema,  $z\nu$ , debemos considerar dos casos límites. Para hacer más claro el razonamiento, aceptemos que podemos describir nuestro sistema con una ecuación diferencial de segundo orden, sin con esto perder una gran generalidad. En dicha ecuación, el coeficiente disipativo  $\gamma$  estará multiplicando la derivada primera del campo. Los dos casos límites estarán asociados a considerar que  $\gamma \gg 1$ , de manera que podamos despreciar la derivada segunda respecto de la derivada primera, o  $\gamma \ll 1$ , pudiendo descartar el termino disipativo respecto del oscilatorio. De esta forma, podemos estimar en cada uno de los casos el exponente crítico que le corresponde al tiempo característico, dando como resultado

$$\tau(\epsilon) \sim \begin{cases} \tau_0 \epsilon^{-1} & \gamma \gg 1 \\ \tau_0 \epsilon^{-0.5} & \gamma \ll 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

De las dependencias anteriores podemos ver que en el caso de sistemas sub-mortiguados ( $\gamma \ll 1$ ) la velocidad máxima en el sistema, dada por la ecuación 1.3, no depende del parámetro de control.

Por lo tanto, el valor del exponente crítico de la densidad de defectos para un sistema bidimensional donde sea válida la teoría de campo medio, es de:

$$\rho_{cong} \sim \begin{cases} \tau_v^{-0.5} & \gamma \gg 1 \\ \tau_v^{-0.66} & \gamma \ll 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Es importante notar que los cambios en la viscosidad o, de forma equivalente, en el tiempo característico del sistema, influyen sobre el tiempo de relajación característico y sobre la velocidad límite. Se entiende de forma sencilla lo anterior cuando pensamos en un sistema en el cual el término disipativo de la ecuación que lo describe, con una derivada de primer orden, es mucho mayor que el término oscilatorio. En este caso, se puede hacer una renormalización del tiempo,

absorbiendo el coeficiente de disipación. Así, diferentes coeficientes de disipación estarán asociados a distintos tiempos característicos del sistema.

### 1.3 Defectos

Los defectos en estructuras han sido ampliamente estudiados, principalmente en el contexto de caos espacio-temporal[1][7][8], situación en la que la dinámica del sistema está dominada por el movimiento, aniquilación o creación de nuevos defectos, que como veremos en los próximos párrafos, siguen unas reglas específicas.

Últimamente, a partir del modelo propuesto en la sección 1.2, se ha puesto énfasis también sobre el proceso de formación de defectos en una transición con ruptura de simetría, cuyo origen está ligado a la causalidad en la dinámica de aparición de la estructura.

En esta sección haremos una pequeña introducción sobre defectos topológicos en la que también discutiremos las implicaciones que tienen ellos sobre las estructuras tratadas en esta memoria.

Cuando hablamos de un defecto en una estructura, nos referimos a una región que no sigue la regularidad del resto del patrón y que es inestable localmente. Diremos que dicho defecto es topológico [9][10] cuando su presencia está forzada por una cuestión como es la de enlazar dos regiones inconexas en un diagrama de estabilidad para un determinado parámetro de control.

En el caso de una estructura hexagonal como las estudiadas en la parte I y II, el patrón se puede descomponer en tres modos, rotados entre sí  $120^\circ$ . Estudiando cada modo por separado se puede ver que la integral de camino cerrado del gradiente de la fase rodeando el defecto es igual a  $n2\pi$ , con  $n$  entero no nulo. Este entero nos da la carga topológica del defecto. En el patrón hexagonal estudiado el defecto con mayor vida media es el defecto penta-hepta[11], asociado a defectos en dos de los modos que componen la estructura, cada uno de ellos con una carga topológica igual a  $\pm 1$ . Respecto de la amplitud en un defecto penta-hepta, su valor es cero en los dos modos que contienen defectos, mientras que el tercero no se ve afectado.

En el caso de un patrón de rollos o estructuras con un único modo, los defectos característicos son las dislocaciones, también con una carga topológica de  $n2\pi$ , con  $n$  entero. De todas ellas, la que tiene una carga topológica de  $\pm 2\pi$  es la de mayor vida media.

En un sistema infinito la única forma que tiene un defecto topológico para desaparecer es aniquilarse con otro defecto topológico de carga contraria, pero,

en un sistema real, los defectos pueden desaparecer en el borde de la estructura. De todas formas, los tiempos que se escogen en el experimento evitan que se lleve a cabo este proceso de desaparición.

En las estructuras hexagonales del sistema de Bénard-Marangoni o del sistema óptico tipo Kerr con realimentación, los defectos no se corresponden con el mismo valor de campo correspondiente al estado homogéneo. Esto no tiene ninguna consecuencia directa que diferencie de forma fundamental este tipo de defecto con otros que sean ceros del campo total. Otro punto a señalar es que el defecto en esas estructuras es un cero en dos campos acoplados, hecho que sí podría afectar la dinámica de formación de aquellos de manera importante.

Si bien lo más normal es encontrar defectos con carga topológica igual a  $\pm 1$  por cuestiones energéticas, en nuestro caso esto podría no cumplirse en su totalidad por deberse la aparición de defectos a un cambio brusco en el parámetro de control. Otro efecto debido a que se cruza dinámicamente el umbral es que defectos inestables topológicamente pueden llegar a permanecer el tiempo suficiente como para incrementar el número de defectos medidos.

## 1.4 Los sistemas estudiados

### 1.4.1 Convección en fluidos

Los patrones observados en la primera y en la tercera parte de este trabajo corresponden a estructuras convectivas formadas en una celda de Bénard-Marangoni o de Rayleigh-Bénard. El primero en estudiarlos fue Bénard [12] en el año 1900, cuando realizó experimentos calentando por debajo aceite de ballena. En este apartado se explicará cómo se originan tales estructuras, consecuencia del efecto desestabilizador del empuje de Arquímedes en conjunto con los de la tensión superficial (cuando la superficie superior es libre), frente a los efectos estabilizadores dados por la disipación térmica y viscosa. La forma de presentar esta sección es esquemática, por lo que si se quiere profundizar en el tema se sugiere acudir a [13] para un tratamiento teórico mucho más riguroso así como a [14] para un estudio desde el punto de vista experimental.

Analicemos qué factores entran en juego cuando una capa de fluido de profundidad  $h$  es sometida a una diferencia de temperatura vertical.

Un primer efecto es la estratificación del fluido en capas de diferentes densidades según las distintas temperaturas. Si una esfera de fluido sufre una fluctuación en su posición, subiendo un  $\delta h$ , habrá desplazado a otra esfera con una densi-

dad mayor<sup>2</sup>, por lo que sufrirá un empuje de Arquímedes mayor a su peso, que propiciará que este movimiento continúe. Un mecanismo similar existe cuando una fluctuación aumenta la temperatura de una parte del fluido, ya que de nuevo al disminuir su densidad se rompe el equilibrio entre el peso y el empuje, siendo mayor este último. De forma análoga se pueden analizar las fluctuaciones inversas correspondientes a descensos de altura o a disminuciones en la temperatura, los cuales provocarán movimientos de sentido contrario que también se verán amplificados.

Las variaciones de la densidad con la temperatura se pueden considerar en una primera aproximación como:

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \alpha\Delta T) \quad (1.10)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación volumétrica. La fuerza correspondiente por unidad de volumen es:

$$F_a = \rho_0 g \alpha \Delta T \quad (1.11)$$

por lo que una gota de fluido, con la única presencia de esta fuerza, tardará en recorrer una distancia  $h$  un tiempo del orden de

$$T_a = \left( \frac{h}{F_a/\rho_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{h}{g\alpha\Delta T} \right)^{1/2} \quad (1.12)$$

cuando no está presente ningún otro mecanismo.

El segundo efecto[15], presente únicamente cuando la superficie superior es libre, se debe a la variación de la tensión superficial con la temperatura. Esta variación provoca un desplazamiento del fluido desde las zonas calientes a las frías. A primer orden se puede considerar:

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma'\Delta T \quad (1.13)$$

mientras que la fuerza por unidad de longitud se puede escribir como:

$$F_s = \sigma'\Delta T \quad (1.14)$$

Al igual que en el mecanismo anterior, podemos asociar esta fuerza a un tiempo para desplazarse una distancia  $h$  del orden de:

$$T_s = \left( \frac{\rho h^3}{\sigma'\Delta T} \right)^{1/2} \quad (1.15)$$

---

<sup>2</sup>Esto ocurre en la mayoría de los fluidos, pero hay excepciones entre las cuales se encuentra el agua entre 0 y 4° C, para las cuales un aumento en la temperatura provoca un aumento en la densidad.

cuando no está presente ningún otro mecanismo.

Los factores analizados hasta el momento favorecen el movimiento del fluido, sin embargo, también hay procesos que frenan este movimiento, como se verá en lo que sigue.

Un primer proceso estabilizante es la difusión del calor, que trata de igualar las temperaturas, tanto en la dirección vertical, donde hay un flujo continuo de energía, como en la dirección horizontal, donde juega un papel estabilizador ante cualquier fluctuación. Si en una esfera de fluido se produce una fluctuación en la temperatura, ésta decaerá con un tiempo característico para una distancia  $h$  dado por

$$T_\theta = \frac{h^2}{\kappa} \quad (1.16)$$

donde  $\kappa$  es la difusividad térmica.

El segundo mecanismo es la disipación viscosa, proveniente de la “fricción” molecular, que se opone a cualquier movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad<sup>3</sup>. El tiempo de relajación para una perturbación en la velocidad, o de forma más estricta, para la vorticidad  $\omega = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ , obtenido a partir de la ecuación de Navier-Stokes (1.21), para una distancia  $h$  está dado por:

$$T_\nu = \frac{h^2}{\nu} \quad (1.17)$$

Así, en el caso de la convección de Rayleigh-Bénard tenemos un único mecanismo desestabilizador, el provocado por el empuje de Arquímedes. Por otra parte, en la convección de Bénard-Marangoni, al mecanismo anterior se le suma el provocado por la dependencia de la tensión superficial con la temperatura, como se puede ver en la figura 1.2.

Teniendo los tiempos característicos de todas las contribuciones y comparándolos entre sí para las mismas distancias obtendremos cantidades que nos indicarán qué factor es el más importante y si las perturbaciones crecerán o se amortiguarán.

Cuando comparamos el tiempo característico correspondiente al empuje de Arquímedes (fuerza desestabilizante) con aquellos de la difusividad térmica y viscosa, obtenemos el número de Rayleigh:

$$Ra = \frac{T_\theta T_\nu}{T_a^2} = \frac{\alpha g h^3 \Delta T}{\kappa \nu} \quad (1.18)$$

---

<sup>3</sup>La ley de Stokes predice este comportamiento, siendo válida para  $Re = \frac{h v}{\nu} \ll 1$ .

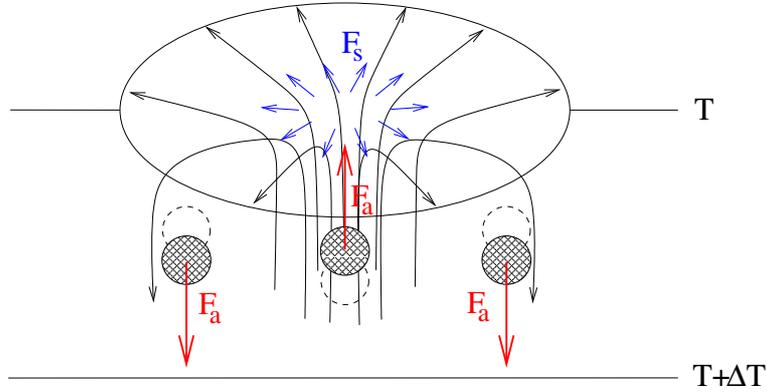


Figura 1.2: Esquema representando el efecto del empuje de Arquímedes actuando simultáneamente con el efecto asociado a la tensión superficial.

donde  $h$  designa la altura del fluido. Este número adimensional debe superar un cierto valor para que el fluido comience a moverse. Este valor se puede obtener a partir de cálculos teóricos, o bien de forma experimental.

Cuando utilizamos el procedimiento análogo con el tiempo característico correspondiente a la tensión superficial como fuerza desestabilizante, obtenemos el número de Marangoni:

$$Ma = \frac{T_\theta T_\nu}{T_s^2} = \frac{\sigma' h \Delta T}{\kappa \nu} \quad (1.19)$$

También se obtiene para este número adimensional un valor umbral a partir del cual el fluido se moverá.

Como parámetro de control utilizaremos la diferencia de temperatura, en su forma adimensional y reducida:

$$\epsilon = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c} \quad (1.20)$$

donde  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura entre la capa superior e inferior del fluido, mientras  $\Delta T_c$  es el valor de  $\Delta T$  en el cual comienza la convección.

Cabe comentar que los campos de temperatura y velocidad están relacionados, ya que, por ejemplo, una temperatura mayor que la media provocará un movimiento ascendente. Así también se puede ver que velocidades descendentes provocarán aumentos en la temperatura por acercarse a la placa caliente. Estos casos concretos nos muestran que ambos campos se ven influidos por el otro.

Esta interdependencia también se ve en las ecuaciones que rigen la velocidad y la temperatura. La ecuación que gobierna el campo de velocidades es la ecuación

de Navier-Stokes, dada por:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \rho \mathbf{f} - \nabla \mathbf{p} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.21)$$

donde  $\mathbf{f}$  representa a las fuerzas externas,  $p$  es la presión y  $\mu$  es la viscosidad dinámica.

Para la temperatura, la ecuación del calor está dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{T} = \kappa \nabla^2 \mathbf{T} + \vec{\sigma} : (\nabla \vec{\mathbf{v}}) \quad (1.22)$$

donde  $\kappa$  es la difusividad térmica,  $\vec{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos y los dos puntos indican contracción doble de los tensores. En la convección libre, se puede ver que el segundo término del segundo miembro es suficientemente pequeño en comparación con los otros términos de la ecuación y se puede despreciar[16].

Si bien las dos ecuaciones anteriores no son lineales, la correspondiente a la velocidad es cuadrática por sí misma, mientras que la de la temperatura pierde la linealidad sólo en el acoplamiento con el campo de velocidades. Esto indica que el comportamiento del sistema será muy distinto según domine uno u otro campo.

Una característica importante del fluido nos la da el número de Prandtl, que mide la importancia relativa entre los efectos viscosos y térmicos, y está dado por:

$$Pr = \frac{T_\theta}{T_\nu} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (1.23)$$

Así, un número de Prandtl mucho menor que uno implicará un dominio del campo de velocidades, al ser su tiempo característico mucho más grande que el del campo de temperaturas; mientras que uno mucho mayor que uno indicará lo contrario.

En el caso de la convección de Bénard-Marangoni, la bifurcación primaria es la que pasa desde el sistema homogéneo (en las dimensiones asociadas a la estructura), en estado conductivo, a un patrón de hexágonos que indica que el movimiento del fluido ha comenzado. Dicha transición ha sido caracterizada como subcrítica[17]. Un incremento posterior en el parámetro de control produce una bifurcación secundaria hacia un patrón formado por cuadrados[18][19][20] para números de Prandtl bajos, mientras que en fluidos con números de Prandtl altos el patrón se va desordenando progresivamente, principalmente por la aparición de defectos penta-heptas[21][22][23]. Se puede encontrar una revisión de los últimos experimentos en convección de Bénard-Marangoni en [24][14].

Mientras tanto, en la convección de Rayleigh-Bénard con una tapa superior no perfectamente conductora, la primera bifurcación da lugar a la formación de cuadrados, que son estables para un pequeño rango de valores del parámetro de control[25]. Superado este pequeño rango, los cuadrados se inestabilizan para dejar paso a los rollos convectivos.

Si bien el umbral para la primera bifurcación, o inestabilidad primaria, no depende del número de Prandtl, éste influye de manera decisiva en las siguientes bifurcaciones[26], ya que al aumentar el  $Pr$  la diferencia entre sí de los diferentes valores críticos del parámetro de control aumenta debido al dominio del campo de temperaturas, que tiene una no-linearidad más débil que el campo de velocidades. Se puede ver esto claramente en el gráfico de la figura 1.3, hecho para el caso de convección de Rayleigh-Bénard.

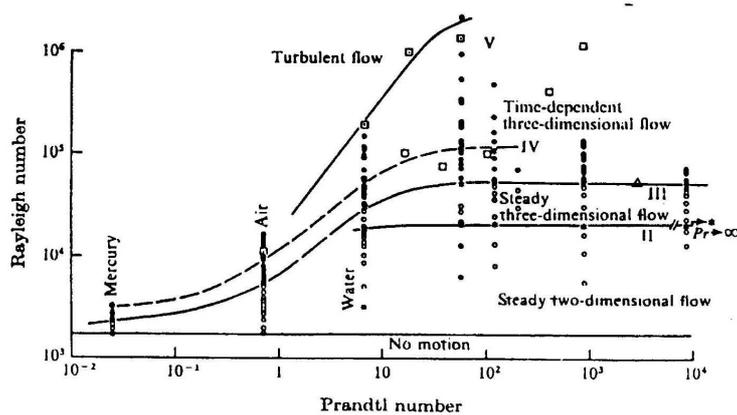


Figura 1.3: Gráfico que muestra los distintos comportamientos que aparecen en un sistema convectivo de Rayleigh-Bénard cuando se cambia el parámetro de control, para este caso el número de Rayleigh. Gráfica aparecida en la referencia [26].

Experimental y teóricamente se encuentra que la longitud de onda escogida por el sistema en el umbral depende básicamente de la altura del fluido, siendo del orden de ésta. Por lo tanto, hemos utilizado una altura suficientemente pequeña para que la longitud de onda seleccionada nos permita visualizar por lo menos quince longitudes de onda en la celda convectiva. Como consecuencia de esto y de los tamaños de las celdas utilizadas, las alturas escogidas son de unos pocos milímetros.

En un experimento, las condiciones de contorno laterales están dadas por la pared, la cual influye de manera determinante sobre una cierta distancia, deno-

minada capa límite, en el interior del fluido. Las dos características principales relativas a la pared se refieren a la conducción del calor y a la fricción de ella con el fluido. Respecto de lo último, el conjunto de paredes y fluidos utilizados determina que ellas sean en todos los casos no deslizantes. En relación a la conducción del calor, es necesario en primer lugar establecer el criterio que divide las paredes en diatérmicas y aislantes. Por pared diatérmica entendemos aquella cuyo tiempo característico de difusión de la temperatura es mucho menor que el del fluido. Por el contrario, una pared aislante es aquella en la cual el tiempo característico de difusión de la temperatura es mucho mayor que el del fluido.

Una pared diatérmica ideal no permitirá que exista ninguna diferencia de temperatura en el fluido cercano a ella, ya que la eliminará por medio de un flujo de calor en su interior. Por lo tanto, la única posibilidad que cabe para el fluido cerca de la pared conductora es la de establecer un rollo convectivo paralelo a ella, en el cual todo el fluido que recibe su influencia está subiendo o bajando según la temperatura de la pared sea mayor o menor que la media del fluido. Generalmente, como la pared conductora está en contacto con la base de la celda, su temperatura es cercana a la temperatura inferior, por lo que el fluido ascenderá.

En el caso de una pared aislante cualquier diferencia de temperatura en el fluido no se podrá anular por medio de un flujo de calor en la pared. Como toda la pared tiende a tener una temperatura homogénea cercana a la media de la celda, la configuración más favorable se corresponde con la formación de medias celdas perpendiculares a la pared. De esta forma la temperatura de la pared se hace constante a una distancia pequeña del fluido, y del orden de la temperatura media de la celda. De este modo también se minimiza la disipación viscosa, al haber zonas intermedias con velocidades nulas.

En este trabajo hemos analizado sistemas que van desde intermedios a extensos. Para ver como se hace esta clasificación, es necesario definir una nueva cantidad, la relación de aspecto, dada por:

$$\Gamma_g = \frac{D}{h} \text{ (geométrica)} \quad \Gamma_f = \frac{D}{\lambda} \text{ (física)} \quad (1.24)$$

donde  $D$  es el diámetro o el lado, según corresponda, de la celda utilizada,  $h$  la altura de fluido y  $\lambda$  la longitud de onda dominante en el sistema. Las dos cantidades nos dan una idea de la relación entre la longitud característica de la estructura (como ya se comentó  $h$  y  $\lambda$  son del mismo orden) y el tamaño de la celda. La relación de aspecto física da información exacta de como se comporta el sistema por incluir en su definición la longitud de onda  $\lambda$ , mientras que la relación de aspecto geométrica es muy útil en el caso de estimaciones a priori de lo que se

va a obtener. Por todo esto, usaremos de aquí en adelante la relación de aspecto física.

Por último, para la convección de Bénard-Marangoni, esto es, cuando un fluido es calentado por debajo y la superficie superior está libre, debemos hacer unas consideraciones adicionales:

- al actuar de forma conjunta el mecanismo del empuje de Arquímedes y de la tensión superficial, el efecto se refuerza. Por ejemplo, cuando una gota asciende por efecto del empuje de Arquímedes en un determinado lugar del fluido, la zona de la superficie donde emergerá tendrá una temperatura mayor que los alrededores. Como la tensión superficial en la mayoría de los fluidos “tira” de los lugares calientes hacia los fríos, esta fuerza reforzará el movimiento en curso. Como consecuencia, el umbral de convección cambia cuando actúan los dos mecanismos conjuntamente. Nield[27] propuso para los nuevos umbrales  $Ra_c$  y  $Ma_c$  la siguiente ecuación:

$$\frac{Ra_c}{Ra_{0c}} + \frac{Ma_c}{Ma_{0c}} \approx 1 \quad (1.25)$$

donde  $Ra_{0c}$  y  $Ma_{0c}$  son los umbrales cuando un único efecto está actuando sin el otro e indica una acción conjunta aditiva de ambos mecanismos en forma independiente. Como el número de  $Ra$  depende de  $h^3$  y el  $Ma$  de  $h$ , cuando se cambia la altura en la capa de fluido se está cambiando el peso relativo entre los dos mecanismos. Cuando mayor sea  $h$ , mayor será el peso relativo del empuje de Arquímedes en la ecuación anterior, pasando lo contrario a medida que disminuimos  $h$ . En nuestro caso, donde  $h$  es de unos pocos milímetros, el mecanismo dominante es el de la tensión superficial.

- también ha de tenerse en cuenta el flujo de calor existente entre el fluido y el aire. Si bien aquí corresponde hacer un análisis del problema de dos fluidos para ser riguroso, una buena aproximación es la reducción a un fluido; en la que se introduce un coeficiente fenomenológico  $Bi$ [13], el número de Biot, para modelizar el comportamiento de la interfaz. Este número queda definido por la relación de Newton:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + Bi(T - T_a) = 0 \quad (1.26)$$

donde  $z$  se corresponde con la dirección vertical y  $T_a$  es la temperatura del aire.

### 1.4.2 Sistema óptico tipo Kerr con realimentación

Este sistema se compone de una válvula óptica de cristal líquido (VOCL) insertada en un circuito de realimentación[28].

El nombre de válvula óptica se debe a que los moduladores de luz espaciales actúan en óptica de la misma forma que las válvulas o transistores operan en electrónica. La válvula óptica utilizada en el experimento está compuesta por una cara sensible a la intensidad de luz (capa fotoconductor) y otra birrefringente moduladora de la fase (capa de cristal líquido).

Los dos componentes anteriores se unen mediante un espejo dieléctrico, y a todo el conjunto se lo encierra entre dos electrodos transparentes a los que se les aplica un voltaje alterno.

El cristal líquido en este sistema está en fase nemática, por lo que cada molécula tiene una dirección privilegiada con respecto a todas las otras, que lo hace anisótropo. En ausencia de campos externos, las moléculas se orientan de forma paralela debido a las fuerzas intermoleculares. Dado que las moléculas en la superficie tienen fijada su orientación paralela a la pared, las fuerzas intermoleculares transmiten esta orientación a todo el cristal líquido. Sin embargo, cuando se aplica un campo eléctrico externo perpendicular a la pared, el campo tiende a reorientar las moléculas de forma paralela a él. Por lo tanto compite con las fuerzas intermoleculares, lo que da lugar a un valor umbral del campo para el cual comienzan a reorientarse las moléculas del cristal. Este comportamiento recibe el nombre de transición de Freedericksz [29]. La reorientación de las moléculas cambia el índice de refracción del cristal líquido, por lo que el cambio de fase de la luz que atraviesa el cristal líquido dependerá del campo aplicado a la capa de cristal líquido.

Por otra parte, la luz incidente sobre la capa fotoconductor da lugar a que existan un mayor número de portadores de carga y su impedancia disminuye localmente, por lo que la fracción de voltaje que cae en la capa de cristal líquido es mayor. Resumiendo, tenemos una capa fotoconductor sensible a la intensidad de luz, mientras que el frente emergente de la capa de cristal líquido está modulado en fase. Para que haya una realimentación, se debe transformar la modulación de fase en una modulación de amplitud. En nuestro caso la forma de lograrlo es dejar una longitud de propagación libre, que actúa como se explica en el párrafo siguiente. Logrado esto último, tenemos un sistema que cambia la fase del frente de onda incidente sobre la capa de cristal líquido en función de la intensidad recibida en la capa fotoconductor. Por lo tanto, podemos afirmar que en una primera aproximación el sistema se comporta como un medio Kerr, en los que el

índice de refracción depende de la intensidad de la luz.

Para entender mejor el efecto que produce una longitud libre de propagación, se utiliza un modelo propuesto en [30], que consiste en una lámina Kerr a una distancia  $\frac{L}{2}$  de un espejo. El esquema de la configuración utilizada se muestra en la figura 1.4. Sobre la lámina incide transversalmente un frente de onda plano, propagándose hacia el espejo, desde donde incide nuevamente sobre la lámina. El cambio en la fase de la onda cuando atraviesa el material es  $\phi(x, y, t) = \alpha I_t(x, y, t)$ , donde  $I_t$  es la intensidad total incidiendo sobre el material,  $\alpha$  da el signo y la importancia de la no-linearidad y  $(x, y)$  son las coordenadas transversales a la propagación de la onda. Si  $\alpha > 0$  diremos que el sistema es auto-enfocado, mientras que si  $\alpha < 0$  el sistema es auto-desenfocado. Se supone que la longitud característica de la difusión en el material es mucho mayor que la longitud de onda, esto nos permite despreciar efectos de interferencia entre la onda incidente y la reflejada. En este caso, la intensidad total será la suma de las intensidades incidente y reflejada. La ecuación que rige la evolución del retardo de fase inducido por la lámina Kerr es la siguiente[30]:

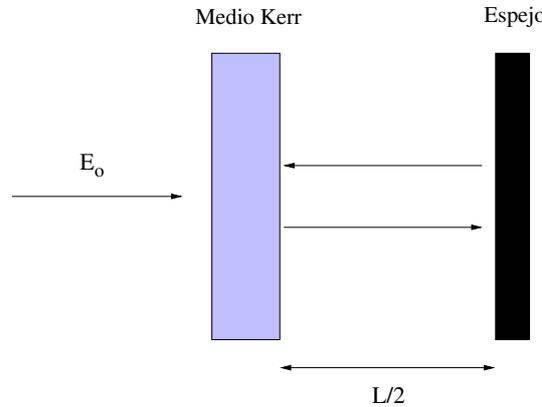


Figura 1.4: Medio Kerr con una realimentación puramente difractiva.

$$\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\phi(x, y, t) - \phi_0}{\tau} + D \nabla_{\perp}^2 \phi(x, y, t) + \alpha I_r(x, y, t) \quad (1.27)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de relajación local,  $D$  es la constante difusiva del medio y  $\phi_0$  es el punto de trabajo de la VOCL.

La distribución de la intensidad de realimentación es debida a la propagación difractiva del campo  $E(x, y, z = 0) = E_o e^{i\phi(x, y)}$  que sale del medio Kerr, se refleja en el espejo e incide nuevamente sobre el medio Kerr. En la aproximación paraxial, la evolución de  $E(x, y, z)$  se describe mediante

$$\frac{\partial E(x, y, z, t)}{\partial z} = \frac{i}{2k_o} \nabla_{\perp}^2 E(x, y, z, t) \quad (1.28)$$

donde  $k_o = \frac{2\pi}{\lambda}$ . La ecuación 1.28 tiene la solución formal:

$$E(x, y, z, t) = e^{\frac{i}{2k_o} \nabla_{\perp}^2 z} E(x, y, z, t) \quad (1.29)$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación 1.27 y llamando  $L$  a la longitud de propagación libre, obtenemos:

$$\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\phi(x, y, t) - \phi_0}{\tau} + D \nabla_{\perp}^2 \phi(x, y, t) + \alpha I_o [ |e^{i \frac{\nabla_{\perp}^2 L}{2k_o}} e^{i\phi(x, y, t)}|^2 ] \quad (1.30)$$

La solución estacionaria homogénea de la ecuación 1.30 es la onda plana correspondiente a  $\phi(x, y) = \phi_0$ .

Cuando consideramos pequeñas perturbaciones  $\phi \ll 1$  podemos linearizar la ecuación 1.30, obteniendo

$$\frac{\partial \phi_q}{\partial t} = \frac{\phi_q}{\tau} + D q^2 \phi_q + \alpha I_o [ |e^{-i \frac{q^2 L}{2k_o}} (1 + i\phi_q)|^2 ] \quad (1.31)$$

para un único modo de Fourier con frecuencia espacial  $q$ .

Debemos destacar que si no hay difracción ( $L = 0$ ), el término de realimentación en la ecuación 1.31 resulta

$$I_r = I_o |1 + i\phi_q|^2 \simeq I_o \quad (1.32)$$

a primer orden en  $\phi_q$ . Es este caso, la modulación de fase no se convierte en una modulación de intensidad. Por lo tanto, la realimentación no es efectiva a este orden y la solución de onda plana es estable. Por el contrario, cuando existe una longitud de propagación libre ( $L \neq 0$ ), la componente de Fourier a la frecuencia  $q$  se desfasa en un factor  $e^{-i \frac{q^2 L}{2k_o}}$  con respecto a la componente continua ( $q = 0$ ), y la intensidad de realimentación resulta ahora en

$$I_r = I_o |1 + i\phi_q e^{-i \frac{q^2 L}{2k_o}}|^2 \quad (1.33)$$

Así, cuando  $\frac{q^2 L}{2k_o} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  o  $\frac{q^2 L}{2k_o} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , con  $k$  entero, la intensidad de realimentación es  $I_r = I_o(1 + 2\phi_q)$  (caso auto-enfocado) ó  $I_r = I_o(1 - 2\phi_q)$  (caso auto-desenfocado) respectivamente a primer orden en  $\phi_q$ . Vemos así que la modulación de fase ha sido convertida completamente en una modulación de amplitud.

Volviendo ahora a nuestro sistema experimental, en un principio incide sobre él una cierta intensidad de luz  $I_o$ , que después de incidir sobre la capa de cristal líquido recorre el circuito de realimentación, y por último incide sobre la capa fotoconductor. Para intensidades  $I_o$  bajas, el aumento del voltaje efectivo aplicado sobre la capa de cristal líquido, debido a la disminución de la impedancia del fotoconductor, no es suficiente para reorientar las moléculas y por lo tanto el frente de onda que viaja en el circuito de realimentación es homogéneo. Cuando  $I_o$  aumenta, llegará un cierto valor umbral para el cual cualquier perturbación en el voltaje efectivo aplicado sobre la capa de cristal líquido será suficiente para reorientar las moléculas, induciendo una diferencia de fase local que en el circuito de realimentación se transformará en una diferencia de amplitud. Dicha diferencia de amplitud disminuirá aún más la impedancia local del fotoconductor, aumentando el voltaje efectivo aplicado a la capa de cristal líquido. De esta manera podemos ver que las perturbaciones se amplifican, inestabilizando el patrón homogéneo. La estructura que se estabiliza, para valores de intensidad de luz cercanos al umbral, es de forma hexagonal[28].

La longitud característica de la estructura que se inestabiliza se selecciona a partir de una competencia entre la longitud difusiva, principalmente en el material fotoconductor,  $l_d = \sqrt{D\tau}$ , con  $D$  y  $\tau$  tal como los hemos definido en la página 21, y la longitud difractiva, que es  $\sqrt{\lambda L}$ . Dado que en las condiciones de laboratorio  $l_d \ll \sqrt{\lambda L}$ , la importancia de la difusión en determinar la escala es despreciable. En este caso, el número de onda seleccionado es

$$q_n = \sqrt{\frac{k_o\pi}{L}(2n+1)} \quad n \text{ par (caso auto - enfocado)} \quad (1.34)$$

$$q_n = \sqrt{\frac{3k_o\pi}{L}(2n+1)} \quad n \text{ impar (caso auto - desenfocado)} \quad (1.35)$$

En particular, la válvula óptica de cristal líquido es auto-enfocada. Sin embargo, se puede demostrar [31] que en una primera aproximación, cambiar el signo de la no linealidad es equivalente a poner en el sistema una longitud  $L$  negativa.

Si bien antes mencionamos que la difusión no interviene en la determinación de la escala de la estructura, sí que tiene un papel determinante a la hora de remover la degeneración en el umbral de la estructura, seleccionando la longitud de onda mayor.

## 1.5 Resultados anteriores

Existen numerosos trabajos en el tema, y todos tienen como punto de partida el artículo publicado por Kibble[2] en el año 1976, en donde propone un modelo sobre el posible origen de las galaxias en una bifurcación con rotura de simetría que podría haber ocurrido en el universo como consecuencia del enfriamiento que siguió al Big-Bang.

Zurek[3], en 1985, traslada las ideas anteriores al campo de la materia condensada, en particular al helio superfluido, estableciendo una analogía entre las estructuras cósmicas y las líneas de vórtices en el helio superfluido. La transición que da origen a éstas es entre  $^4\text{He}$  normal y el superfluido, conocida como la transición  $\lambda$ , y se provoca mediante un cambio brusco en la presión.

En base a estos artículos se han desarrollado diversas simulaciones numéricas, que se encuentran de acuerdo con el modelo teórico, [32] [33], y se han realizado cálculos analíticos en base a ecuaciones modelo que hacen uso de la teoría de campo medio que concuerdan con la ley de escala predicha [34].

Respecto de la parte experimental, el primer sistema en el que se llevo a cabo el experimento fue en cristales líquidos [35] [36], en la transición entre la fase isotrópica y la fase nemática. En éstos se ha estudiado la aparición de defectos, pero no se ha comprobado la ley de escala que propone el modelo.

En el sistema propuesto en primer lugar por Zurek, el  $^4\text{He}$ , se realizó un experimento[37] en el que se comprobó la aparición de defectos al cruzar la línea  $\lambda$  con un cambio brusco a través de una línea cuasisentrópica.

Recientemente, en un experimento en un anillo superconductor con una unión Josephson[38], cruzando la transición con diferentes ritmos de variación de la temperatura, se ha medido la densidad de defectos para cada caso, obteniendo un exponente crítico de -0.27, de acuerdo con el exponente -0.25 predicho en este caso por el modelo.

En los sistemas experimentales anteriores, si bien el cambio de fase se realiza fuera del equilibrio, los estados inicial y final son de equilibrio. En el sistema que estudiamos en la parte II, donde los estados inicial y final no son de equilibrio, se ha llevado a cabo un experimento [39] en el que la realimentación se desplaza una cierta longitud  $l$  de forma transversal, induciendo una no-localidad que estabiliza un único modo en detrimento de la estructura hexagonal que aparece cuando la realimentación es de forma local. En este experimento han medido el número de defectos en función del tiempo de cruce del umbral y el resultado obtenido para la ley de escala, -0.5 para el exponente crítico, está de acuerdo con las predicciones

del modelo.

En general, en los sistemas en que los estados inicial y final no son de equilibrio se cruza la inestabilidad primaria aumentando el parámetro de control, a diferencia de las transiciones de fase dinámicas en las que se reduce. Esto se debe a que en los sistemas disipativos, cuando se aumenta la energía que se le entrega, el sistema se aleja más del equilibrio y aumenta la disipación. Esto último fuerza al sistema a romper una y otra vez las simetrías que poseía el estado de equilibrio. Por el contrario, en los sistemas en equilibrio el origen del desorden son las fluctuaciones térmicas. Cuando la temperatura del sistema baja, estas fluctuaciones se hacen menores y dan lugar a que el sistema se ordene, según características que antes estaban ocultas debido al ruido térmico.

Tanto en las simulaciones numéricas que se han realizado como en los experimentos comentados los defectos después de haber realizado la transición se corresponden con ceros del campo, es decir, puntos del espacio que conservan las simetrías que poseía el estado homogéneo. En nuestro experimento, los defectos del patrón hexagonal son ceros en dos de los tres modos en los que se puede descomponer la estructura, pero el campo total en el defecto es distinto de cero. Esto implica que los defectos en la estructura hexagonal no se corresponden con los “defectos”<sup>4</sup> o ceros del vacío, en el cual la superposición de todos los modos existentes es igual a cero.

Salvo los dos últimos experimentos reseñados, los otros sólo dan idea cualitativa de la densidad de defectos inicial, y en ningún caso se ha medido el exponente de la ley de potencia que sigue la cantidad de defectos en función del ritmo de cruce de la transición. Además, en ningún caso se ha estudiado la dependencia del exponente con el parámetro de disipación.

---

<sup>4</sup>Considerando que los defectos son ceros del campo, se puede denominar defecto a cada posición del estado homogéneo.



## Parte I

# Sistema convectivo de Bénard-Marangoni



## Capítulo 2

# Técnicas experimentales

Fundamentalmente, las técnicas experimentales usadas son las propias y típicas de un experimento de convección de Bénard-Marangoni. En este capítulo nos proponemos describirlas brevemente, y entrar sólo en los detalles diferenciadores respecto a otros experimentos convectivos.

En particular, nos centramos en el proceso de medida, algo relacionado íntimamente con lo que estudiaremos a lo largo de esta memoria, y que tiene como principal característica que la inmensa mayoría de las medidas que hemos hecho son no estacionarias.

### 2.1 Fluido utilizado

Nos interesa cruzar rápidamente una bifurcación con ruptura de simetría en un sistema convectivo de Bénard-Marangoni. La más sencilla de estas bifurcaciones para estudiar desde el punto de vista del análisis es la correspondiente a la inestabilidad primaria, en la que el sistema pasa de un estado homogéneo (conductivo) a una estructura hexagonal (convectiva). Como cruzamos la bifurcación de forma muy rápida, los efectos no lineales podrían llegar a ser importantes, seleccionando transitoriamente otra estructura linealmente inestable. Por lo tanto, es deseable que ésta se encuentre tan separada como sea posible de cualquier otra bifurcación, evitando que dichos efectos o que pequeñas variaciones no deseadas en el parámetro de control nos lleven a una inestabilidad secundaria. Esta ha sido la principal razón para utilizar fluidos con alto número de Prandtl [26].

Como se explicó en la sección 1.4.1, valores altos del número de Prandtl implican que los efectos disipativos viscosos poseen un tiempo característico mucho menor que el asociado con la disipación térmica, por lo que podemos considerar,

en una buena aproximación, que el campo de velocidades sigue al de la temperatura sin retardo en relación a la escala de tiempos del sistema. Debido a esto los efectos térmicos son los dominantes y las consecutivas inestabilidades están más separadas entre sí (ver la sección 1.4.1).

En particular, los experimentos se realizan con aceites de silicona<sup>1</sup>, líquidos que presentan las siguientes ventajas:

- son transparentes a la luz visible (permiten caracterizar el estado del sistema mediante el índice de refracción).
- poseen una gran gama de viscosidades<sup>2</sup>.
- en nuestra situación experimental se encuentran en el régimen de Oberbeck-Boussinesq<sup>3</sup> [40].

Utilizamos aceites de silicona con una viscosidad cinemática nominal de 50, 100 y 350 cSt, cuyas propiedades físicas más importantes se muestran en la tabla 2.1.

	Celda A	Celda B	Celda A
Viscosidad cinemática ( $\nu$ ) [cSt]	50	100	350
Densidad ( $\rho$ ) [Kg $m^{-3}$ ]	963	968	968
Tensión Superficial ( $\sigma$ ) [mN $m^{-1}$ ]	20.8	20.9	21.1
Conductividad Térmica ( $\chi$ ) [W $m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$ ]	0.1505	0.1557	0.16
Coefficiente de Dilatación ( $\alpha$ ) [ $\cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ C^{-1}$ ]	10.6	9.25	9.45
Difusividad Térmica ( $\kappa$ ) [ $\cdot 10^{-7} m^2 s^{-1}$ ]	1.037	1.06719	1.13
Coefficiente Viscosidad / Temperatura ( $d\nu/dT$ ) [cSt $^\circ C^{-1}$ ]	0.59	0.59	0.62
Coefficiente Tensión Sup. / Temperatura ( $d\sigma/dT$ ) [ $\cdot 10^{-5} Nm^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$ ]	7	7.44	7.16
N $^\circ$ de Prandtl ( $\nu/\kappa$ )	482	937	3097

Tabla 2.1: Propiedades físicas más importantes de los fluidos utilizados en los experimentos, a T=25 $^\circ$  C.

<sup>1</sup>Polímero de dimetilsiloxano.

<sup>2</sup>Variando el grado de polimerización.

<sup>3</sup>Es decir, los efectos de la estratificación de densidad sólo son apreciables sobre las variaciones de presión.

## 2.2 Celda convectiva

El fluido es depositado en forma de una pequeña capa sobre una celda como se ve en la figura 2.1, formada por:

- un calentador eléctrico plano del diámetro de la celda, diseñado para tener una distribución homogénea de la temperatura, y conectado a una fuente de alimentación HP E3631A controlada por ordenador.
- una placa metálica de 1.2 cm. de grosor, en contacto por un lado con el calentador, y por el otro con el fluido a estudiar. El material componente es aluminio en la celda A y cobre en la celda B. El grosor se ha elegido teniendo en cuenta que si bien aumentarlo significa contribuir a homogeneizar pequeñas variaciones laterales en la temperatura del calentador, también contribuye a aumentar la inercia térmica del sistema y a disminuir la eficacia del calentador al disipar mayor energía. La cara en contacto con el fluido esta pulida para aumentar su reflectividad en frecuencias ópticas y para evitar perturbaciones en el fluido.
- un recipiente cilíndrico plástico, abierto por arriba, contiene la placa con el calentador. Sus paredes se elevan por encima del conjunto formando la cavidad donde será depositado el fluido. Su difusividad térmica es del orden de la que tiene la silicona, por lo que nos encontramos en un caso intermedio entre los dos comentados en la sección 1.4.1 respecto de la influencia de las paredes del fluido.

El diámetro de la cavidad en la celda A es de 137 mm., mientras que en la celda B es de 127 mm. En la tabla 2.1 se indica que celda se utilizó para cada fluido.

La altura de fluido utilizado es de 1.3 mm. para la silicona de 50 cSt, 1.4 mm. para la silicona de 100 cSt y 1.9 mm. para la silicona de 350 cSt La relación de aspecto física resultante es de 25 en la silicona de 50 cSt, 22 en la de 100 cSt y de 15 en la de 350 cSt

## 2.3 Sistema de observación

La estructura convectiva formada en el fluido cuando se calienta por debajo se visualiza mediante la técnica óptica denominada ombroscopía[41], cuyo esquema se muestra en la figura 2.1.

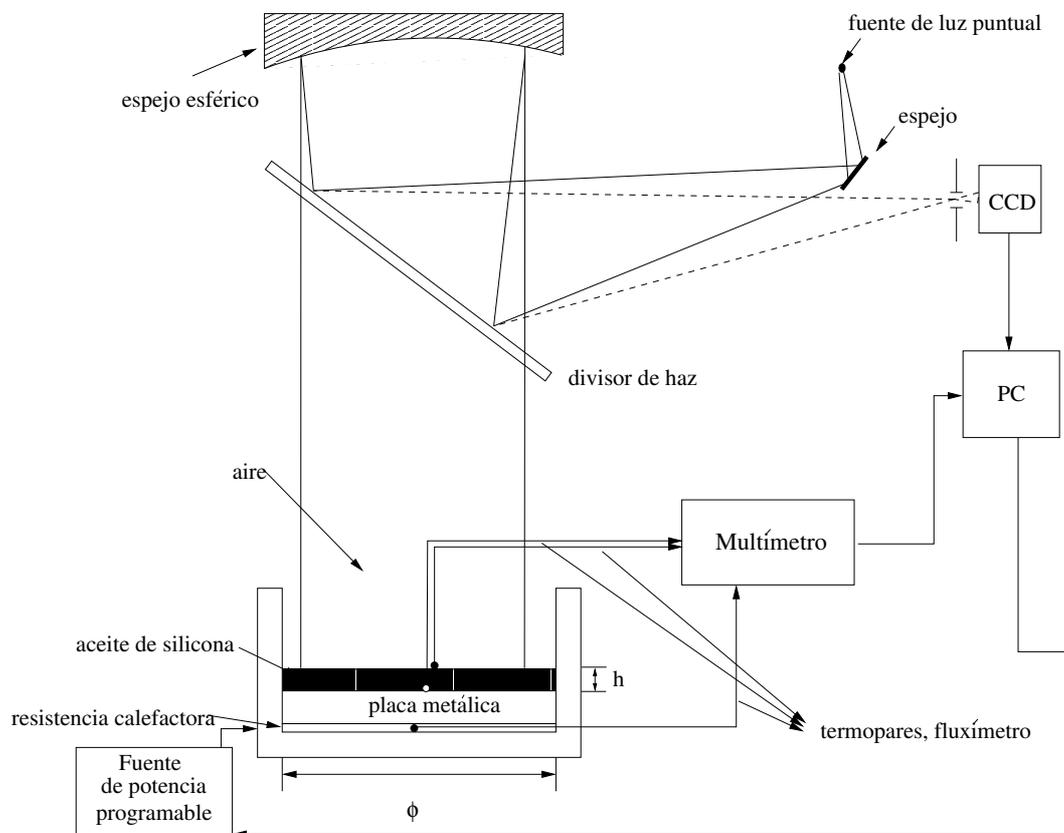


Figura 2.1: Esquema del sistema de observación de la estructura.

La ombroscopía se fundamenta en la desviación de los rayos de luz al pasar a través de una región con un índice de refracción variable.

La luz proveniente de una lámpara halógena se hace pasar a través de un filtrado espacial compuesto por un objetivo de microscopio con una distancia focal de 8 mm. y un diafragma, para conseguir una fuente puntual de luz. El diafragma se coloca en el foco de un espejo esférico de 15.5 cm. de apertura y 1.4 m. de distancia focal. De esta forma la luz reflejada en el espejo emerge paralela e incide sobre la celda, formando un campo luminoso de intensidad prácticamente homogénea, ya que se corresponde con la parte central de una distribución gaussiana. Como el fondo de la celda refleja la luz, ésta atraviesa dos veces la capa de fluido, alejándose de su paralelismo inicial en las regiones con variaciones en el índice de refracción. Estas variaciones actúan como lentes convergentes o divergentes resultando al fin en una modulación espacial en la intensidad del campo luminoso. Si asumimos que los rayos nunca se desvían apreciablemente respecto del eje óptico y que la variación del índice de refracción en el fluido es del mismo orden en todas las direcciones, se puede demostrar que la variación de intensidad está relacionada con la derivada segunda transversal del logaritmo del índice de refracción [42], como se ve en la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = l \int_{\gamma} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \ln(n) dz \quad (2.1)$$

donde  $\gamma$  es el camino recorrido por el rayo de luz, el eje óptico del sistema coincide con el eje  $z$  y  $l$  es la longitud del recorrido. El campo de luz con la modulación de intensidad correspondiente se detecta con una cámara CCD de 512x512. La imagen obtenida es digitalizada en un tarjeta de adquisición de imágenes PIXCI-SV4 controlada por un programa en C que registra las temperaturas y basándose en éstas determina el instante en que se toma la imagen. Posteriormente dichas imágenes se almacenan como un diagrama de niveles de grises con 256 niveles.

El haz de luz proveniente del filtrado espacial no va por el mismo camino por el que regresa desde el divisor de haz para evitar que la primera reflexión sobre éste (luz que aún no ha atravesado el fluido) sature la cámara CCD. Por lo tanto, hacemos que el sistema sea levemente astigmático.

## 2.4 Medidas locales de temperatura y flujo de calor

Las medidas locales de temperatura se realizan mediante termopares. Se han utilizado para medir tanto la temperatura inferior de la placa metálica de la celda como para registrar la temperatura correspondiente a la superficie libre y al fondo del fluido (figura 2.1). Los termopares elegidos son del tipo T<sup>4</sup>, tienen un diámetro menor a 0.13 mm. y utilizan teflón como aislante. Cabe aclarar que los termopares que miden sobre la superficie libre y sobre el fondo del fluido se utilizan sólo en medidas independientes para cada una de las potencias utilizadas, para evitar la perturbación que produciría sobre la estructura. Se hace difícil cuantificar la perturbación del termopar, pero considerando que estudiamos la aparición de la estructura a partir de una ruptura en la simetría, ninguna perturbación se puede considerar despreciable.

El flujo de calor a través del fluido se mide mediante un fluxímetro colocado debajo de la placa metálica, únicamente en la celda B.

Tanto los termopares como el sensor de flujo de calor se conectan a un sistema de adquisición de datos Standford SR630 controlado por ordenador, de 16 canales, con una resolución de  $\pm 0.1$  °C.

## 2.5 Proceso de medida

En el sistema que hemos utilizado es importante resaltar algunas características de la dinámica de la bifurcación respecto de los tiempos característicos. En un sistema ideal análogo al nuestro, los cambios en el parámetro de control tienen efecto sobre la capa de fluido en tiempos característicos que son del orden del tiempo de difusión vertical de la temperatura. Mientras tanto, el tiempo característico requerido por la estructura para correlacionarse es del orden del tiempo característico de aniquilación de defectos  $t_d$ .

Una primera estimación de este último tiempo la podemos hacer estimando la velocidad  $v_d$  de los defectos a partir del experimento. La distancia media entre defectos la podemos estimar considerándola igual a la longitud de correlación  $l$ . De esta forma,  $t_d$  se puede calcular como

$$t_d = \frac{l}{v_d} \quad (2.2)$$

---

<sup>4</sup>Compuestos de Cobre-Constantán.

Cabe aclarar que el movimiento de los defectos penta-hepta ha sido ampliamente estudiado, tanto de forma teórica o en simulaciones numéricas[43][44][45] como experimentalmente[46][47]. En particular, se ha probado que la velocidad de los defectos penta-hepta no es uniforme y que depende de cuan alejado esté el número de onda dominante en la estructura del número de onda con mayor estabilidad[47]. Nosotros hemos estimado la velocidad de los defectos por observación directa de los casos límites, obteniendo una velocidad promedio para cada caso.

Así, si se produce un cambio en el parámetro de control en un tiempo mayor al tiempo característico de aniquilación de los defectos, el sistema podría reajustarse al nuevo valor del parámetro de control todo el tiempo, y el sistema evolucionaría cercano al estado estacionario. Por el contrario, si el tiempo característico en el que se cambia el parámetro de control es mucho menor que el tiempo de evolución de la estructura, la transición será como una transición “instantánea”, ya que llegará un momento en que la longitud de correlación no tendrá la rapidez necesaria para adaptarse al valor estacionario correspondiente con el parámetro de control.

Con esto queremos subrayar la importancia de la existencia de al menos dos escalas de tiempos diferentes, evitando que el tiempo utilizado por los defectos para aniquilarse sea el mismo que el necesitado por la estructura para aparecer. Justamente esto último permite realizar mediciones en un rango de tiempo de cruce del umbral que va desde el tiempo menor para que aparezca la estructura (del orden del tiempo de difusión vertical de la temperatura) hasta el tiempo característico que necesita un defecto en desaparecer.

El intervalo de tiempos mencionado en el párrafo anterior se ve reducido en el experimento a uno más pequeño. Inferiormente, un límite para el tiempo mínimo de cruce del umbral está dado por la inercia térmica de la placa metálica, mientras que para grandes tiempos de cruce del umbral la cota está impuesta por una deriva de la estructura del centro a la periferia de la celda, originada por un gradiente térmico horizontal. Los mayores tiempos utilizados son tales que el desplazamiento debido a la deriva de la estructura es menor a una longitud de onda.

En el proceso de medida partimos de un estado estacionario justo por debajo del umbral de convección, resultado de aplicar una potencia  $P_1$  en el sistema. Se aumenta la potencia suministrada a un valor  $P_2$ , de manera que la placa metálica, en los tiempos seleccionados en el experimento, responde aumentando su tempe-

ratura  $T_1$ <sup>5</sup> linealmente (con una pendiente que depende de la diferencia  $(P_2 - P_1)$ ). Para cada una de las viscosidades se elige un valor de temperatura para el cual la estructura está completamente formada y en este punto se toma la imagen correspondiente a la medida. En todos los casos estudiados la temperatura reducida  $\epsilon = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}$  es menor que 0.2. Definimos tiempo de cruce  $\tau_q$  como el tiempo que tarda  $T_1$  en llegar al valor de temperatura fijo elegido para esa viscosidad, habiendo partido desde el estado estacionario debajo del umbral de convección. El valor de temperatura fijo se obtiene de medir en el estado estacionario para qué temperatura la estructura se ha formado completamente, más un cierto margen que tiene en cuenta que las medidas se realizan en situaciones no estacionarias por lo que los perfiles de temperatura no son exactamente los mismos. El proceso se repite diez veces para cada escalón de potencia, un número de compromiso entre la disminución del error estadístico y el tiempo empleado en las medidas (del orden de la hora para cada una de ellas). En cada una de las viscosidades estudiadas se analizan diez pendientes distintas, con lo que el número total de medidas en una viscosidad es de cien, dando cada una de ellas una imagen a ser analizada.

En principio, el  $\tau_q$  depende de las temperaturas inicial y final que se elijan. Para suprimir esta dependencia se realizan medidas adicionales en las que se registra la diferencia de temperaturas  $\Delta T$  aplicada sobre la capa de fluido durante el escalón de potencia, como la que se muestra en la figura 2.2. Si bien los valores de la temperatura tienen fluctuaciones importantes, debidas principalmente a las variaciones del termopar colocado en la interfaz líquido-aire, se puede ver que el comportamiento global de la diferencia de temperaturas aplicada a la capa de fluido sigue un crecimiento lineal.

Ajustando los datos medidos a una recta se obtiene la pendiente de la curva de diferencia de temperatura aplicada vs. tiempo

$$\frac{1}{\tau_v} = \frac{[\Delta T(\tau_q) - [\Delta T(0)]]}{\tau_q} \quad (2.3)$$

cuya inversa  $\tau_v$  juega el mismo papel que el tiempo de cruce pero no depende de los puntos inicial y final.

Se realizan cuatro medidas con los termopares en el fluido para cada uno de los escalones de potencia escogidos con anterioridad. De esta manera es que se obtienen cuatro valores de la función  $\tau_v(\tau_q)$  que luego, después de repetirlo para los diez escalones, se transforman en cuarenta puntos que nos permiten ajustar la función que convierte  $\tau_q$  en  $\tau_v$  (figura 2.3).

<sup>5</sup>Temperatura medida en la superficie inferior de la placa metálica.

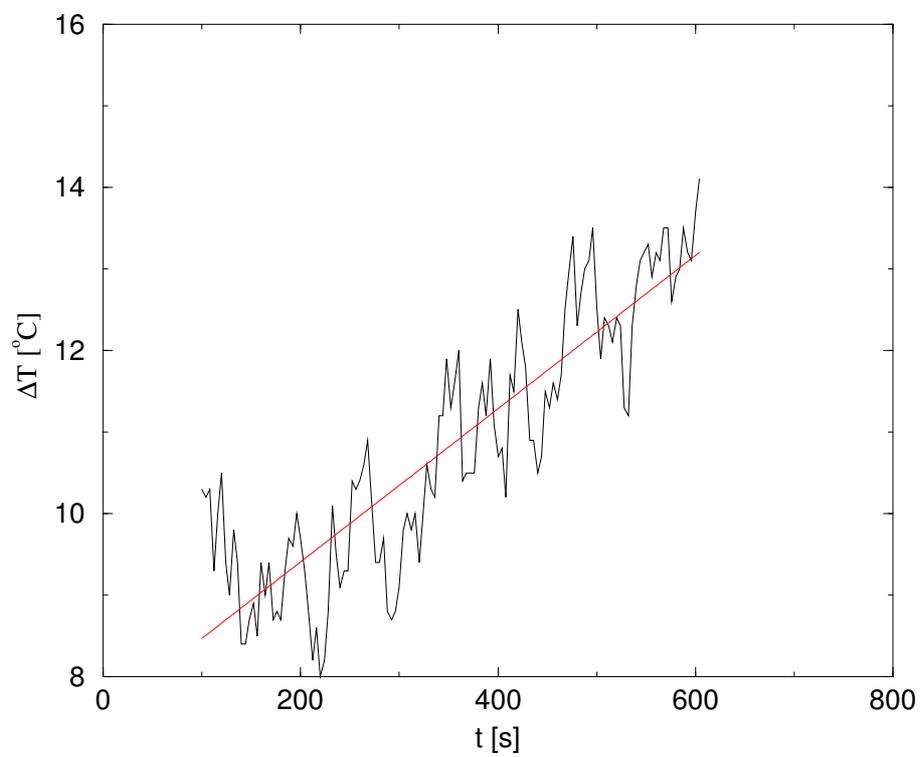


Figura 2.2: Diferencia de temperatura medida durante un escalón de potencia.

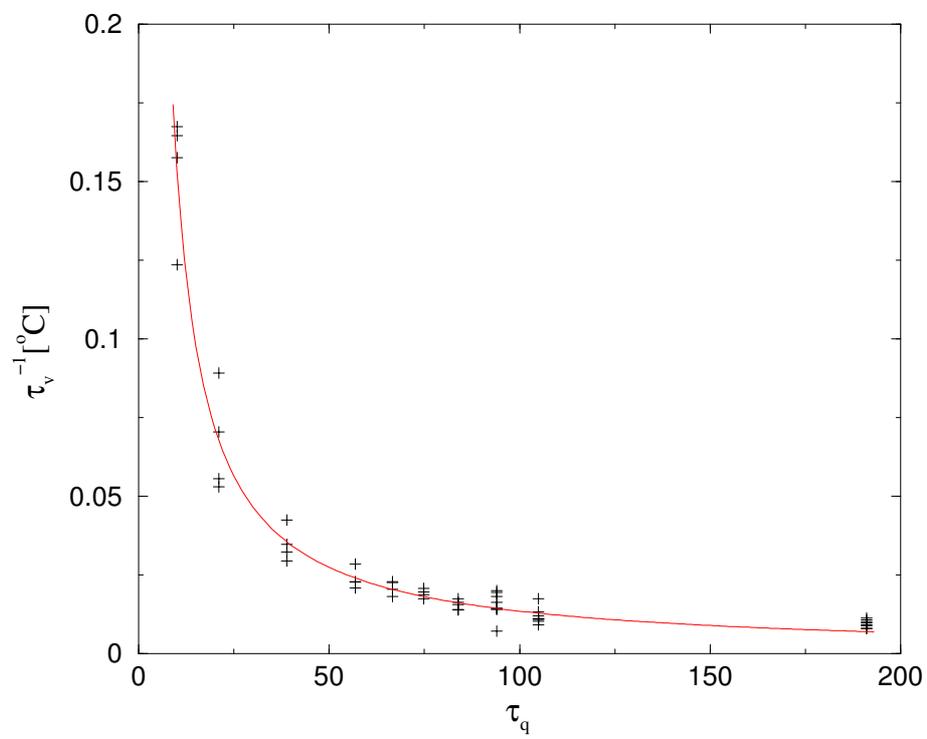


Figura 2.3: Ajuste de la curva que convierte  $\tau_q$  (adimensionalizado con el tiempo de difusión vertical de la temperatura) en  $\tau_v$ .

Un segundo proceso de medida utilizado en el mismo sistema experimental se centra en la dinámica de la aparición de un defecto en la estructura.

Para ello se sigue un procedimiento experimental similar al anterior: partir de un estado estacionario justo debajo del umbral convectivo y aplicar un escalón en la potencia entregada. Como estamos interesados en el proceso de formación de un defecto penta-hepta en la estructura hexagonal, tomamos imágenes de la celda convectiva a intervalos regulares de tiempo hasta que la estructura está totalmente formada, para luego ser analizadas como se describirá en el capítulo 3.



## Capítulo 3

# Tratamiento de datos

En este trabajo el tratamiento de los datos merece un capítulo adicional debido a que en el análisis de una parte de las imágenes se ha empleado un método implementado por nosotros mismos, el método geométrico. También se explica en otra sección el método basado en la demodulación compleja, utilizado con otra parte de las imágenes. Por último, se detalla el procedimiento seguido en el análisis estadístico de los datos.

### 3.1 Procesado de las imágenes

Para procesar las imágenes hemos utilizado dos métodos distintos, dependiendo del objetivo buscado. Para el recuento de defectos, sin consideraciones sobre la dinámica de formación, se ha utilizado un método basado exclusivamente en consideraciones geométricas. Para el estudio de la dinámica de la aparición de los defectos al formarse la estructura hemos utilizado la demodulación compleja, método que nos permite identificar y estudiar las regiones singulares de cada modo.

#### 3.1.1 Método geométrico

En diversas ocasiones[48][22][23], la utilización de un método basado en consideraciones geométricas de las estructuras ha permitido obtener características de los patrones hexagonales formados en la convección de Bénard-Marangoni.

En este caso, el tratamiento de las imágenes tiene como objetivo transformar una imagen captada por la cámara CCD, que muestra el campo de intensidad de luz proveniente de la ombroscopía, en un ente matemático, del que se pue-

da obtener de una manera sencilla la información necesaria para caracterizar la estructura.

A partir de dicho ente matemático, se debería poder obtener:

- cantidad de lados de cada polígono.
- identificación de los polígonos que se encuentran en el borde de la estructura.
- identificación de los polígonos primeros vecinos a un tercero.

La primera consideración que debe hacerse está relacionada con la imagen que se obtiene de la ombroscopía. Normalmente, la manera en que se visualiza las estructuras convectivas es del estilo de la figura 3.1. En ella se ven como zonas iluminadas las correspondientes a los bordes de los polígonos, donde el fluido está descendiendo. Cambiando el enfoque del objetivo de la cámara CCD, se puede obtener una figura en la que las zonas iluminadas correspondan a la región central de los polígonos, o lo que es lo mismo, el lugar por donde asciende el fluido. La figura 3.2 muestra un ejemplo de esto último. Ya que es equivalente analizar la estructura partiendo de una u otra imagen, como se muestra en la página 44, se elige la descrita en segundo lugar por sus ventajas a la hora de identificar la información que nos interesa.

La imagen mostrada en la figura 3.2 es la entrada de un programa hecho en MATLAB. A continuación se describen el procedimiento seguido por dicho programa para procesar la información contenida en la imagen.

En primer lugar, filtramos el ruido e identificamos la zona de la imagen ocupada por la celda. Después de esto obtenemos la posición de los máximos relativos de intensidad que se encuentran dentro de la celda, y esta posición la tomamos como el centro de cada uno de los polígonos que componen la estructura.

En segundo lugar, encontramos los primeros vecinos de cada máximo. Para esto, nos concentramos en un determinado máximo del cual queremos averiguar su número de vecinos. Seguidamente, se une mediante segmentos dicho máximo con todos los de su alrededor, y se construyen también las mediatrices de cada uno de estos segmentos. Ahora debemos elegir de todos los polígonos cuyos lados son las mediatrices, y que contienen el máximo principal, aquel con la superficie mínima. Dicho polígono es la celda de Voronoi<sup>1</sup>[49] del máximo principal. Cada máximo secundario asociado a una mediatriz que es lado de este polígono, es primer vecino del máximo principal. En la figura 3.3 se muestra un ejemplo de

---

<sup>1</sup>También denominada celda de Wigner-Seitz en teoría de sólidos.

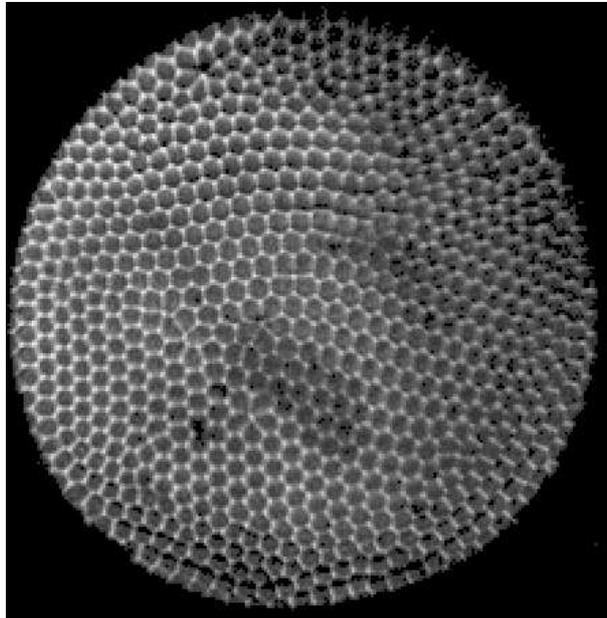


Figura 3.1: Figura del patrón en donde las zonas iluminadas se corresponden con las zonas frías.

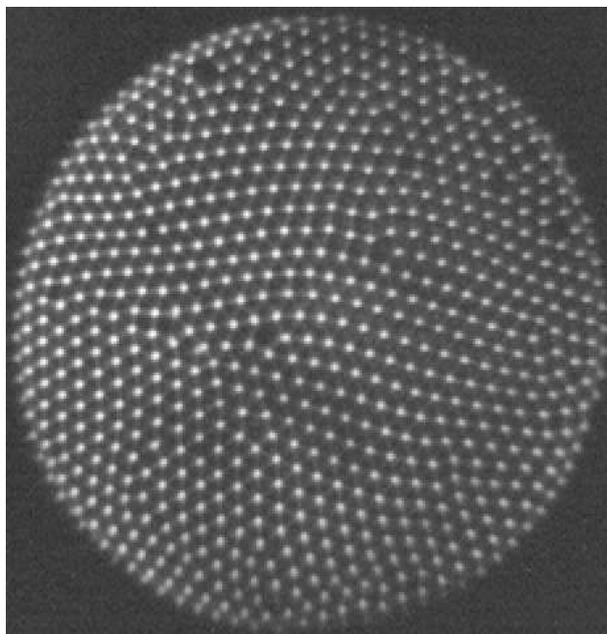


Figura 3.2: Figura del patrón en donde las zonas iluminadas se corresponden con las zonas calientes.

la construcción que permite encontrar la celda de Voronoi de un determinado máximo.

En la figura 3.4 se puede comprobar que las celdas de Voronoi construidas utilizando el programa coinciden con los hexágonos que muestra la estructura si se escala la imagen de manera conveniente. Esta corrección de escala se debe a la diferente focalización de la cámara CCD entre la imagen que tiene los puntos calientes iluminados y la que ilumina las zonas frías. Esto es debido a que el sistema de observación es astigmático, lo que implica que diferentes focalizaciones deforman la imagen en un eje o en el otro. Es importante notar que esta deformación en la imagen no invalida el método, ya que el número de lados de un cierto polígono no cambia en una transformación de escala si la definición de la imagen es suficientemente buena.

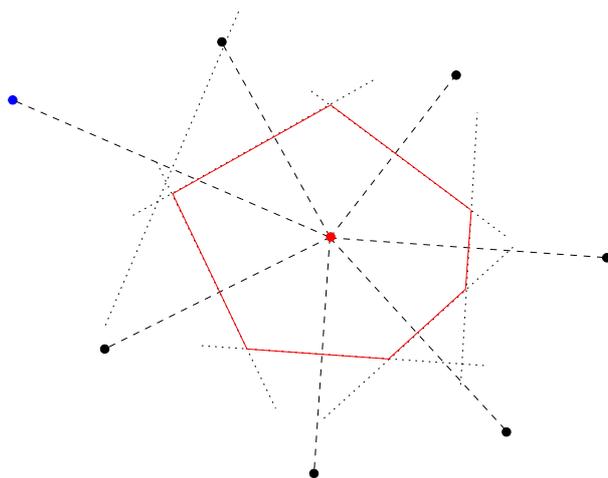


Figura 3.3: Construcción de una celda de Voronoi. En primer lugar, trazamos las uniones entre el punto central (en rojo en la figura) y todos sus vecinos (línea de trazos). Posteriormente, se trazan las mediatrices a las uniones anteriores (líneas de puntos), obteniendo un polígono cerrado (también en rojo) conteniendo el punto central, que es la celda de Voronoi correspondiente. El punto coloreado de azul no es primer vecino del punto central, ya que su mediatriz correspondiente no es un lado de la celda de Voronoi.

Probado este hecho, se puede deducir que es equivalente la información obtenida a partir de la focalización de los puntos calientes o de las zonas frías. De aquí en adelante nos referiremos indistintamente a puntos con un número dado de primeros vecinos ( $n^\circ$  de coordinación) o a polígonos con ese mismo número de lados.

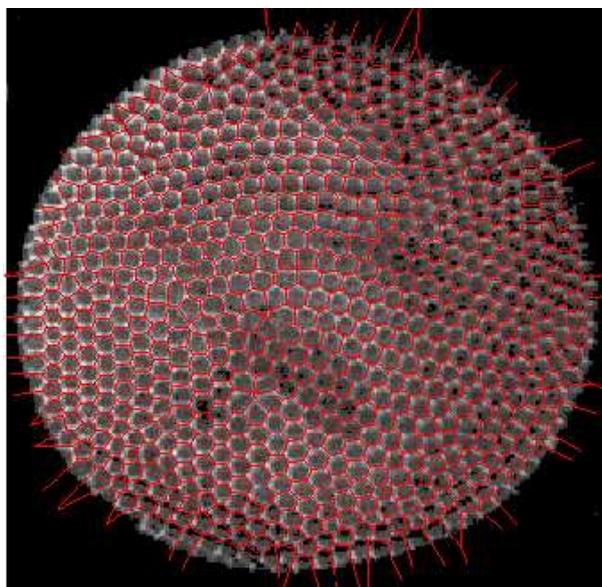


Figura 3.4: Superposición de la estructura original con la construida a partir de las correspondientes celdas de Voronoi de cada zona caliente (en rojo).

Conociendo cuales son los primeros vecinos de cada máximo, que etiquetamos arbitrariamente, construimos la matriz de adyacencias<sup>2</sup> correspondiente a partir de la cual es una cuestión de álgebra elemental obtener el número de hexágonos, pentágonos, heptágonos, penta-heptas, etc., volviéndose más complejo el cálculo a medida que el conjunto de polígonos buscado tiene una descripción más compleja.

Finalmente, se identifican los polígonos exteriores para poder descartarlos y tener en cuenta únicamente los polígonos encontrados fuera de la frontera de la estructura. Esto último pretende eliminar causas que no pretendemos tener en cuenta en este trabajo, como es la influencia directa de las paredes ya comentada en el apartado 1.4.1.

### 3.1.2 Demodulación compleja

La demodulación compleja[50][51] es un método que mediante el uso de la transformada de Fourier separa los modos que componen una imagen. Una estructura hexagonal, como la que aparece en la convección de Bénard-Marangoni cerca del umbral, se puede considerar como la superposición de tres modos de igual módu-

---

<sup>2</sup>Para construirla asociamos el número de fila y columna a un determinado máximo y luego se hacen unos los elementos correspondientes a máximos primeros vecinos y ceros todos los otros.

lo, rotados entre sí  $120^\circ$ . Por lo tanto, podemos describir la señal bidimensional medida en una imagen como:

$$S(\vec{r}) = A_1(\vec{r})e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2(\vec{r})e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r})} + A_3(\vec{r})e^{i(\vec{k}_3 \cdot \vec{r})} + C.C. \quad (3.1)$$

donde  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$  y  $\vec{k}_3$  son vectores que forman entre sí ángulos de  $120^\circ$ . Con el método se puede obtener, si se cumplen ciertas condiciones que enumeraremos en los párrafos siguientes, las amplitudes complejas de los modos:  $A_1(\vec{r})$ ,  $A_2(\vec{r})$  y  $A_3(\vec{r})$ .

La forma de escribir la señal en la ecuación 3.1 sugiere dos escalas diferentes en el problema. Una de ellas correspondiente a la longitud característica asociada a los vectores  $\vec{k}$ , y la otra relacionada con las variaciones de las amplitudes  $A$ , que debe ser mucho mayor que la escala anterior para que la descripción mediante tres modos no pierda sentido.

Para ilustrar el método, tomemos como imagen de entrada la que se muestra en la figura 3.5(a), que contiene un defecto penta-hepta. Para hacer la transformada de Fourier de la estructura multiplicamos la imagen original por una ventana tipo Hamming (ver referencia [52]). De esta forma, cuando aplicamos la transformada de Fourier a la imagen anterior, obtenemos la figura 3.5(b), en la que se ven seis máximos principales, correspondientes a los tres modos dominantes en la estructura hexagonal junto a sus complejos conjugados.

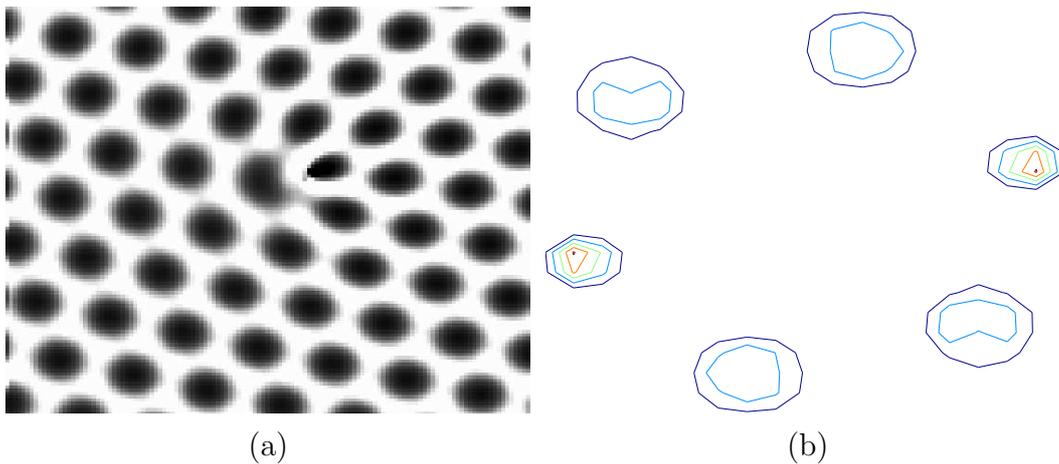


Figura 3.5: (a) Imagen original de una estructura hexagonal con un defecto penta-hepta. (b) Transformada de Fourier de (a).

En una estructura real, cada máximo en la transformada de Fourier no se compone de un único modo, sino que esta formado por una banda de modos excitados,

que se corresponde con el ancho en los picos de la figura 3.5(b). Esto se debe a que en cada modo existen modulaciones de onda larga que inducen variaciones pequeñas en el vector de onda local o en la amplitud, resultado de superponer varios modos con un vector de onda semejante, como sucede en un batido con la onda envolvente. Un requerimiento para poder aplicar el método es que las bandas asociadas a cada máximo principal no se superpongan (not-aliasing) unas con otras dentro del límite correspondientes al ruido del sistema, ya que esto impide separar el comportamiento de los modos principales individualmente.

Para aislar un modo particular aplicamos una translación a la imagen de manera que el modo seleccionado quede en el origen de coordenadas y luego multiplicamos por un filtro pasabajos tipo butterworth. Así, obtenemos una figura en la que se puede ver únicamente el modo en el que estamos interesados, desplazado al centro, con lo que hemos eliminado la variación periódica en el espacio real asociada al vector  $\vec{k}$  correspondiente al modo en la ecuación 3.1. Cuando antitransformamos obtenemos las amplitudes complejas de cada modo, que para mostrarlas las hemos separado en amplitud y fase, figuras 3.6(a)(c)(e) y 3.6(b)(d)(f) respectivamente, habiendo antes dividido por la ventana por la que habíamos multiplicado originalmente. Con respecto a los gráficos de la fase, cabe aclarar que debido a que son obtenidas a partir de una función multivaluada como es el arcotangente (extendida de  $-\pi$  a  $+\pi$ ), se producen ciertas discontinuidades en el gráfico de niveles de grises asociadas a que se utiliza sólo una rama de la función. Debemos tener presente que las discontinuidades asociadas a defectos en los modos son aquellas en las que la integral del gradiente de la fase en un circuito cerrado es diferente de cero. Esto sucede cuando la línea que sigue la discontinuidad termina en algún punto.

Cuando agregamos a cada modo reconstruido la variación de los vectores  $\vec{k}$ , obtenemos las imágenes mostradas en la figura 3.7. Se puede ver que en la posición del defecto penta-hepta dos de los modos tienen una dislocación (figura 3.7(a)(c)), mientras que el modo restante no muestra ningún punto singular (figura 3.7(b)). Como la dislocación se corresponde con una singularidad en la fase, es necesario que la amplitud asociada sea cero en ese punto para preservar la continuidad del campo físico. Por lo tanto, buscar los ceros en la amplitud de los modos es un método relativamente práctico de identificar defectos.

Otra forma que hemos utilizado en el capítulo 9.6 para identificar defectos se basa en realizar la integral del gradiente de la fase en un circuito cerrado. Como hemos visto en la sección 1.3, dicha integral será diferente de cero sólo si encierra un defecto. Si elegimos un circuito suficientemente pequeño, tendremos

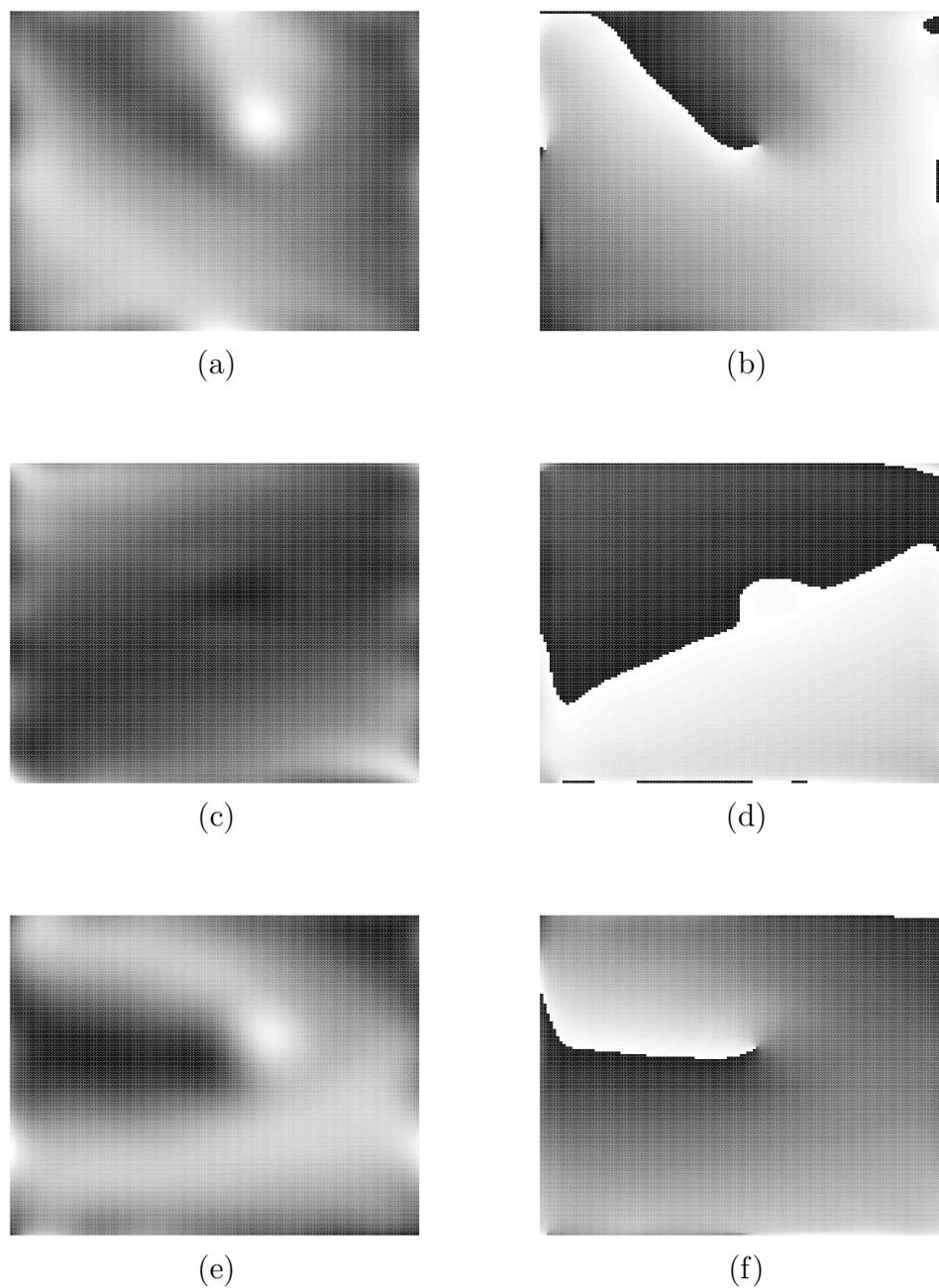


Figura 3.6: Amplitudes y fases de cada uno de los modos de la imagen 3.5(a). (a)(c)(e) Amplitudes de los modos y (b)(d)(f) sus correspondientes fases.

que la integral será cero en todos los puntos a excepción de aquellos en donde se encuentre un defecto.

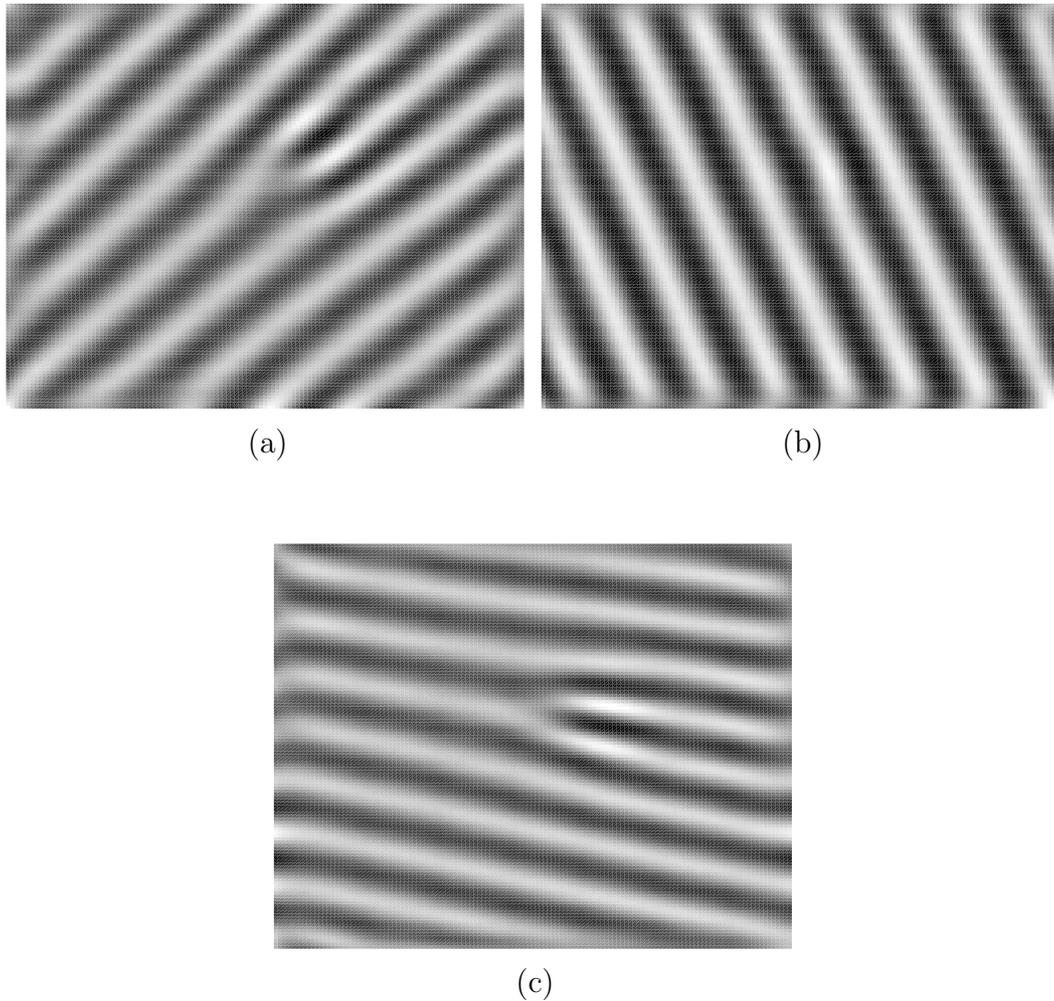


Figura 3.7: Modos reconstruidos a partir de las amplitudes y las fases mostradas en la figura 3.6.

Una estructura con diferentes dominios se corresponderá con una transformada de Fourier en la que aparecerán tantas triadas de modos como dominios haya en la imagen. Si bien en principio esto no impide aplicar el método, sí que habrá una probabilidad mayor de tener dos modos cercanos entre sí, haciéndonos imposible separar las contribuciones individuales de cada modo.

En nuestro caso en particular, cuando deseamos analizar la imagen de la celda completa después de haber cruzado el umbral rápidamente, la cantidad de dominios que aparecen nos da como resultado en la transformada de Fourier un

círculo completo de modos, cuyo radio se corresponde con el número de onda que se ha inestabilizado. Por lo dicho en el párrafo anterior, esto nos impide identificar las contribución de un modo individual.

Sin embargo, cuando nos interesa estudiar la dinámica de un defecto en particular que ha aparecido en la estructura, podemos restringirnos a una zona alrededor del defecto en la cual exista un único dominio. Esto nos permite utilizar éste método y podemos así investigar cómo cada modo evoluciona al formarse un defecto en la estructura que aparece.

### 3.2 Recuento de defectos en el método geométrico

En las estructuras estudiadas hay un claro dominio de los hexágonos, hecho totalmente esperable ya que la inestabilidad primaria en la convección de Bénard-Marangoni se corresponde con una estructura hexagonal. Partiendo de este punto, nos queda discutir a qué polígono o conjunto de ellos vamos a considerar como un defecto individual.

En una estructura hexagonal de extensión infinita, el defecto con mayor tiempo de vida media es el defecto penta-hepta, aquel formado por un pentágono y un heptágono, y en este caso no hay duda sobre qué polígonos se corresponden con un defecto individual. Por tiempo de vida media del defecto entendemos el tiempo medio que tarda un defecto en encontrar otro con el que se aniquile o en desaparecer en las paredes de la celda.

Además del hecho de estudiar estados transitorios tenemos, como en toda situación real, un patrón finito con unas condiciones de contorno determinadas, en nuestro caso circulares. Todo esto hace posible la aparición de polígonos con números de lados distintos de los comentados anteriormente o pentágonos y heptágonos independientes. En esta situación el recuento de defectos se vuelve confuso y se hace necesario un estudio topológico más completo para determinar qué polígono o qué grupo de ellos constituye un defecto unidad.

En una primera aproximación, y considerando que el número de polígonos con un número de lados distinto de seis esta formado mayoritariamente por pentágonos y heptágonos, usamos tres criterios distintos para decir que un polígono constituye un defecto:

1. los puntos con un número de primeros vecinos igual a cinco (los más numerosos después de los hexágonos).

2. los puntos con un número de coordinación igual a siete (asociados en su mayoría a defectos penta-hepta).
3. los puntos con un número de coordinación distinto de seis.

Éste método nos permite trabajar con una cantidad intensiva asociada al número de defectos, como es la densidad de defectos  $\rho = \frac{N_{defectos}}{N_{poligonos}}$ .

Basándonos en los resultados obtenidos (ver capítulo 4.1), estos tres métodos se muestran válidos para medir el exponente buscado, ya que se muestra independiente del método utilizado. De notar diferencias importantes en su valor cuando pasamos de un método a otro se haría imprescindible una identificación más detallada de los defectos.

Cabe señalar que la longitud de correlación es una cantidad que nos proporciona una información equivalente a la que nos da el número de defectos, en el supuesto de que éstos se encuentren distribuidos al azar.

Es importante destacar que para el recuento de defectos la estructura determina un límite a su densidad (no puede ser mayor que uno), hecho que impone una longitud de correlación mínima detectable igual a la longitud de onda de la estructura y que se conoce en la literatura como “coarse-graining”.

### 3.3 Análisis estadístico

En esta sección se hace un análisis de las características estadísticas del número de defectos en un sistema convectivo de Bénard-Marangoni, junto con el estudio del error que lleva asociado esta cantidad y sus causas.

El número de defectos en el estado transitorio después del cruce de una inestabilidad es estadístico, puesto que está relacionado con las fluctuaciones de los campos termodinámicos antes de la transición. Esto debe tenerse en cuenta al hacer un análisis de los errores. Como el número de defectos es elevado puede aplicarse el teorema central del límite<sup>3</sup>. Además, en nuestro sistema, para reducir el error estadístico hacemos diez medidas para cada valor de  $\tau_v$ , como se muestra en la figura 3.8.

Como también se ve en la figura 3.8 los valores de  $\tau_v$  cambian de una medida a otra cuando se está entregando una misma potencia al sistema. Esto se debe a que dicho tiempo se determina en cada caso cuando el sistema alcanza una determinada temperatura (ver sección 2.5), y teniendo en cuenta que la superficie

---

<sup>3</sup>Permite aproximar todas las distribuciones de probabilidad a gaussianas

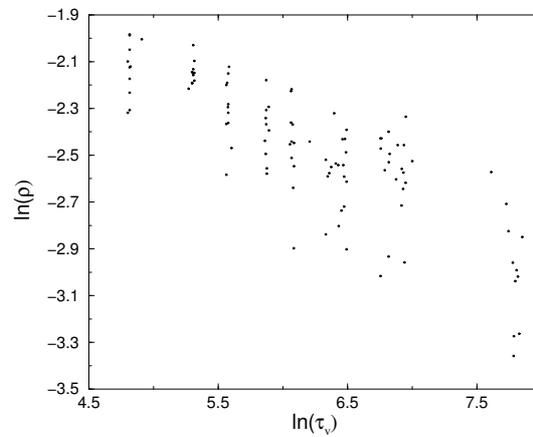


Figura 3.8: Figura que muestra las mediciones realizadas en una viscosidad en particular (en este caso 100 cSt.), sin tratamiento posterior (adimensional).

superior de la capa de fluido está abierta a la atmósfera es lógico esperar pequeñas variaciones en el tiempo que se tarda en alcanzarla. Para minimizar esta causa de error se han hecho las medidas mediante un programa en C ejecutado durante las noches.

Dado que los errores están presentes en ambas coordenadas para la regresión se utiliza la subrutina estándar 15.3 de Numerical Recipes in Fortran 77[53] que los tiene en cuenta a ambos.

---

## Capítulo 4

# Resultados y discusión

Es este capítulo se muestran dos conjuntos de resultados, ambos referidos a la aparición de defectos al cruzar la transición conductiva-convectiva en un tiempo finito. En primer lugar se muestran las estadísticas de los recuentos de la densidad de defectos en función de  $\tau_v$ , mientras que seguidamente se hace un estudio sobre la dinámica de aparición de los defectos en la estructura.

### 4.1 Recuento de defectos en la formación de la estructura

A continuación se muestran las curvas de densidad de defectos  $\rho = \frac{N_{defectos}}{N_{poligonos}}$  versus  $\tau_v$  (figuras 4.1, 4.2 y 4.3) para las tres viscosidades estudiadas, mostrando en cada una de ellas los resultados obtenidos después de aplicar cada uno de los métodos explicados en el apartado 3.2.

La adimensionalización en el eje del tiempo se realiza con el tiempo de difusión vertical de la temperatura, después de lo cual se transforma  $\tau_q$  en  $\tau_v$ , según se explica en el apartado 2.5. La cantidad  $\tau_v$  se adimensionaliza con la diferencia de temperaturas crítica. El número de defectos se normaliza con el número total de polígonos en la celda.

Con respecto al error cometido en las medidas, el primer dato a tener en cuenta es la cantidad de polígonos en la celda, que nos dará el tamaño de la muestra sobre la que se ha medido. En el caso de las siliconas de 50 y 100 cSt. el número de polígonos es del orden de 450, mientras que en la silicona de 350 cSt. éste número es de 250. Sobre dicho número se realiza la estadística en las diez medidas correspondientes a un único  $\tau_v$ , ya que la resta de los polígonos exteriores

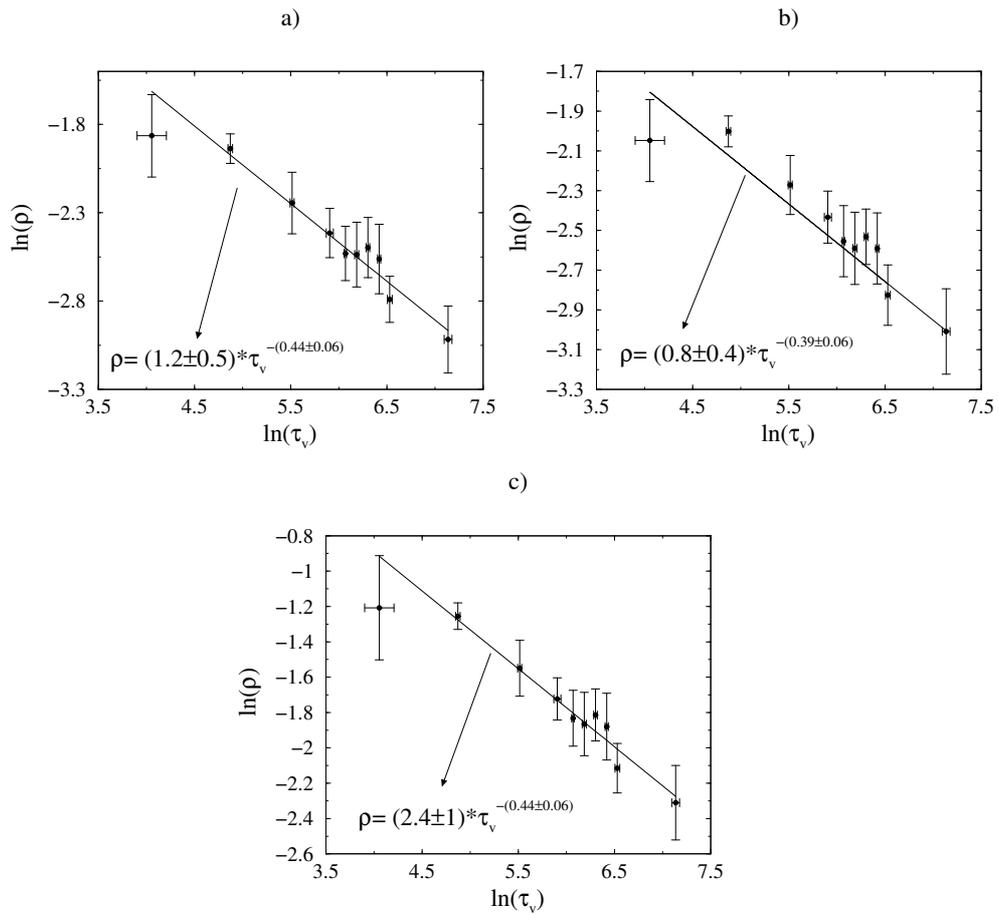


Figura 4.1: Densidad de defectos en la silicona de 50cSt. en función de  $\tau_v$ , en formato log-log, para los diferentes métodos de recuento: a) considerando defectos los pentágonos; b) considerando defectos los heptágonos y c) considerando defectos todos los polígonos no hexagonales.

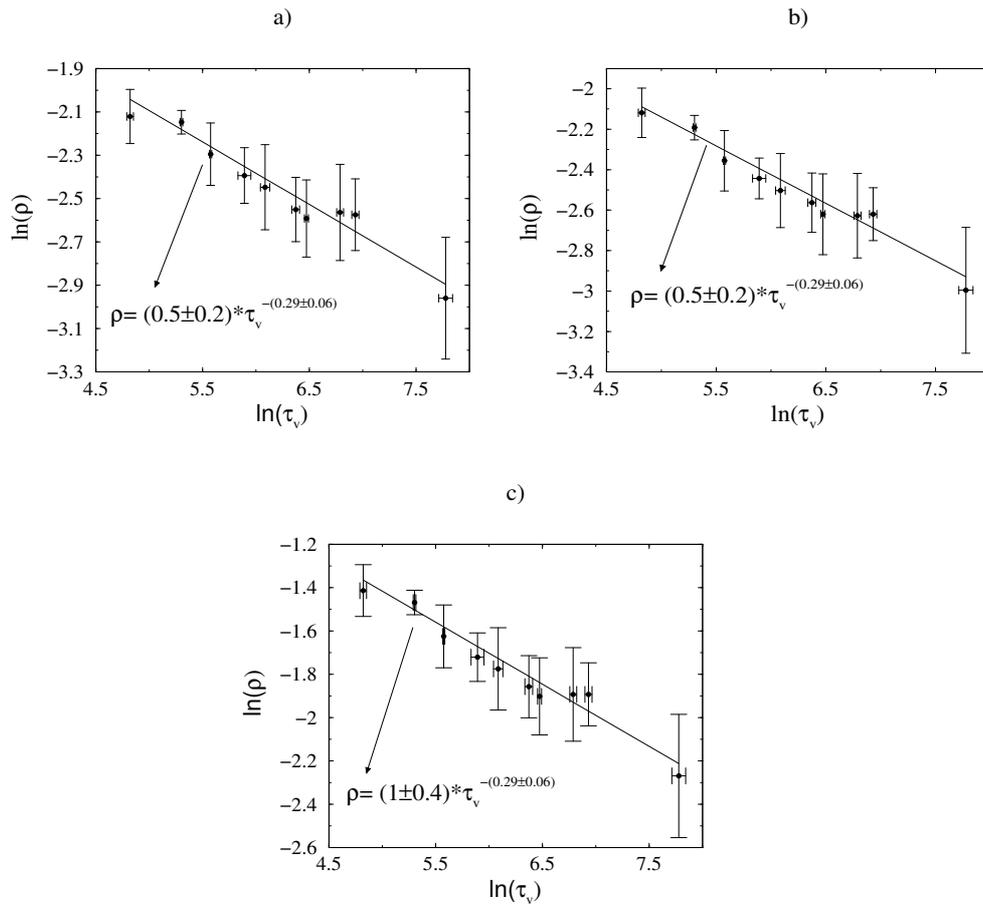


Figura 4.2: Densidad de defectos en la silicona de 100cSt. en función de  $\tau_v$ , en formato log-log, para los diferentes métodos de recuento: a) considerando defectos los pentágonos; b) considerando defectos los heptágonos y c) considerando defectos todos los polígonos no hexagonales.

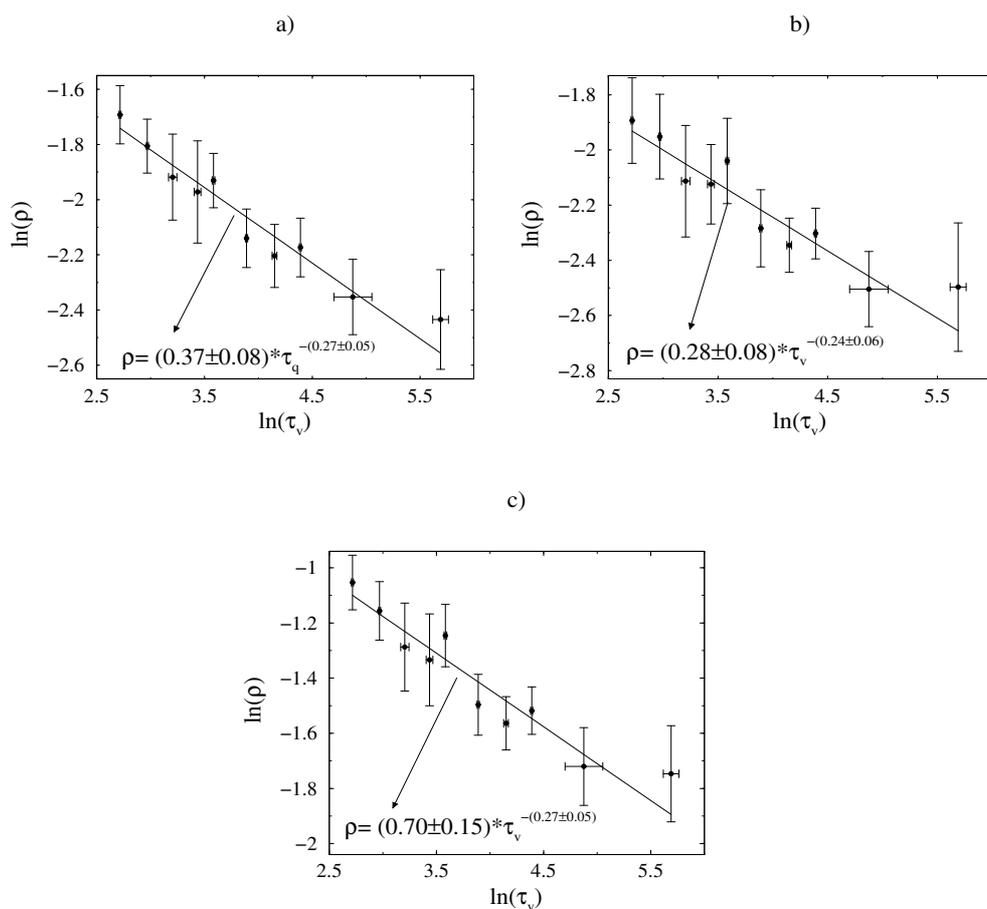


Figura 4.3: Densidad de defectos en la silicona de 350cSt. en función de  $\tau_v$ , en formato log-log, para los diferentes métodos de recuento: a) considerando defectos los pentágonos; b) considerando defectos los heptágonos y c) considerando defectos todos los polígonos no hexagonales.

ha sido llevada a cabo previamente. De estas diez medidas se obtiene la media y la desviación estándar que constituyen la densidad y su barra de error en el eje de las ordenadas, mientras que la media y la desviación estándar de los  $\tau_v$  nos dan el tiempo y la barra de error en el eje de las abscisas.

El ajuste de la curva se obtiene a partir de una subrutina en FORTRAN[53] que tiene en cuenta los errores de los datos en ambas coordenadas. El número total de curvas a ajustar es de nueve, correspondientes a aplicar los tres métodos de recuento en las tres viscosidades utilizadas. Se ha realizado una prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$  en las regresiones. En dos casos, de ser cierto el modelo, la probabilidad de obtener unos resultados dentro del rango de parámetros obtenidos para las curvas es de más del 85%; mientras que en los siete casos restantes esta probabilidad, considerando el modelo válido, es de más del 95%.

Por lo tanto, teniendo en cuenta los errores cometidos, se considera correcta la estimación de los exponentes en el comportamiento tipo ley de potencias de la densidad de defectos con el tiempo de cruce del umbral en el sistema estudiado.

Para ver claramente la dependencia del exponente con la viscosidad se muestra en la figura 4.4 la gráfica de un valor con respecto al otro, en la que si bien no se puede establecer el tipo de función que representa el exponente con la viscosidad debido a la cantidad limitada de puntos, sí que se puede ver que el exponente cambia con la viscosidad.

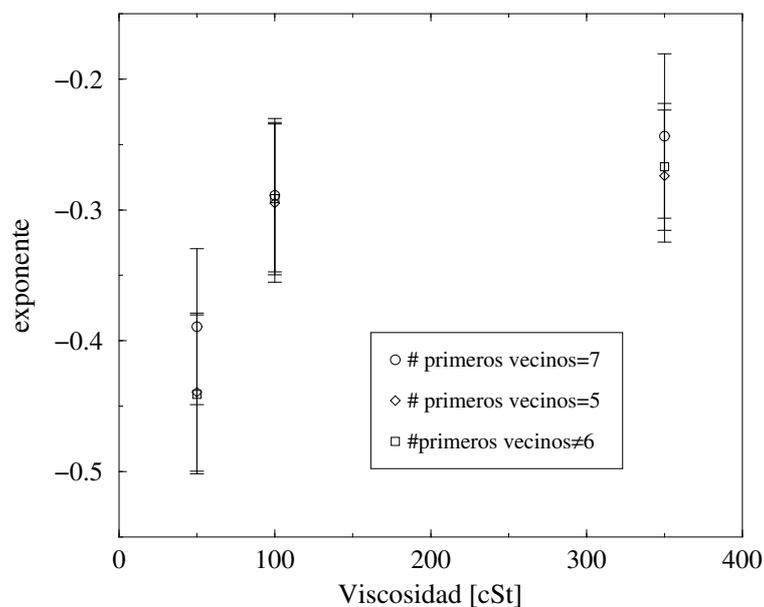


Figura 4.4: Exponente como función de la viscosidad cinemática del fluido.

Los exponentes que se obtienen son los siguientes[54]:

- Para la silicona de 50 cSt.:  $-(0.44 \pm 0.06)$  considerando defectos los pentágonos (método 1),  $-(0.39 \pm 0.06)$  considerando defectos los heptágonos (método 2) y  $-(0.44 \pm 0.06)$  para el método que considera defectos todos los polígonos diferentes de los hexágonos (método 3).
- Para la silicona de 100 cSt.:  $-(0.29 \pm 0.06)$  en el método 1,  $-(0.29 \pm 0.06)$  en el método 2 y  $-(0.29 \pm 0.06)$  en el método 3.
- Para la silicona de 350 cSt.:  $-(0.27 \pm 0.05)$  en el método 1,  $-(0.24 \pm 0.06)$  en el método 2 y  $-(0.27 \pm 0.05)$  en el método 3.

Los valores anteriores cambian levemente cuando vamos de un método a otro, sobre todo en el caso de considerar defectos los heptágonos. Una posible explicación para esto es que existan defectos formados únicamente por pentágonos que al no aparecer provocan una disminución mayor del número de defectos en los otros dos métodos, que sí los tienen en cuenta.

Las discrepancias con el valor del exponente dado por el modelo de Zurek pueden deberse a alguna de las siguientes causas:

- un comportamiento de los exponentes críticos en el caso de la bifurcación estudiada diferente al utilizado por Zurek en su trabajo para obtener el exponente -0.5, hecho para otro sistema experimental (helio líquido), en el que además hace uso de la teoría de campo medio, cuyas predicciones han sido erróneas en muchos casos[55][56][57].
- el modelo se propone para un campo con un solo modo, mientras que en nuestro caso los modos de la estructura son tres, y están acoplados entre sí.
- el modelo predice un valor menor del exponente para el caso subamortiguado, es decir, para sistemas en los que el término disipativo en la ecuación que lo modeliza se puede despreciar respecto del término difusivo. Puede que, sin llegar al caso totalmente subamortiguado, estemos en la región de transición entre un régimen y el otro para la silicona de 50 cSt.

## 4.2 Estudio sobre la dinámica de formación de los defectos

En base a los resultados aquí obtenidos se puede ver cómo afecta el hecho de que existan más de un modo en la estructura estudiada. Para eso estudiamos

cómo se forma un defecto penta-hepta en la estructura hexagonal a partir de las dislocaciones en cada uno de los modos.

En este caso el estudio se ha hecho con silicona de 350 cSt., en una capa de fluido de 1.9 mm. Se han hecho las medidas en la celda A (ver tabla 2.1). La velocidad con que se ha cruzado el umbral es tal que el parámetro de control  $\epsilon$  crece con un ritmo de  $2.3 \cdot 10^{-2} \text{min}^{-1}$ .

Para poder hacer un estudio de los diferentes modos que componen la estructura, en la imagen final de la película se selecciona una región con un único dominio en la que solo hay un defecto penta-hepta, que como ya hemos dicho, es el que tiene mayor vida media en una estructura hexagonal. La región es un cuadrado con un lado de aproximadamente siete longitudes de onda. La región seleccionada en la imagen final es la misma que se selecciona para todas las imágenes precedentes.

En la figura 4.5(a) se muestra la región seleccionada en la última imagen de la película.

La figura 4.5(b) muestra el módulo de la transformada de Fourier de 4.5(a), donde se puede observar claramente tres modos principales dominantes. Si comparamos los modos principales en los cuales hay dislocaciones (modos 2 y 3) con el modo sin ninguna dislocación (modo 1), vemos que en el primer caso se ha desestabilizado una banda más ancha de modos espaciales, provocado por el forzoso cambio del número de onda en las inmediaciones del defecto.

Después de obtener la fase de cada modo como se explica en la sección 3.1.2, podemos calcular el parámetro de sincronización  $F = -\cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)$ , donde  $\phi_i$  es la fase del  $i$ -ésimo modo. Este parámetro, al contener información de las tres fases, nos muestra que sucede en el defecto para cada uno de los modos. Básicamente, la fase de un modo en la posición de la dislocación tiene una discontinuidad, por lo tanto, al sumar las fases estamos superponiendo discontinuidades. Como vemos en 4.5(c), los puntos singulares en las fases tienen posiciones diferentes de un modo al otro. Generalmente, en la literatura (véase, por ejemplo, [11]) se asume cuando se habla de un defecto penta-hepta que la posición de la dislocación en cada uno de los modos está en la misma posición espacial. Esto es lo que uno esperaría de un defecto en un estado estacionario, pero en nuestro caso la estructura tiene una componente transitoria muy importante.

En la figura 4.6 se muestra el movimiento de las dislocaciones en los modos presentes en la estructura. Se puede ver que en un principio en la región del defecto hay una dislocación en cada modo. A medida que avanza el tiempo y se forma la estructura, las dislocaciones se mueven de manera que las correspondientes a los

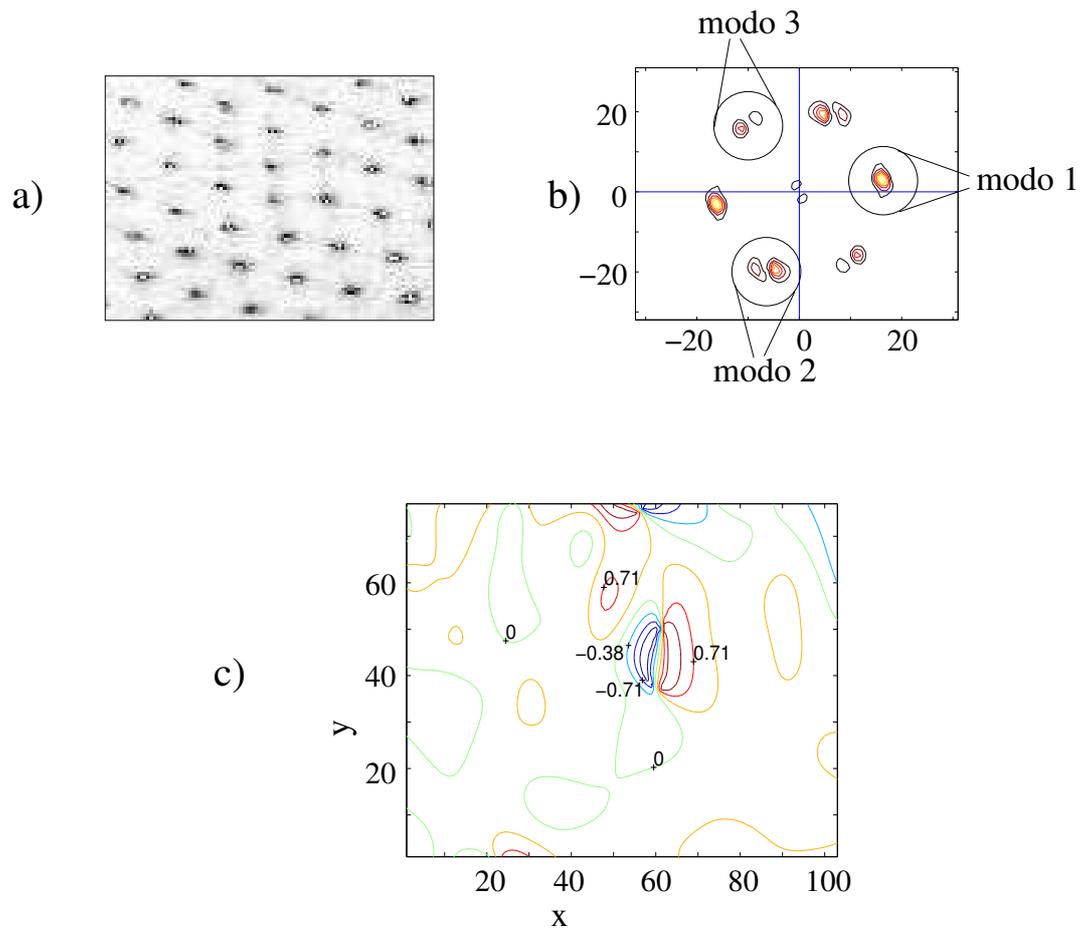


Figura 4.5: Demodulación compleja en la región seleccionada en la última imagen de la película. (a) Región de análisis, (b) Módulo de la transformada de Fourier de (a), donde las regiones señaladas identifican los modos involucrados en la demodulación compleja, (c) Curvas de nivel para el parámetro de sincronización  $F = -\cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)$

modos dos y tres continúan dentro de una pequeña región de interacción, y la del modo uno se aleja hacia el borde de la región estudiada, separándose claramente de las otras dislocaciones. Al mismo tiempo, se puede ver que las dislocaciones de los modos dos y tres forman un defecto penta-hepta en la estructura ya formada. Sin embargo, la posición de las dos dislocaciones no coincide en ningún momento. Esto nos sugiere que más que referirnos a la posición del defecto, debemos hablar de una región del defecto, dentro de la cual las dos dislocaciones están interactuando. Esta región tiene un diámetro de entre dos y tres longitudes de onda. A lo largo de todo el movimiento la separación entre las dislocaciones que forman el defecto raramente supera la longitud de onda.

En lo que sigue, cuando hablemos de *amplitud de un modo en el defecto* nos referiremos al mínimo de la amplitud del modo considerado en la región del defecto. Así, si un modo no tiene ninguna dislocación en la región del defecto, su amplitud será apreciablemente distinta de cero.

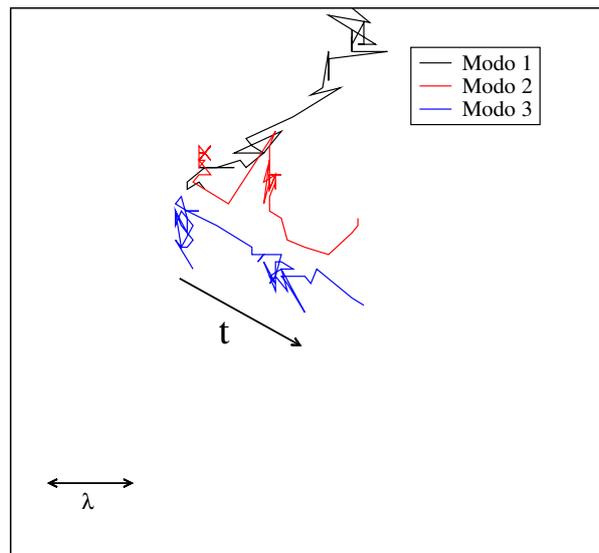


Figura 4.6: Trayectoria de las dislocaciones que componen el defecto.

Con las definiciones anteriores podemos ahora mostrar las amplitudes de los tres modos lejos del defecto en la figura 4.7(a) como función del tiempo. También hemos medido las amplitudes de los tres modos en el defecto en función del tiempo, como se puede observar en la figura 4.7(b).

En  $t = 0 \text{ min.}$ , se aplica un escalón en la potencia entregada al sistema, habiendo partido de un estado justo por debajo del umbral. Para  $t < 15 \text{ min.}$ , el sistema se encuentra debajo del punto crítico, por lo tanto la amplitud de los tres modos es cero. En  $t = 20 \text{ min.}$  se puede observar que las amplitudes de los tres

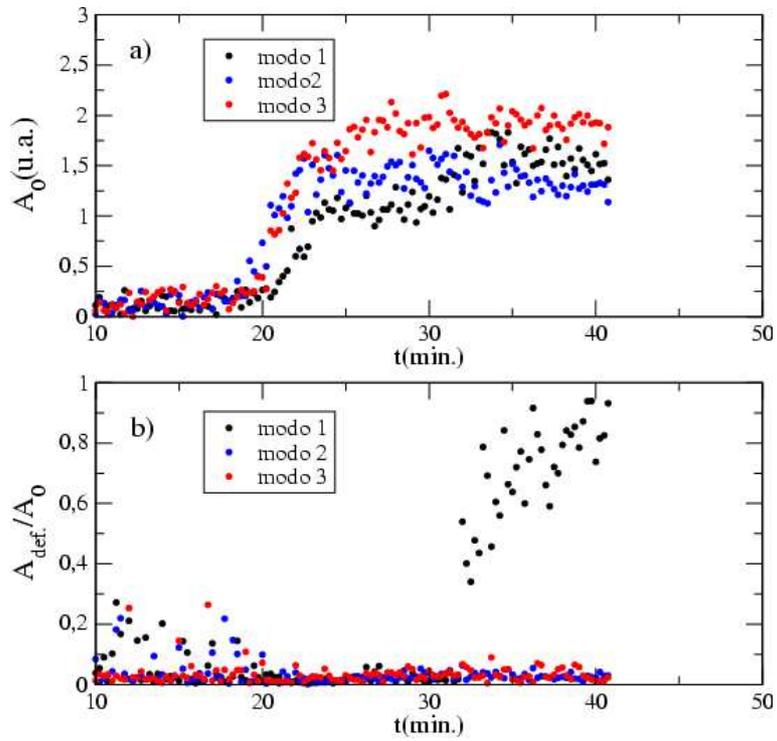


Figura 4.7: Amplitudes de cada modo en función del tiempo (en  $t=0$  min. se sube la potencia entregada al sistema). (a) Amplitudes para cada modo fuera de la región del defecto. (b) Amplitudes en el defecto, normalizadas con las amplitudes correspondientes de (a).

modos comienzan a crecer, indicándonos que se ha cruzado el umbral convectivo. Al mismo tiempo, vemos que en el defecto la amplitud de los tres modos es prácticamente cero debido a la existencia de dislocaciones en cada uno de los modos dentro de la región del defecto. En  $t \simeq 32$  min. la dislocación correspondiente al modo uno sale de la región del defecto, por lo que su amplitud crece. Por lo tanto, consideramos que aquí se forma el defecto penta-hepta.

Si bien lo anterior sugiere que un defecto penta-hepta se forma a partir de un cero del campo total (cero en las tres amplitudes de los modos), hemos observado en otros casos dislocaciones en alguno de los modos sin ninguna de las dislocaciones correspondientes en los otros modos. Pensamos que estas dislocaciones podrían, o bien unirse con otra dislocación en otro modo y con carga topológica contraria para formar un defecto penta-hepta o desaparecer en las paredes de la celda. Por lo tanto, habría defectos penta-hepta provenientes sólo de ceros en las amplitudes de dos de los modos o habría defectos en los modos individuales que no llegan a aparecer en la estructura formada, hechos que influyen de una u otra manera sobre el número de defectos que uno cuenta en la estructura final, resultados que se han mostrado en la sección 4.1.

Los resultados comentados en esta última sección se pueden ver también en la referencia [58].



## Capítulo 5

# Conclusiones sobre el sistema convectivo de Bénard-Marangoni

En esta parte de la tesis se ha estudiado de forma experimental la generación de defectos al cruzar una bifurcación con rotura de simetría. A modo de conclusión, podemos señalar lo siguiente.

- En el sistema convectivo de Bénard-Marangoni estudiado, se ha encontrado una dependencia tipo ley de potencias de la densidad de defectos con el tiempo de cruce del umbral de convección, como se puede deducir a partir de la línea argumental de Zurek cuando propone un experimento “cosmológico” en un sistema de  ${}^4\text{He}$ [3].
- A partir del exponente de las curvas ajustadas en las diferentes viscosidades se puede ver una discrepancia con lo que predice el modelo, ya que para materia condensada el exponente del modelo tiene un valor de  $-\frac{1}{2}$ .
- Si aceptamos que los valores del coeficiente de disipación, en nuestro caso la viscosidad, hacen que nuestro sistema esté próximo a la transición entre un sistema subamortiguado y uno sobreamortiguado, el sentido de la variación del exponente con la viscosidad está de acuerdo con la predicción del modelo, ya que aumenta cuando el parámetro de disipación es mayor.
- El desacuerdo entre el valor numérico obtenido en los experimentos y el modelo en el punto anterior puede deberse a que los defectos considerados en el modelo son ceros del campo, mientras que en nuestro caso el campo es diferente de cero en todos los puntos después de haber cruzado la bifurcación, aunque cuando descomponemos la estructura en tres modos el defecto

más común se corresponde con ceros en la amplitud de dos de ellos. Un nuevo marco teórico para éste caso tendrá que tener en cuenta el acoplamiento existente entre los tres modos, que podría producir desviaciones con respecto al caso de un único modo.

Para profundizar este último punto hemos estudiado la cinemática de las dislocaciones en cada modo hasta formar un defecto penta-hepta en una estructura hexagonal emergente. En base a los resultados obtenidos podemos concluir que las dislocaciones en cada modo interactúan en las etapas tempranas de la formación de la estructura hexagonal. Como resultado de esta interacción puede ocurrir que:

- Se forme un defecto penta-hepta cuando dos dislocaciones en diferentes modos y con carga topológica contraria aparecen en una región dada de la estructura.
- Se aniquilen dos dislocaciones con carga topológica contraria en el mismo modo.
- Desaparezca una dislocación en las paredes de la celda.
- Una combinación de varios de los procesos anteriores.

Por lo tanto, las dislocaciones evolucionan de tal manera que la configuración en la que medimos en la sección 4.1 esté compuesta sólo de defectos topológica e hidrodinámicamente estables.

Así, dichas condiciones pueden determinar que una dislocación permanezca en la estructura formando un defecto estable o hacer que la dislocación se mueva rápidamente hacia la pared donde desaparecerá por ser inestable. De esta forma, por ejemplo, condiciones más restrictivas provocarán un número menor de defectos en la estructura formada.

Se debe destacar que lo anterior no invalida el modelo teórico, sino que señala posibles diferencias entre los defectos formados en la rotura de simetría (predichos por el modelo) y los que se miden un cierto tiempo después en la estructura formada luego de haber cruzado la transición.

Las perspectivas que se abren a partir de este trabajo y que podría despejar algunas de las preguntas que nos hacemos son:

- Realizar un experimento análogo en un sistema convectivo de Rayleigh-Bénard, que tiene un número de modos diferente en su estructura.

- Ampliar en nuestro experimento el rango de viscosidades, lo que nos permitiría confirmar lo que ahora se puede sospechar respecto de la variación del exponente con la viscosidad.
- Mejorar el sistema de recuento de defectos, identificando qué polígonos forman los diferentes tipos de defectos que puedan existir en el sistema, evitando el contar un defecto individual más de una vez como puede estar sucediendo ahora.
- Llevar a cabo el experimento en otros sistemas con tres modos, para tener otra referencia acerca de la formación de defectos en una estructura hexagonal al cruzar una bifurcación con ruptura de simetría.

En la segunda y tercera parte de esta tesis avanzamos sobre el primero y el cuarto punto de las perspectivas. Dejamos para las conclusiones de dichas partes discusiones más específicas sobre esos temas en particular.



## Parte II

# Sistema óptico tipo Kerr con realimentación



## Capítulo 6

# Técnicas experimentales

El sistema experimental utilizado cuenta con antecedentes en varios trabajos relativamente recientes, por lo que dista mucho de ser un experimento tradicional, como el descrito en la parte I de la tesis.

En este capítulo se introduce dicho sistema experimental y se describe el proceso seguido para realizar las medidas. También se explica el análisis posterior aplicado sobre las imágenes para obtener los resultados.

### 6.1 Sistema experimental

El sistema experimental sobre el que hemos trabajado en este apartado consiste en una válvula óptica de cristal líquido (VOCL) iluminada por un haz láser uniforme en un circuito de realimentación. El esquema del conjunto se muestra en la figura 6.1.

La VOCL, mostrada en detalle en la figura 6.2, esta formada por un capa de un cristal líquido nemático de  $10\mu m$  de espesor. Valores orientativos de los principales parámetros del cristal líquido utilizado se muestran en la tabla 6.1. Dichos valores son estimativos, ya que muchos de ellos dependen de las condiciones de trabajo. Por ejemplo, los tiempos característicos dependen del voltaje aplicado y del espesor de la capa. Para una información más completa, ver [59]. De forma contigua a la capa de cristal líquido, se coloca un espejo dieléctrico y una capa fotoconductor (GaAs). Todo el conjunto se encierra entre dos electrodos transparentes de óxido de estaño e indio (ITO), conectados a una fuente de voltaje alterno de baja frecuencia. Por lo tanto, el voltaje se aplica a los tres elementos en serie. Una consecuencia inmediata de lo anterior, teniendo en cuenta la dependencia de la impedancia con la intensidad de luz en la capa fotoconductor,

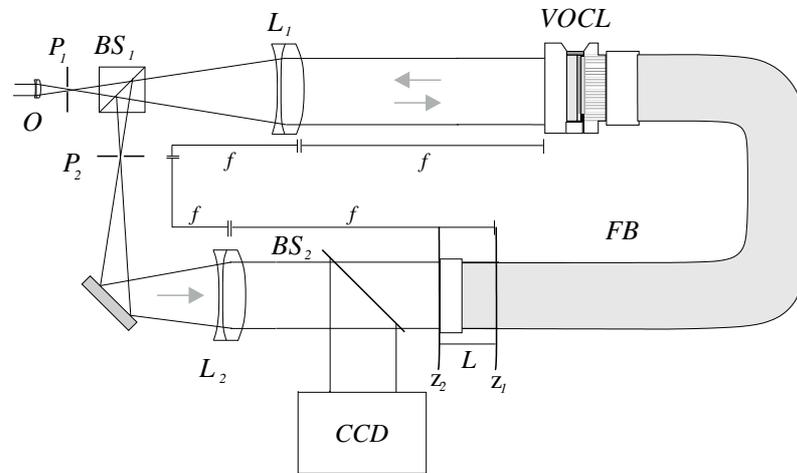


Figura 6.1: Esquema general del sistema experimental. O: objetivo de microscopio;  $P_1$ ,  $P_2$ : diafragmas;  $BS_1$ ,  $BS_2$ : divisores de haz; VOCL: válvula óptica de cristal líquido;  $L_1$ ,  $L_2$ : lentes con distancia focal  $f$ ; FB: manjón de fibras; CCD: video cámara.

es que el voltaje neto aplicado sobre una determinada región de la capa de cristal líquido depende del patrón de intensidades que recibe la capa fotoconductor en esa misma zona.

Formamos un frente de onda plano colimando un haz láser de He-Ne que ha atravesado un filtrado espacial, compuesto por un objetivo de microscopio y un diafragma. El frente de onda resultante es enviado a la válvula, incidiendo sobre la capa de cristal líquido y reflejándose en el espejo. Dicho frente emergerá con una modulación en la fase, provocada por las diferencias existentes en el índice de refracción en distintos puntos del cristal líquido. Mediante dos lentes  $L_1$  y  $L_2$  la imagen saliente de la válvula se proyecta sobre el plano  $z_1$ . Un divisor de haz colocado sobre el camino recorrido por el frente de onda permite extraer parte de la luz con el fin de observar el campo cercano y lejano. El campo lejano es el que se observa en el plano focal de la lente y se corresponde con la transformada de Fourier de la señal. El campo cercano nos permite observar la estructura, y es el que se graba durante las medidas con la videocámara CCD. Una muestra de la estructura observada se puede ver en la figura 6.3.

La longitud  $L$  (en el caso de la figura 6.1, negativa) que va desde el plano  $z_1$  hasta el plano  $z_2$  es una longitud de propagación libre. En esa región del circuito de realimentación la modulación de fase se transforma en una modulación de amplitud, como se ha visto en la sección 1.4.2. En las medidas experimentales

Propiedad	Valor
Diferencia de constantes Dieléctricas $\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$	$9.9 \cdot \epsilon_0$
Diferencia en el índice de refracción $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$	0.164
Viscosidad principal ( $\gamma$ )( $kg s^{-1} m^{-1}$ ( $20^{\circ} C$ ))	$5.2 \cdot 10^{-2}$
Índice de Elasticidad $K_{11}$ ( $J m^{-1}$ )	$1 \cdot 10^{-11}$
Cociente entre índices de Elasticidad $K_{33}/K_{11}$	2.22
Voltaje Umbral $V_{um}$	1.48V
Voltaje de Saturación $V_s$	2.15V
Tiempo de respuesta característico	35ms.
Tiempo de relajación	75ms.

Tabla 6.1: Estimación de los parámetros físicos más importantes del cristal líquido utilizado.

que se presentan aquí,  $L=6$ cm, por lo tanto nuestro sistema se comporta como auto-desenfocado, como se explica en la sección 1.4.2.

En el plano  $z_2$  la luz entra en un manojo de fibras ópticas que transporta punto a punto la intensidad de dicho plano a la cara fotoconductor de la válvula óptica, induciendo sobre ella una resistencia que varía con las coordenadas transversales.

La intensidad de luz proveniente del láser se controla a través de un modulador acusto-óptico controlado por ordenador. La imagen se toma con una cámara CCD conectada a un magnetoscopio que graba en una cinta de vídeo U-matic la película. Es posible a partir de esta grabación extraer imágenes correspondientes a tiempos específicos, con un error en el tiempo de 40 ms., aceptable cuando lo comparamos con los tiempos característicos del experimento que determinamos en la siguiente sección. Para determinar en las imágenes cuándo se comienza a incrementar el parámetro de control se utiliza un marcador controlado por ordenador.

## 6.2 Proceso de medida y tratamiento de datos

El proceso básico utilizado en el experimento consiste en atravesar la bifurcación con ruptura de simetría en un tiempo  $\tau_q$  y hacer las medidas sobre la estructura

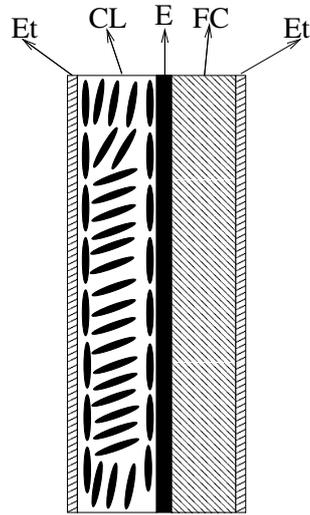


Figura 6.2: Válvula óptica de cristal líquido. Et:electrodos transversales, CL:capa de cristal líquido, E:espejo, FC:capa fotoconductor.

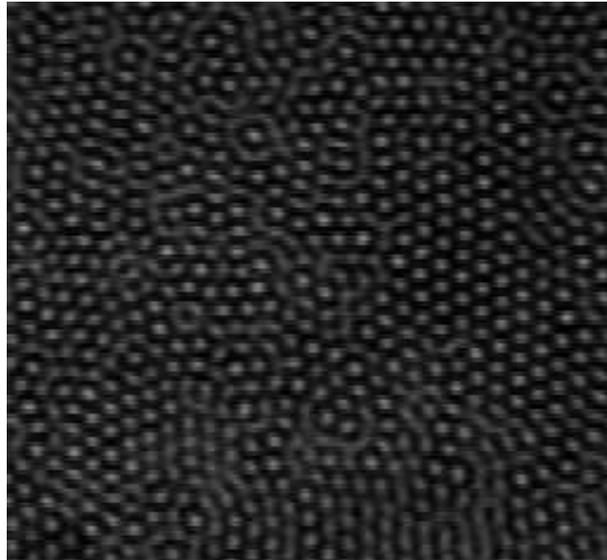


Figura 6.3: Estructura típica observada en el experimento.

recién formada. Coincide en lo fundamental con el proceso comentado en la sección 2.5. Las principales diferencias provienen de las posibilidades existentes en este sistema de fijar el valor del parámetro de control en un instante determinado.

En este experimento, el parámetro de control es la intensidad de luz proveniente del láser. El modulador acusto-óptico que controla la intensidad de luz permite aumentarla linealmente hasta cruzar la bifurcación con un error muy pequeño. Para medir la intensidad de luz se utiliza un fotosensor colocado en la entrada del circuito de realimentación. Cabe aclarar que con el fotosensor se calibra las intensidades necesarias y luego se quita, ya que mide directamente sobre el circuito de realimentación.

Para cada uno de las medidas se determina la intensidad umbral de aparición de la estructura, la intensidad máxima que se alcanzará (sobre el umbral de la estructura) y la mínima (por debajo del umbral de la estructura) y se hacen las calibraciones correspondientes en el sistema de control del modulador acusto-óptico. De esta manera, se comienza con una intensidad por debajo del umbral, se aumenta de forma lineal hasta llegar a la intensidad máxima, punto en el que se toma la imagen a analizar. Se puede definir un parámetro de control adimensional análogo al  $\epsilon$  utilizado en la ecuación 1.20 de la forma:

$$I_a = \frac{I - I_u}{I_u} \quad (6.1)$$

donde  $I_u$  es la intensidad correspondiente al umbral de aparición de la estructura.

Como se ha explicado en la sección 1.4.2, el tiempo característico de la VOCL varía con el voltaje aplicado a los electrodos. En las dos medidas que hemos realizado se ha determinado el tiempo de respuesta característico de la válvula. El procedimiento utilizado consiste en aplicar un escalón a la intensidad de luz, para luego medir en el plano de Fourier la intensidad de los picos que se encuentran sobre el máximo central en el espectro de potencias. Las curvas correspondientes a los dos conjuntos de parámetros estudiados se muestran en la figuras 6.4 y 6.5.

En ambas curvas se ve que el crecimiento de los modos estudiados se puede aproximar por una función exponencial. Al ajustar estas curvas podemos obtener el tiempo característico de respuesta de la VOCL,  $\tau_r$ . Dicho tiempo de respuesta nos permite estimar un valor mínimo de  $\tau_q$ , ya que para tiempos mucho menores a  $\tau_r$  la estructura no se habrá formado. También nos interesa la relación entre los tiempos característicos del sistema para los dos conjuntos de parámetros utilizados. Si aplicamos un cambio de escala de tal manera que se superpongan ambas curvas, obtenemos la siguiente relación entre los tiempos característicos:

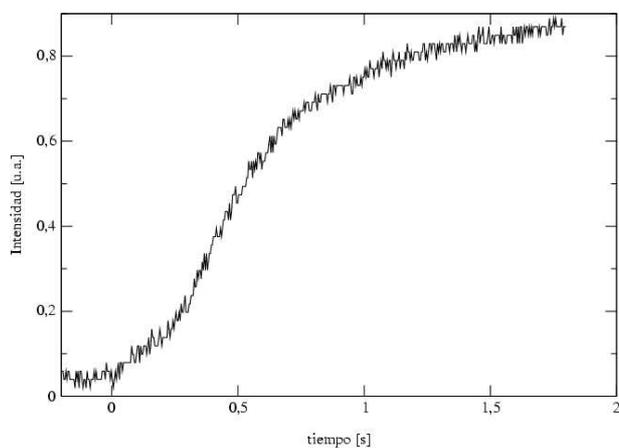


Figura 6.4: Respuesta de la intensidad de luz de algunos de los picos distintos de cero del espectro de Fourier a un escalón en el parámetro de control. El voltaje aplicado a la VOCL es de 6.53 Voltios y la frecuencia es de 1.94 kHz.

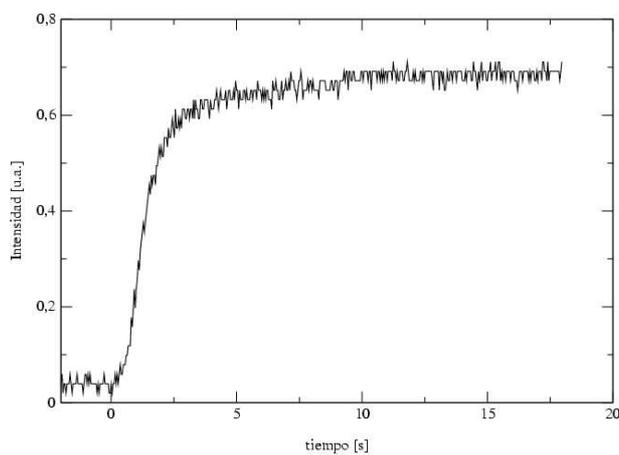


Figura 6.5: Respuesta de la intensidad de luz de algunos de los picos distintos de cero del espectro de Fourier a un escalón en el parámetro de control. El voltaje aplicado a la VOCL es de 4.18 Voltios y la frecuencia es de 2.16 KHz.

$$\tau_r(4.18V) = \tau_r(6.53V) \cdot 2.9 \quad (6.2)$$

Esto nos permite realizar comparaciones entre efectos análogos en las dos medidas, normalizando los  $\tau_q$  con sus correspondientes tiempos característicos.

Debido a inhomogeneidades en la válvula de cristal líquido, existe un movimiento de ciertas zonas de la estructura. Por lo tanto, hemos limitado los  $\tau_q$  máximos medidos a tiempos menores al tiempo característico de movimiento de éstas regiones. Dicho tiempo característico lo hemos definido como  $\tau_m = \frac{\lambda}{v}$  donde  $\lambda$  es la longitud de onda dominante en la estructura y  $v$  es la velocidad de movimiento de los hexágonos. De esta manera queremos evitar el contar defectos que no se han originado en la aparición de la estructura.

Como hemos visto en la figura 6.3, que es una imagen típica de las que debemos analizar, el patrón se compone de diferentes dominios unidos entre sí por fronteras de grano. Para hacer el análisis de las imágenes más sencillo, hemos intentado obtener una estructura con un único dominio, en la que los únicos defectos topológicos que aparezcan no estén asociados a la degeneración rotacional del sistema. Para ello hemos colocado un filtro en el plano de Fourier  $P_2$  (figura 6.1) dejando pasar únicamente los modos correspondientes a una estructura hexagonal con un solo dominio, con una longitud característica igual a la seleccionada de forma libre por el sistema. La selección o control de patrones mediante filtros en el plano de Fourier ha sido ampliamente usada en diferentes trabajos y con diversos propósitos, algunos de los cuales se pueden encontrar en las referencias [60][61][62][63].

Con esta modificación en el circuito de realimentación se han hecho medidas preliminares, viendo la estructura formada al pasar la intensidad de luz de un valor por debajo del umbral a uno por encima en un tiempo muy pequeño. En las estructuras obtenidas se elimina la existencia de múltiples dominios, nuestro objetivo, pero también se evita la aparición de defectos. Posteriormente, hemos aumentado la banda de modos permitida en el filtro, pero los resultados no han variado de forma sustancial. Debido a esto, hemos descartado la posibilidad de filtrar la señal de realimentación.

Para el tratamiento de datos se ha utilizado el método geométrico descrito en la sección 3.1.1, ya que las estructuras a analizar son totalmente análogas. El método comienza eliminando el ruido de la imagen mediante diversos filtros. Luego, se identifica la posición de cada uno de los máximos relativos asociados a centros de polígonos en la estructura. Con la posición de cada uno de ellos, se construye la celda de Voronoi(ver figura 3.3), y a partir de ella obtiene el número

de primeros vecinos de cada máximo.

Una vez que hemos identificado el número de coordinación de cada máximo, o, lo que es lo mismo, el número de lados del polígono; nos queda por determinar a cuál de ellos consideraremos como defectos. El criterio utilizado aquí es el mismo al elegido en la sección 3.2, ya que en esta estructura el defecto penta-hepta también es el de mayor tiempo de vida media.

Por lo tanto, contamos los defectos mediante tres métodos distintos que identifican los defectos con pentágonos, heptágonos, o con todos los polígonos con un número de lados distinto de seis. Luego, calculamos la densidad de defectos como

$$\rho = \frac{N_{defectos}}{N_{poligonos}}.$$

## Capítulo 7

# Resultados y discusión

En este capítulo mostramos los resultados obtenidos al contar los defectos en la estructura que aparece después de que el sistema atraviesa la bifurcación con ruptura de simetría. Estas medidas se han realizado sobre un mismo sistema para dos tiempos característicos diferentes. También se discuten posibles causas que pueden dar lugar a los resultados anteriores.

La densidad de defectos se ha calculado dividiendo el número de defectos por el número total de polígonos de la imagen. En cada una de estas medidas hay aproximadamente ochocientos polígonos, por lo que podemos afirmar que la población es suficiente para hacer estadística. Cada uno de los puntos en las figuras anteriores es el resultado de promediar diez medidas independientes. El  $\tau_q$  está medido en segundos y su error asociado es de 0.04 segundos para todas las medidas. El error no se muestra en las gráficas por ser demasiado pequeño en relación a la escala de los ejes coordenados.

En las figuras 7.1 y 7.2 se pueden ver los gráficos de la densidad de defectos en función de  $\tau_q$  en formato logarítmico. En la figura 7.1 el voltaje alterno aplicado a la VOCL tiene un valor eficaz de 4.18 V y una frecuencia de 2.16 KHz, mientras que la figura 7.2 muestra los resultados al aplicar un voltaje con valor eficaz de 6.53 V con una frecuencia de 1.94 KHz en la VOCL. Los tres gráficos de cada figura se corresponden con los tres métodos que hemos utilizado para el recuento de defectos. El primero de ellos considera defectos a los pentágonos, el segundo considera defectos a los heptágonos y el tercero considera defectos a todos los polígonos distintos de los hexágonos. Se puede notar que la mayoría de los polígonos que no son hexágonos son pentágonos o heptágonos, ya que el tercer método es prácticamente idéntico a la suma de los otros dos.

En las gráficas logarítmicas se puede ver que el decaimiento de la densidad de

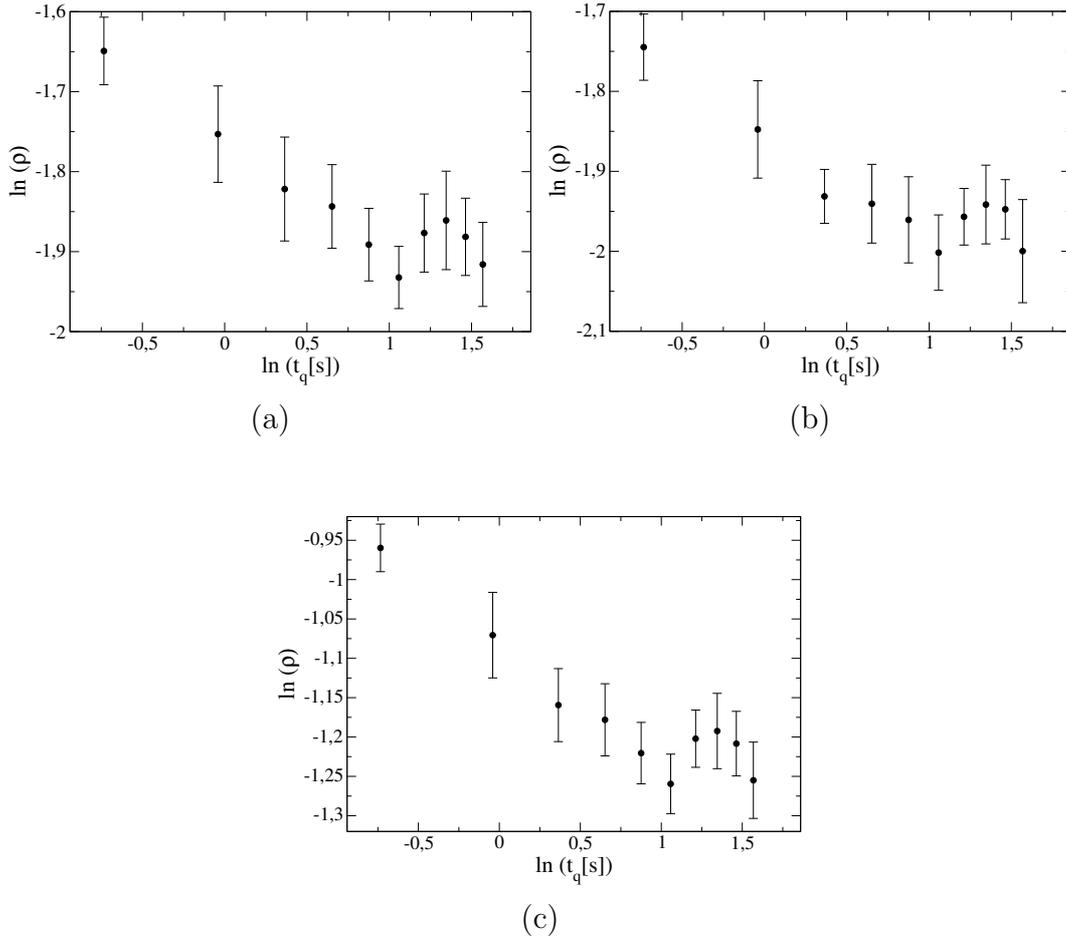


Figura 7.1: Densidad de defectos en la VOCL en función de  $\tau_q$ , en formato log-log, para los métodos utilizados en el recuento. El voltaje alterno aplicado a la VOCL tiene un valor eficaz de 4.18 V y una frecuencia de 2.16 KHz. (a) Considerando defectos a los pentágonos, (b) considerando defectos los heptágonos y (c) considerando defectos a todos los polígonos distintos de los hexágonos.

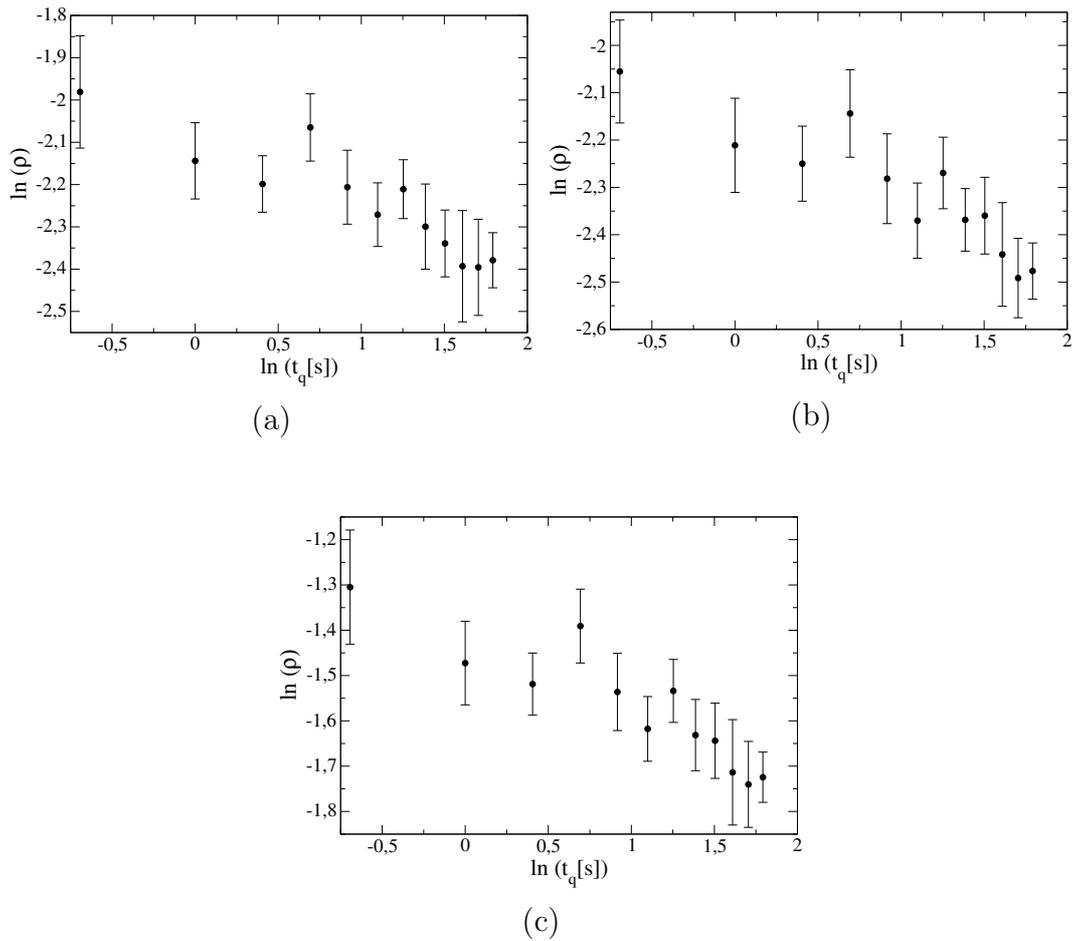


Figura 7.2: Densidad de defectos en la VOCL en función de  $\tau_q$ , en formato log-log, para los métodos utilizados en el recuento. El voltaje alterno aplicado a la VOCL tiene un valor eficaz de 6.53 V y una frecuencia de 1.94 KHz. (a) Considerando defectos a los pentágonos, (b) considerando defectos los heptágonos y (c) considerando defectos a todos los polígonos distintos de los hexágonos.

defectos con el  $\tau_q$  en ciertas partes de la curva no sigue un comportamiento potencial (asociado a una recta en la escala logarítmica usada), como se deduce en el modelo teórico. En un principio el decaimiento se corresponde aproximadamente al de la función esperada, pero en ciertas zonas hay una desviación respecto de este comportamiento. En la figura 7.1 la desviación se ve en los  $\tau_q$  mayores, y tiene la forma de un pico. Mientras tanto, en la figura 7.2 es más difícil identificar un comportamiento en particular. Pensamos que esas desviaciones más marcadas en la figura 7.2 se deben a la misma razón que provoca el pico en la figura 7.1. Dicho razonamiento se basa en el hecho de que el tiempo característico del sistema en la medida que se ve en la figura 7.2 es menor al de la figura 7.1, relación expresada cuantitativamente en la ecuación 6.2. Así, si adimensionalizamos el eje del tiempo con el tiempo característico correspondiente, el pico que vemos al final de la curva en la figura 7.1 se presenta antes en la figura 7.2, mientras que un segundo pico que parece verse en la figura 7.2 no aparece en la figura 7.1 por estar fuera del intervalo de  $\tau_q$  medidos.

Pensamos que los máximos comentados en el párrafo anterior pueden deberse a ciertos efectos producidos por un cambio brusco en el parámetro de control. Así, un elemento de volumen se verá sometido a un cierto torque, producido por la reorientación de las moléculas en la dirección del campo eléctrico. Por ser un cambio brusco, dicho elemento de volumen podría inducir un movimiento translacional en los elementos contiguos por efectos viscosos. Podemos ver todo este conjunto como un oscilador con disipación, que para cambios lentos actúa como un oscilador sobreamortiguado, pero cuando el cambio se hace bruscamente, actúa como un oscilador subamortiguado. Por lo tanto, estas oscilaciones en los elementos de volumen podrían cambiar la estructura observada en la VOCL.

Desde el punto de vista del modelo, hay simulaciones numéricas [34] que muestran un comportamiento oscilatorio del número de defectos en función del tiempo en el caso de sistemas subamortiguados. Una posible explicación dada en dicha referencia propone como “productor” de nuevos defectos la oscilación del parámetro de orden alrededor del valor estacionario, pudiendo provocar en ciertos casos un retorno al estado anterior a la transición. De esta manera, se estaría cruzando más de una vez el punto crítico, pudiendo en cada paso “atrapar” más defectos.

Hemos ajustado una recta en los gráficos logarítmicos, tratando de elegir regiones en las que los picos que comentamos en el párrafo anterior no estén presentes. En la figura 7.1 tenemos básicamente un único comportamiento cuando se descarta la región que rodea al máximo. Ajustando una recta a los seis valores de  $\tau_q$  más pequeños, obtenemos un valor del exponente de  $-0.15 \pm 0.01$ . Realizando

---

un test  $\chi^2$  en esta parte de las medidas, obtenemos que siendo cierto el modelo propuesto, medidas dentro del mismo margen de error se repetirán en el 99% de los casos.

Para la figura 7.2 la elección es más dudosa, ya que parece haber dos comportamientos diferentes cuando miramos la curva globalmente. Una región formada por los tres puntos con  $\tau_q$  más pequeño y la otra compuesta por el resto de medidas. En la primera región el ajuste nos da un exponente de  $-0.20 \pm 0.04$  (resultado del test  $\chi^2$ : 81%), mientras que en la segunda, descartando el máximo principal, obtenemos un exponente de  $-0.26 \pm 0.04$  (resultado del test  $\chi^2$ : 95%).

Estos valores parecen estar de acuerdo con lo que hemos hecho en la parte I, donde hemos estudiado también una estructura hexagonal, y donde los valores obtenidos del exponente también son mayores a  $-0.5$ , valor que se deduce del modelo propuesto por Zurek. Son igualmente válidas aquí las razones dadas en la sección 4.1. Para recordarlas, mencionamos brevemente las ideas principales:

- Nuestro sistema experimental es diferente del que se utilizó para obtener el valor numérico de  $-0.5$  cuando se aplica el modelo.
- La estructura aquí estudiada esta compuesta por tres modos acoplados, mientras en el modelo se considera un sistema con un único modo.
- Las diferencias en los valores del exponente obtenida cuando se cambia el tiempo característico del sistema (asociado con el parámetro de disipación) se pueden relacionar con el cambio del exponente en el modelo cuando pasamos de un sistema subamortiguado a uno sobreamortiguado.



## Capítulo 8

# Conclusiones sobre el sistema óptico tipo Kerr con realimentación

El estudio experimental en el sistema de la VOCL con realimentación nos ha permitido conocer la dependencia de la densidad de defectos en la estructura emergente en función del tiempo de cruce de la bifurcación. A partir de los resultados, podemos concluir:

- En el sistema de la VOCL con realimentación estudiado, actúan dos mecanismos simultáneamente, uno es el explica el modelo propuesto por Kibble[2] en el campo de la cosmología y trasladado por Zurek[3] al ámbito de la materia condensada. El otro mecanismo subyacente, que da lugar a los picos en los gráficos de la densidad de defectos en función del  $\tau_q$ , podría estar relacionado con efectos elásticos asociados con la oscilación de las moléculas de cristal líquido alrededor de la nueva posición de equilibrio, paralela al campo  $\vec{E}$ . Dicho mecanismo podría ser análogo al observado en simulaciones numéricas en [34] para sistemas subamortiguados.
- Si tenemos en cuenta únicamente las partes de las curvas en las cuales no aparecen los máximos, se ve que sigue una ley de potencias con un exponente mayor a  $-0.5$ , valor que se puede deducir a partir del trabajo de Zurek para nuestro sistema.
- Si bien la diferencia no es demasiado significativa, a partir de las curvas se puede ver un aumento en el exponente cuando crece el tiempo característico

del sistema. Esto se corresponde con el aumento del exponente al aumentar la viscosidad, como se ha mostrado en la parte I de la tesis, de donde se podría pensar que esto es un resultado que se puede generalizar a otros sistemas.

- La diferencia entre los exponentes aquí obtenidos y los que predice el modelo teórico podría deberse, como ya hemos comentado en el capítulo 5, a que la estructura es hexagonal, por lo cual los defectos topológicos con mayor tiempo de vida media son ceros de dos de los modos componentes de la estructura. Otro elemento que reafirma esta hipótesis son las medidas realizadas en [39], sobre el mismo sistema pero en una estructura con un único modo, obteniendo un valor del exponente que esta de acuerdo con el valor dado por el modelo.

Como perspectivas futuras, este trabajo deja planteadas ciertas preguntas con respecto a la dinámica de la capa de cristal líquido que forma la VOCL. La principal es investigar el mecanismo que origina, para ciertos  $\tau_q$  particulares, la aparición de más defectos cuando cruzamos la bifurcación de forma más lenta. Esto contradice el razonamiento que se sigue en el modelo teórico, y pone de manifiesto la existencia de otro mecanismo subyacente que modifica la estructura.

Para evaluar la validez de la propuesta hecha en la pág. 82, que justifica dicho comportamiento, se podría repetir el experimento con un cristal líquido con una viscosidad mayor. De esta manera, el sistema se volvería sobreamortiguado, evitando dicho fenómeno.

Otro experimento que permitiría confirmar la propuesta consiste en medir la densidad de defectos en función del tiempo, después de haber cruzado el umbral de aparición de la estructura suficientemente rápido. De esta manera, deberíamos observar las oscilaciones en el número de defectos ya vistas en las simulaciones numéricas de [34].

## Parte III

# Sistema convectivo de Rayleigh-Bénard



## Capítulo 9

# Técnicas experimentales

En este capítulo describiremos el experimento convectivo de Rayleigh-Bénard. La celda convectiva utilizada está limitada superiormente por una superficie que no es diatérmana, lo que implica ciertas particularidades respecto de un experimento típico de Rayleigh-Bénard. Repasamos brevemente el sistema de observación utilizado y el proceso que se sigue en la medida, siendo ambos análogos a los utilizados en la parte I. También describimos el tratamiento de las imágenes, donde se hace una discusión sobre el método utilizado comparándolo con el de la parte I.

### 9.1 Celda convectiva

Un esquema de la celda convectiva utilizada es el que se muestra en la figura 9.1. La celda tiene forma cuadrada, con un lado  $L$  de 129 mm. en la parte que contiene el fluido. La forma de la celda permite que tanto los rollos convectivos como los cuadrados, las estructuras que se observan en nuestro sistema, quepan en ella sin forzar la presencia de ningún defecto debido a las condiciones de contorno.

Una placa metálica cuadrada se calienta por debajo con una resistencia eléctrica Minco diseñada para entregar el mismo flujo de calor en toda la superficie. Para evitar inhomogeneidades residuales en la distribución de la temperatura en la placa metálica, esta tiene un espesor de 5 mm. No se usa un espesor mayor para evitar que el tiempo utilizado para cambiar la temperatura de la placa sea excesivamente grande.

Para evitar inhomogeneidades que puedan perturbar mecánicamente al fluido, y para que la intensidad de luz reflejada en el fondo de la celda sea la suficiente para propósitos de visualización, la parte superior de la placa se pule por medios

mecánicos con partículas de hasta  $1\mu m.$ , logrando un acabado especular.

El método utilizado para observar la estructura es la ombroscopía, ya explicada en la sección 2.3. Por ello es imprescindible que las reflexiones que se produzcan en la celda no permanezcan en el eje óptico o bien, que la reflexión que nos interesa tenga una intensidad bastante mayor a las restantes. Por ejemplo, para que la capa de fluido a estudiar tenga un espesor constante, es necesario que el fondo metálico de la celda y el vidrio que separa el fluido a estudiar del agua refrigerante, sean paralelos. Por lo tanto, la reflexión de la luz que incide perpendicularmente sobre ambos vuelve sobre un mismo camino. Ya que de los dos frentes de onda sólo el reflejado en el fondo metálico contiene información sobre el fluido, es necesario que éste último tenga una intensidad bastante mayor al otro para poder observar la estructura.

La resistencia calefactora es alimentada por una fuente de voltaje HP E3631A controlada por ordenador.

La placa metálica con la resistencia adherida a su superficie inferior se coloca sobre un recipiente de nailon que reduce las pérdidas de calor por debajo y sirve como base para el montaje que describiremos a continuación.

Sobre dicha base se atornilla otra pieza de nailon que actúa como separador entre la placa metálica y el vidrio que limita superiormente al fluido, determinando la altura de la capa de líquido a estudiar. Esta pieza actúa como pared lateral para el fluido. Su difusividad térmica es similar a la del líquido utilizado en el experimento, por lo que nos encontraremos en un caso intermedio entre los dos comentados en la sección 1.4.1 respecto de la influencia de las paredes del fluido.

Sobre el vidrio se coloca un separador de aluminio y sobre éste otro vidrio que se sujeta con una pieza metálica. El hueco formado esta vez es para que circule el agua con el fin de mantener una temperatura menor y homogénea que la de la placa metálica.

Dos conjuntos de tornillos intercalados permiten montar en primer lugar la parte que contiene el fluido a estudiar y en una segunda etapa la parte correspondiente a la circulación de agua. Todas las uniones entre las diferentes partes de la celda tienen sus respectivas juntas tóricas que proveen un cierre estanco.

Con el propósito de minimizar la diferencia de temperaturas existente entre la parte superior del fluido convectivo y el agua refrigerante, el vidrio que los separa tiene un espesor de 1.8 mm.

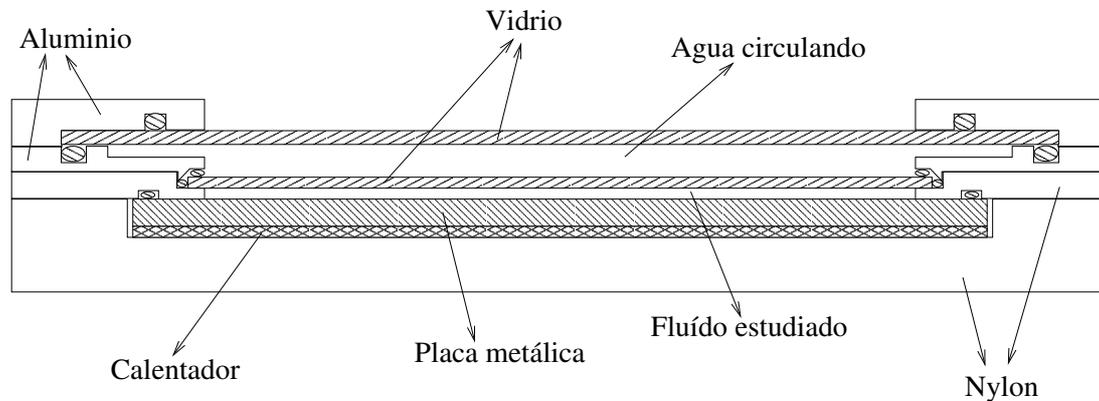


Figura 9.1: Perfil de la celda convectiva de Rayleigh-Bénard utilizada en el experimento.

## 9.2 Fluido utilizado

En este punto existe una total coincidencia con el experimento convectivo de Bénard-Marangoni, ya que también hemos utilizado aceite de silicona. Como ya hemos señalado antes, las ventajas de este tipo de fluidos son:

- son transparentes a la luz visible, permitiendo realizar medidas ópticas, por ejemplo, a través del índice de refracción.
- están disponibles en el mercado con una amplia gama de viscosidades.

Debido a limitaciones técnicas respecto de la diferencia de temperaturas que podemos imponer a la capa de fluido, y teniendo en cuenta que el número de Rayleigh es inversamente proporcional a la viscosidad, hemos utilizado aceite de silicona con una viscosidad cinemática nominal de 20 cSt. En este caso, para un espesor de la capa de fluido de 3 mm., se supera el  $Ra_c$  para una diferencia de temperaturas entre el agua circulante y la placa metálica de  $\sim 11.5^\circ C$ . Para esa misma altura, la relación de aspecto física ( $\frac{L}{\lambda}$ ) resultante es de  $\sim 19$ . Las características técnicas de este fluido se muestran en la tabla 9.1

## 9.3 Sistema de observación

La estructura convectiva del fluido bajo estudio se visualiza mediante la técnica óptica denominada ombroscopía, cuyo esquema ya se ha mostrado en la figura

Viscosidad cinemática ( $\nu$ )	20 cSt
Densidad ( $\rho$ )	953 Kg $m^{-3}$
Tensión Superficial ( $\sigma$ )	20.6 mN $m^{-1}$
Conductividad Térmica ( $\chi$ )	0.1418 W $m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$
Coefficiente de Dilatación ( $\alpha$ )	10.7 $\cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ C^{-1}$
Difusividad Térmica ( $\kappa$ )	9.87348 $\cdot 10^{-8} m^2 s^{-1}$
Coefficiente Viscosidad/Temperatura ( $d\nu/dT$ )	0.58 cSt $^\circ C^{-1}$
N $^\circ$ de Prandtl ( $\nu/\kappa$ )	202.56

Tabla 9.1: Propiedades físicas más importantes del fluido utilizado en el experimento, a T=25 $^\circ$  C.

2.1, y se ha explicado con detalle en la sección 2.3. Aquí haremos un breve recordatorio.

La técnica se basa en la desviación que sufren los rayos de luz cuando atraviesan una zona con un índice de refracción variable.

Para poder visualizar el fenómeno anterior, se ilumina perpendicularmente la celda convectiva con rayos paralelos. Éstos se forman a partir de una fuente puntual de luz obtenida con un filtrado espacial. Dicha fuente se coloca en el foco de un espejo esférico, por lo que el frente de onda reflejado estará formado por rayos paralelos.

Cuando inciden estos rayos perpendicularmente sobre la celda, pierden su paralelismo al atravesar la capa de fluido en función de la variación del índice de refracción sobre ella. Así, el frente de onda tendrá zonas brillantes y zonas oscuras que estarán relacionadas con la estructura convectiva en el fluido.

El frente de onda emergente de la celda se recoge nuevamente con el espejo esférico. Su reflexión, después de desviarse en el divisor de haz, se recoge en una videocámara CCD, conectada a una tarjeta digitalizadora de imágenes en un ordenador.

Para evitar que la primera reflexión en el divisor de haz sature la cámara CCD, el sistema se hace levemente astigmático.

## 9.4 Medidas locales de temperatura

Las medidas locales de la temperatura se realizan mediante termopares. Hemos medido la temperatura debajo de la placa metálica y también en el agua que circula, tanto a la entrada como a la salida. Los termopares utilizados son de tipo T ó K, tienen un diámetro menor a 0.13 mm. y utilizan teflón como aislante.

Las lecturas de estos termopares se registran durante todas las medidas, ya que no perturban el sistema en absoluto. La medida de las temperaturas se realiza mediante un sistema de adquisición de datos Stanford SR630 controlado por ordenador, de 16 canales, con una resolución de  $\pm 0.1^\circ C$ .

Cabe señalar que la diferencia de temperaturas en el agua refrigerante entre la entrada y la salida es de  $0.2^\circ C$  en un estado estacionario, y aumenta hasta  $0.4^\circ C$  cuando se cambia de forma brusca la potencia entregada al sistema.

## 9.5 Proceso de medida

El proceso de medida consiste, básicamente, en atravesar el umbral convectivo con diferentes ritmos de aumento en el parámetro de control, y tomar una imagen de la estructura después que esta se haya formado.

En primer lugar, para cada condición experimental en la que se va a medir, se estima el  $\Delta T_c$  mediante observación directa de la ombroscopía en el estado estacionario, obtenido después de haber entregado la misma potencia durante 24 horas. Si bien esta medida no es extremadamente precisa, es suficiente para nuestros propósitos.

Una vez conocido el  $\Delta T_c$ , se elige una diferencia de temperaturas apenas por debajo de la asociada al umbral convectivo para todos los estados iniciales de cada proceso de medida unitario. La diferencia de temperaturas final, diferente para cada pendiente, se elige comprobando que la estructura se forme completamente para esa diferencia de temperaturas.

En la figura 9.2 se puede ver la evolución de la temperatura en función del tiempo para una medida. En este caso, a diferencia de lo que se ha mostrado en la sección 2.5, el parámetro de control crece exponencialmente. En nuestro sistema convectivo de Bénard-Marangoni la temperatura superior de la capa de fluido no está fija, por lo tanto crece de una manera similar a la temperatura inferior, y cuando uno dibuja la diferencia de temperaturas en función del tiempo para una medida obtiene lo mostrado en la gráfica 2.2. Mientras tanto, en el sistema convectivo de Rayleigh-Bénard la temperatura superior está fijada por el

agua circulante, por lo que la diferencia de temperaturas crece de la misma forma en que aumenta la temperatura del calefactor, que es exponencial. Por lo tanto, cuando graficamos la diferencia de temperaturas en función del tiempo para una cierta pendiente, obtenemos la curva mostrada en la figura 9.2.

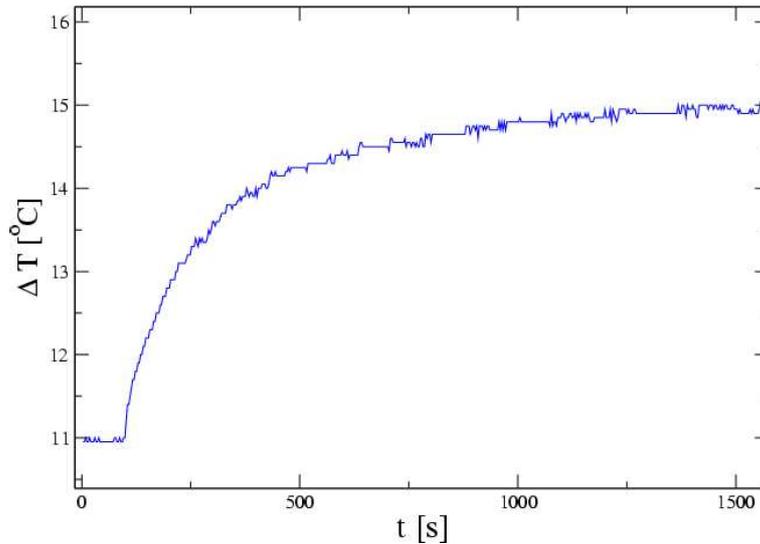


Figura 9.2: Dependencia de la diferencia de temperaturas en función del tiempo durante un cruce del umbral convectivo en el sistema de Rayleigh-Bénard.

Dado que el crecimiento del parámetro de control no es lineal con el tiempo, debemos ver con detalle cuál es nuestra verdadera variable frente a la cual estudiaremos la densidad de defectos. Como se ha dicho en el capítulo 1.2, según el modelo teórico la densidad de defectos dependerá del valor en el cual la longitud de correlación se congele, y esto sucede para valores del parámetro de control cercanos a la bifurcación. Como consecuencia, la variable esencial en nuestro problema es el ritmo con que se cruza la bifurcación. Por lo tanto, elegimos la inversa de la pendiente de la curva mostrada en 9.2 en una pequeña región alrededor del umbral convectivo. Para trabajar con variables adimensionales, la diferencia de temperaturas se adimensionaliza con  $\Delta T_c$  (ver párrafo siguiente), mientras que para el tiempo la adimensionalización es con el tiempo de difusión vertical. A la variable ya adimensionalizada la llamaremos  $\tau_p$ .

En el caso de aceite de silicona de 20 cSt., para un espesor de la capa de fluido de 3 mm., obtenemos experimentalmente un valor de la diferencia de temperaturas crítica  $\Delta T_c = 11.5^\circ C$ . Cabe señalar que esta diferencia de temperaturas es entre la placa metálica y el agua refrigerante, por lo que el  $\Delta T$  real aplicado sobre la

capa de fluido es menor a este valor. Cuando hacemos una estimación en base a los parámetros utilizados en el experimento, obtenemos que la diferencia de temperaturas crítica efectiva sobre la capa de fluido es de  $10.4^{\circ}\text{C}$ , considerando el número de Rayleigh crítico  $Ra_c$  para condiciones de contorno rígido-rígido, cuyo valor es de 1707.8[64].

## 9.6 Procesado de las imágenes

Para proceder con la explicación de los métodos y sus posibles ventajas e inconvenientes debemos tener en mente el tipo de imágenes que queremos analizar. Para ello, en la figura 9.3 se muestra una fotografía típica de la estructura, formada después de una medida con los ritmos mayores de crecimiento del parámetro de control.

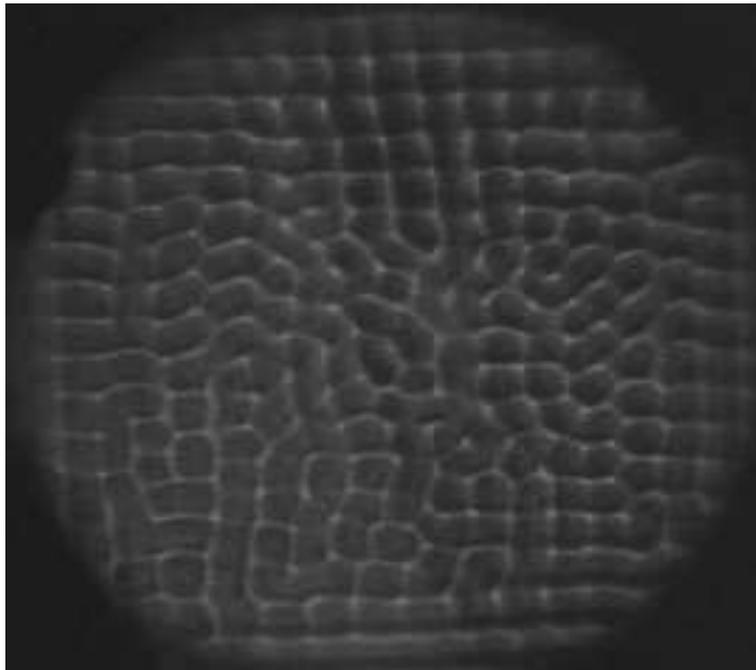


Figura 9.3: Imagen típica obtenida en una medida en el sistema convectivo de Rayleigh-Bénard.

En la estructura se ve que en la mayor parte de la celda hay dos modos coexistiendo simultáneamente, lo que da lugar a cuadrados. Esto se debe a que el fluido está limitado superiormente por un material que no es conductor perfecto del calor. En ese caso, cuando el estado homogéneo se inestabiliza da lugar a

la formación de cuadrados, aunque éstos son estables sólo en un pequeño rango en el parámetro de control  $\epsilon$ . Cuando  $\epsilon$  aumenta superando un dado valor, los cuadrados se inestabilizan para dar paso a una estructura de rollos convectivos, es decir, a un único modo dominando la estructura.

Hemos hablado en esta tesis de dos métodos para analizar imágenes (sección 3.2), el método geométrico y la demodulación compleja. ambos tienen pros y contras que mencionaremos aquí brevemente, enfocados ya en el caso que nos interesa.

El método geométrico (sección 3.1.1) es sencillo de aplicar, pero en imágenes con una mayoría de cuadrados tenemos el problema de que muy pequeñas perturbaciones en la posición de los polígonos pueden transformar de forma continua lo que antes eran cuatro cuadrados en dos pentágonos y dos cuadriláteros, como se ve en la figura 9.4. Por lo tanto, en este tipo de estructura no podemos utilizar este método para contar defectos, ya que pequeños errores al determinar el centro del polígono repercuten de forma importante en el resultado.

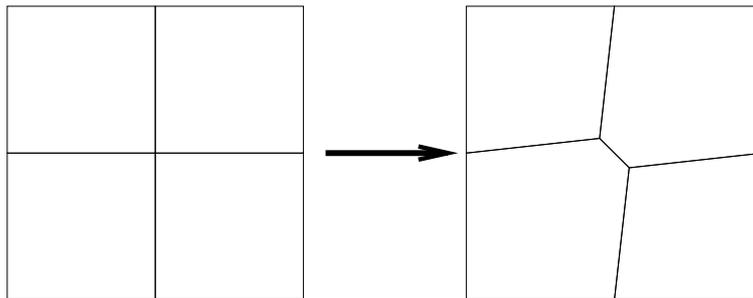


Figura 9.4: Ejemplo de un cambio arbitrariamente pequeño y continuo en la posición de los polígonos que produce un cambio en el número de lados.

Por otra parte, el segundo método que se describe en la sección 3.1.2 es la demodulación compleja. En este caso, estudiamos la imagen separando la contribución de cada uno de los modos. Para esto, el espectro de potencias de la imagen debe mostrar los máximos separados entre sí, de tal manera que se puedan aislar.

Para estas imágenes, de la misma manera que en el sistema convectivo de Bénard-Marangoni, tenemos diferentes dominios. Cada uno de estos dominios aportará uno o más modos al espectro de potencias. Como resultado, en el espectro de potencias tenemos modos en los cuales se vuelve muy difícil separar su contribución por estar unos muy cerca de los otros. La cercanía de los máximos restringe el radio del filtro que se debe utilizar, con lo que también se limitan las frecuencias permitidas en la reconstrucción. Como consecuencia, las amplitudes y

las fases de los modos individuales contendrán menos información, sobre todo en lugares con variaciones rápidas (asociadas a frecuencias altas) como, por ejemplo, en un defecto.

En este primer repaso a los métodos de identificación de defectos no encontramos ninguno que se adapte idealmente a nuestro caso. Sin embargo, teniendo en cuenta que las paredes de la celda favorecen dos direcciones particulares, y después de haber comprobado que la estructura está compuesta por dos modos, creemos que podemos estimar la cantidad de defectos considerando para todas las imágenes que sus espectros de potencias estarán compuestos principalmente por dos modos perpendiculares entre sí, alineados con las paredes de la celda. Así, en cada espectro de potencias se eligen los dos modos. Los radios de los filtros se eligen de tal manera que tengan el mayor tamaño posible sin que ambos modos se superpongan entre sí.

Por otra parte, como no sabemos cuáles son las configuraciones de defectos con mayor tiempo de vida media en una estructura de cuadrados, no podemos identificar un cierto conjunto de dislocaciones en los modos como un defecto único. Debido a esta limitación hemos optado por hacer un recuento de todos los defectos en todos los modos. Cabe señalar que a lo largo del análisis de las imágenes no se ha encontrado un patrón repetitivo formado por un conjunto de defectos, lo que podría darnos pistas acerca de un defecto metaestable en la estructura de cuadrados, como lo es el defecto penta-hepta en la estructura hexagonal. Además, las estructuras de cuadrados formadas en sólidos muestran que los defectos en este tipo de patrones están formados por dislocaciones en uno de los modos[65], hecho que refuerza el criterio adoptado.

Con el fin de evitar contar dislocaciones con excesiva influencia de la pared de la celda, se eliminan en el recuento los defectos que se encuentren a menos de 1.5 longitudes de onda del borde de la región de observación.



## Capítulo 10

# Resultados y discusión

En este capítulo mostramos los resultados obtenidos al contar los defectos en la estructura que aparece después de cruzar la bifurcación primaria en nuestra celda convectiva de Rayleigh-Bénard.

El número de defectos se ha contado según el método explicado en la sección 9.6. En tanto, el tiempo de cruce del umbral se ha adimensionalizado según lo dicho en la página 94. La viscosidad del fluido utilizado es de 20 cSt y la relación de aspecto física es aproximadamente 18.

En la figura 10.1 se muestran las medidas hechas en el sistema. Cada punto mostrado en el gráfico es el promedio de diez medidas, mientras que la barra de error se corresponde con la desviación estándar de dichas realizaciones.

En las gráficas se puede ver que, en líneas generales, el decaimiento del número de defectos en función del tiempo característico de cruce del umbral sigue una ley de potencias, cuyo forma, cuando se dibuja el logaritmo de las variables, se corresponde con una recta. Cuando hacemos el ajuste de las medidas con una función potencial, obtenemos para el exponente el valor de  $-0.45 \pm 0.07$  (resultado del test  $\chi^2$ : 60%).

Dicho valor es mayor al exponente predicho en el modelo teórico ( $-0.5$ ), que de todas formas entra en el intervalo del error. De forma análoga al análisis realizado en las medidas de las partes I y II, una razón para comprender esa pequeña desviación en el resultado es que en esta parte de la tesis estudiamos una estructura con dos modos principales, mientras que el modelo considera un único modo. De todas formas, podríamos considerar que nos acercamos a los supuestos del modelo en comparación con las partes I y II, ya que en esos casos la estructura tenía tres modos principales.

Por otra parte, el haber usado una viscosidad diferente a la de la parte I

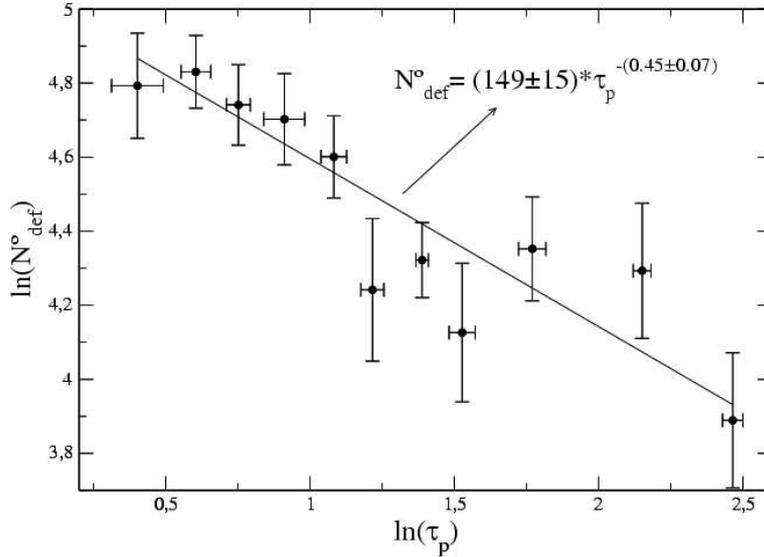


Figura 10.1:  $N^\circ$  de defectos en función del tiempo característico de cruce del umbral (adimensional) para el sistema convectivo de Rayleigh-Bénard. La viscosidad del fluido es de 20 cSt.

no permite una comparación más directa. Tampoco se puede comparar el comportamiento del exponente para diferentes viscosidades por no haber hecho esas medidas en esta parte de la tesis por problemas técnicos. Si aceptamos que el exponente varía con la viscosidad de forma similar a la de la parte I, la viscosidad podría estar causando el cambio en el valor del exponente respecto de aquella parte.

Teniendo en cuenta todos estos factores, podemos afirmar que para la viscosidad utilizada, y con una estructura formada por dos modos, el exponente se desvía muy ligeramente del valor predicho por el modelo. Entre las posibles causas para esta pequeña diferencia están las siguientes:

- el modelo obtiene el valor de -0.5 en base a un sistema concreto ( $^4\text{He}$ ), y dicho valor cambia cuando cambian los exponentes críticos de la transición estudiada.
- el número de modos de la estructura son dos, mientras que el modelo supone un único modo en la estructura. Respecto de este punto, no se puede afirmar que exista un cambio significativo cuando se pasa de tres a dos modos en la estructura estudiada.

## Capítulo 11

# Conclusiones sobre el sistema convectivo de Rayleigh-Bénard

En las medidas experimentales realizadas en la celda convectiva de Rayleigh-Bénard hemos estudiado la dependencia de la cantidad de defectos que aparecen en la estructura con el tiempo característico de cruce del umbral convectivo. A modo de resumen, podemos decir lo siguiente:

- en el sistema convectivo de Rayleigh-Bénard estudiado hemos encontrado una dependencia tipo ley de potencias para la cantidad de defectos en función del tiempo característico de cruce del umbral. Este resultado se puede deducir también siguiendo la línea argumental utilizada por Zurek[3].
- el valor del exponente del ajuste de las medidas experimentales es ligeramente mayor que el predicho por el modelo teórico para nuestro sistema, aunque está dentro del intervalo de error.
- en la estructura con dos modos estudiada no hay un cambio significativo en el valor del exponente obtenido con respecto a los valores de la parte I, donde la estructura, también convectiva, está formada por tres modos.
- si bien los defectos, tal como los hemos contado, coinciden con ceros del campo al igual que en modelo, la estructura está formado por dos modos acoplados, hecho que podría influir sobre la aparición de defectos. Esta afirmación está relacionada con el estudio hecho en la sección 4.2 acerca de la interacción de defectos de distintos modos durante la formación de la estructura. Para esto se hace necesario conocer la forma de los defectos con

mayor tiempo de vida media en una estructura de cuadrados en un sistema convectivo de Rayleigh-Bénard.

Las perspectivas que se abren a partir de este trabajo y que permitirían hacer afirmaciones más categóricas sobre el modelo y sus límites son:

- hacer medidas análogas a la de esta parte de la tesis para fluidos con otras viscosidades. Así, se podría hacer una comparación con la parte I de la memoria.
- repetir el experimento, cambiando la tapa superior de la celda de manera que su conductividad térmica sea suficientemente grande. De esta manera, la inestabilidad primaria se corresponderá con rollos convectivos, es decir, con una estructura con un único modo.
- caracterizar los defectos en una estructura de cuadrados, en particular para un sistema convectivo de Rayleigh-Bénard.

## Capítulo 12

### Conclusiones generales

Si bien hemos ido apuntando en cada parte de la tesis conclusiones y perspectivas futuras, pretendemos aquí señalar los puntos generales que se derivan de ellas, tanto como algunas de las cuestiones abiertas que deja esta memoria. A modo de resumen se muestra el cuadro 12.1, que condensa información sobre las estructuras estudiadas y los exponentes obtenidos.

	Convección B-M			Sist. Óptico		Convección R-B
Viscosidad	350	100	50	$2.3\nu_0$	$\nu_0$	20
Nº de modos	3	3	3	3	3	2
exponente	-0.27	-0.29	-0.44	-0.15	-0.20	-0.45

Tabla 12.1: Cuadro resumen sobre los sistemas estudiados, su viscosidad, el número de modos que tiene su estructura asociada y el exponente de la ley de potencias del número de defectos como función del tiempo característico de cruce de la transición.

Como conclusiones generales sobre la aparición de defectos en la formación de estructuras, podemos señalar:

- En los tres sistemas estudiados hemos corroborado la predicción hecha en el modelo teórico de Kibble[2] y Zurek[3] acerca del comportamiento tipo ley de potencias para la densidad de defectos en función del tiempo característico de cruce de la transición con ruptura de simetría. Cabe señalar

que el modelo estudiado en la parte II tiene algunas particularidades que podrían darse en otros sistemas subamortiguados, dando lugar a zonas en donde el comportamiento de la densidad de defectos se aparta de la ley de potencias. De todas maneras, el comportamiento de base continúa siendo explicado por el modelo.

- En los sistemas con más de un modo en la estructura, los defectos pueden tener que cumplir con algunos requisitos que no están presentes cuando hay un solo modo, lo que podría provocar una diferencia en la cantidad de defectos que aparecen en la estructura inicial.
- De confirmarse que los sistemas de las partes I y II están próximos a la división que hace el modelo teórico entre sistemas subamortiguados y sistemas sobreamortiguados, las medidas hechas corroboran la variación del exponente de la ley de potencias cuando se cambia el coeficiente de disipación, tal como predice el modelo.

Por otra parte, podemos señalar también las cuestiones abiertas que deja este trabajo:

- Estudiar un sistema convectivo con un único modo para obtener su exponente asociado y a partir de ese dato poder deducir si la diferencia encontrada en el exponente se debe a cuestiones intrínsecas de la bifurcación, como podrían ser los valores de los exponentes críticos, o por el contrario, la diferencia está asociada a la presencia de más de un modo en la estructura formada.
- Estudiar en detalle el comportamiento de la densidad de defectos cuando se cruza una bifurcación con rotura de simetría en el caso de sistemas subamortiguados. Esto permitiría confirmar predicciones hechas por simulaciones numéricas [34] y tendría consecuencias en el campo de la cosmología, donde la disipación es prácticamente nula.

## Bibliografía

- [1] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65(3):851–1112, 1993.
- [2] T. W. B. Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *J. Phys. A*, 9(8):1387–1398, 1976.
- [3] W. H. Zurek. Cosmological experiments in superfluid helium. *Nature*, 317:505–508, 1985.
- [4] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, USA, novena edición, 1994.
- [5] W. H. Zurek. Cosmological experiments in condensed matter systems. *Phys. Rep.*, 276(4):177–221, 1996.
- [6] D. I. Uzunov. *Theory of Critical Phenomena*. World Scientific, Singapore, 1993.
- [7] P. Couillet, L. Gil, and J. Lega. Defect-mediated turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 62(14):1619–1622, 1989.
- [8] G. D. Granzow and H. Riecke. Ordered and disordered defect chaos. *Physica A*, 249:27–35, 1998.
- [9] Joceline Lega. *Défauts Topologiques Associés à la Brisure de l'Invariance de Translation dans le Temps*. Tesis Doctoral, Université de Nice, (Niza, Francia), 1989.
- [10] N. D. Mermin. The topological theory of defects in ordered media. *Rev. Mod. Phys.*, 51(3), 1979.
- [11] S. Ciliberto, P. Couillet, J. Lega, E. Pampaloni, and C. Pérez-García. Defects in roll-hexagon competition. *Phys. Rev. Lett.*, 65(19):2370–2373, 1990.

- [12] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. Gén. Sci. Pure Appl.*, 11:1261–1271, 1900.
- [13] Blas Echebarria. *Inestabilidades Termocapilares en una Capa de Fluido*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, (Pamplona, España), 1998.
- [14] H. L. Mancini, D. Maza, J. Burguete, and J. Bragard. Bénard-Marangoni pattern formation: an experimentalist approach. *enviado a Phys. Rep.*, 2002.
- [15] J. R. A. Pearson. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.*, 4:489–500, 1958.
- [16] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Course of Theoretical Physics. Pergamon, Oxford, segunda edición, 1963.
- [17] M. F. Schatz, S. J. VanHook, W. D. McCormick, J. B. Swift, and H. L. Swinney. Onset of surface-tension-driven Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.*, 75(10):1938–1941, 1995.
- [18] K. Nitschke and A. Thess. Secondary instability in surface-tension-driven Bénard convection. *Phys. Rev. E*, 52(6):5772–5775, 1995.
- [19] K. Eckert, M. Bestehorn, and A. Thess. Square cells in surface-tension-driven Bénard convection: experiment and theory. *J. Fluid Mech.*, 356:155–197, 1998.
- [20] M. F. Schatz, S. J. VanHook, W. D. McCormick, J. B. Swift, and H. L. Swinney. Time-independent square patterns in surface-tension-driven Bénard convection. *Phys. Fluids*, 11:2577–2582, 1999.
- [21] P. Cerisier, C. Jamond, J. Pantaloni, and C. Pérez-García. Stability of roll and hexagonal patterns in Bénard-Marangoni convection. *Phys. Fluids*, 30(4):954–959, 1987.
- [22] P. Cerisier, S. Rahal, and B. Billia. Extrinsic effects on the disorder dynamics of Bénard-Marangoni patterns. *Phys. Rev. E*, E54(4):3508–3517, 1996.
- [23] P. Cerisier, S. Rahal, and N. Rivier. Topological correlations in Bénard-Marangoni convective structures. *Phys. Rev. E*, 54(5):5086–5094, 1996.
- [24] M. F. Schatz and G. P. Neitzel. Experiments on thermocapillary instabilities. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 33:93–129, 2001.

- [25] D. R. Jenkins and M. R. E. Proctor. The transition from roll to square-cell solutions in Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid. Mech.*, 139:461, 1984.
- [26] R. Krishnamurti. On the transition to turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, 42(2):295–320, 1970.
- [27] D. A. Nield. Surface tension and bouyancy effects in cellular convection. *J. Fluid. Mech.*, 19:341–352, 1964.
- [28] F. T. Arecchi, S. Boccaletti, and P. L. Ramazza. Pattern formation and competition in nonlinear optics. *Phys. Rep.*, 318:83, 1999.
- [29] P. G. de Gennes and J. Prost. *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford University Press, New York, segunda edición, 1993.
- [30] G. D'Alessandro and W. J. Firth. Spontaneous hexagon formation in a non-linear optical medium with feedback mirror. *Phys. Rev. Lett.*, 66(20):2597–2600, 1991.
- [31] R. Neubecker, G. L. Oppo, B. Thuering, and T. Tschudi. Pattern formation in a liquid-crystal light valve with feedback, including polarization, saturation, and internal threshold effects. *Phys. Rev. A*, 52(1):791–808, 1995.
- [32] P. Laguna and W. H. Zurek. Critical dynamics of symmetry breaking: quenches, dissipation, and cosmology. *Phys. Rev. D*, 58(8):085021, 1998.
- [33] A. Yates and W. H. Zurek. Vortex formation in two dimensions: when symmetry breaks, how big are the pieces? *Phys. Rev. Lett.*, 80(25):5477–5480, 1998.
- [34] E. Moro and G. Lythe. Dynamics of defect formation. *Phys. Rev. E*, 59(2):1303–1306, 1999.
- [35] I. Chuang, R. Dür rer, N. Turok, and B. Yurke. Cosmology in the laboratory: Defect dynamics in liquid crystals. *Science*, 251:1336–1342, 1991.
- [36] M. J. Bowick, L. Chandar, E. A. Schiff, and A. M. Srivastava. The cosmological Kibble mechanism in the laboratory: String formation in liquid crystals. *Science*, 263:943–945, 1994.
- [37] P. C. Hendry, N. S. Lawson, R. A. M. Lee, P. V. E. McClintock, and C. D. H. Williams. Generation of defects in superfluid  $^4\text{He}$  as an analogue of the formation of cosmic strings. *Nature*, 368:315–317, 1994.

- [38] R. Monaco, J. Mygind, and R. J. Rivers. Zurek-Kibble domain structures: the dynamics of spontaneous vortex formation in annular Josephson tunnel junctions. *enviado a Phys. Rev. Lett.*, 2002.
- [39] S. Ducci, P. L. Ramazza, W. González-Viñas, and F. T. Arecchi. Order parameter fragmentation after a symmetry-breaking transition. *Phys. Rev. Lett.*, 83(25):5210–5213, 1999.
- [40] J. Boussinesq. *Theorie Analytique de la Chaleur*, volume II. París, 1903.
- [41] H. L. Mancini. *Osciladores Térmicos de Bénard-Marangoni*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, (Pamplona, España), 1994.
- [42] W. Merzkirch. *Flow Visualization*. Academic Press, Inc., USA, 1987.
- [43] L. S. Tsimring. Penta-hepta defect motion in hexagonal patterns. *Phys. Rev. Lett.*, 74(21):4201–4204, 1995.
- [44] M. Bestehorn. Phase and amplitude instabilities for Bénard-Marangoni convection in fluid layers with large aspect ratio. *Phys. Rev. E*, 48(5):3622–3634, 1993.
- [45] P. Colinet, A. A. Nepomnyashchy, and J. C. Legros. Multiplication of defects in hexagonal patterns. *Europhys. Lett.*, 57(4):480–486, 2002.
- [46] T. Tam, D. Ohata, and M. Wu. Dynamics of a penta-hepta defect in a hexagonal pattern. *Phys. Rev. E*, 61(1):R9–R12, 2000.
- [47] D. Semwogerere and M. F. Schatz. Evolution of hexagonal patterns from controlled initial conditions in a Bénard-Marangoni convection experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 88(5):54501, 2002.
- [48] U. Thiele and K. Eckert. Stochastic geometry of polygonal networks: an alternative approach to the hexagon-square transition in Bénard convection. *Phys. Rev. E*, 58(3):3458–3468, 1998.
- [49] G. Voronoi. Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des forms quadratiques. duesieme memoire: Recherches sur les paralleloederes primitifs paralleloederes primitifs. *J. reine angew. Math.*, 134:198–287, 1908.

- [50] Paul Kolodner and Hugh Williams. Complex demodulation techniques for experiments on traveling-wave convection. Editores: F. H. Busse and L. Kramer, *Nonlinear Evolution of Spatio-Temporal Structures in Dissipative Continuous Systems*, páginas 73–91, New York, USA, 1990. Plenum Press.
- [51] J. Burguete, H. Chaté, F. Daviaud, and N. Mukolobwieg. Bekki-Nozaki amplitude holes in hydrothermal nonlinear waves. *Phys. Rev. Lett.*, 82(16):3252–3255, 1999.
- [52] Javier Burguete. *Inestabilidades Convectivas Producidas por un Calentamiento Localizado*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, (Pamplona, España), 1995.
- [53] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in fortran*. Cambridge University Press, New York, segunda edición, 1994.
- [54] S. Casado, W. González-Viñas, H. Mancini, and S. Boccaletti. Topological defects after a quench in a Bénard-Marangoni convection system. *Phys. Rev. E*, 63(5):57301, 2001.
- [55] R. K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth Heinemann, segunda edición, 1996.
- [56] G. Ahlers. Critical phenomena at low temperature. *Rev. Mod. Phys.*, 52(2):489–503, 1980.
- [57] L. P. Kadanoff, W. Gotze, D. Hamblen, R. Hecht, E. A. S. Lewis, V. V. Palciauskas, M. Rayl, and J. Swift. Static phenomena near critical points: theory and experiment. *Rev. Mod. Phys.*, 39(2):395–431, 1967.
- [58] W. González-Viñas, S. Casado, J. Burguete, H. L. Mancini, and S. Boccaletti. Defect dynamics during a quench in a Bénard-Marangoni convection system. *Int. J. Bif. Chaos*, 11(11):2887–2894, 2001.
- [59] A. N. Rachmanov and V. I. Shmal’gausen. Modelling of the dynamics of parameters of nematic liquid crystal layers. *Sov. J. Quantum Electronics*, 21(9):878–883, 1994.
- [60] S. Juul Jensen. Manipulation, stabilization, and control of pattern formation using Fourier space filtering. *Phys. Rev. Lett.*, 81(8):1614–1617, 1998.

- 
- [61] A. V. Mamaev and M. Saffman. Selection of unstable patterns and control of optical turbulence by Fourier plane filtering. *Phys. Rev. Lett.*, 80(16):3499–3502, 1998.
- [62] R. Martin, A. J. Scroggie, G. L. Oppo, and W. J. Firth. Stabilization, selection, and tracking of unstable patterns by Fourier space techniques. *Phys. Rev. Lett.*, 77(19):4007–4010, 1996.
- [63] G. K. Harkness, G. L. Oppo, R. Martin, A. J. Scroggie, and W. J. Firth. Elimination of spatiotemporal disorder by Fourier space techniques. *Phys. Rev. A*, 58(3):2577–2586, 1998.
- [64] D. M. Maza. *Transición al caos en convección de Bénard-Marangoni con pequeña relación de aspecto*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, (Pamplona, España), 1995.
- [65] F. R. N. Nabarro. *Theory of crystal dislocations*. Dover, New York, 1987.

## Resumen

En la presente memoria se estudia experimentalmente la aparición de defectos en una transición con ruptura de simetría en tres sistemas diferentes. Para ello se cuenta el número de defectos que aparecen en la estructura emergente en función del tiempo característico de cruce de la transición. El trabajo se enmarca en un modelo teórico que predice la dependencia tipo ley de potencias de la densidad de defectos con el tiempo característico de formación de la estructura, así como los exponentes universales de dicha ley.

Los experimentos se han llevado a cabo en tres sistemas diferentes: un sistema convectivo de Bénard-Marangoni, un sistema óptico no lineal tipo Kerr con realimentación y un sistema convectivo de Rayleigh-Bénard. Los primeros dos sistemas, siendo de naturaleza completamente diferente, dan lugar a estructuras hexagonales análogas, mientras que el último sistema produce un patrón compuesto principalmente por cuadrados para los parámetros utilizados.

Las diferentes medidas llevadas a cabo comprueban el comportamiento predicho en el modelo teórico, si bien el valor experimental de los exponentes es distinto que el predicho teóricamente.

En el sistema convectivo de Bénard-Marangoni se hace además un estudio complementario sobre el proceso de formación de un defecto penta-hepta en la aparición de la estructura hexagonal. Hemos comprobado que el defecto aparece en una región en la que las dislocaciones que lo componen forman un estado ligado. Los resultados obtenidos en este punto contribuyen a interpretar los valores medidos del exponente.

---

## Abstract

In this work, we experimentally study the appearance of defects in three different pattern forming systems. We have measured the number of defects in the emerging structure as a function of quench time. We compare our results with a theoretical model that relates the number of defects with the quench time through a power law.

Experiments have been realized in three different systems: Bénard-Marangoni convection, a nonlinear optical system consisting of a Kerr medium inserted into a feedback loop and Rayleigh-Bénard (RB) convection. The first two systems, while completely different produce hexagonal structures. For the parameter range studied the RB system produces a square pattern.

The data collected from the experiments follows a power law, although the fitting values obtained from the data differ from the exponents predicted by the theory.

Furthermore, in the Bénard-Marangoni convection we also have studied the dynamics of formation of a penta-hepta defect. We have shown that the two dislocations forming the penta-hepta defect interact strongly, leading to a bound state. This last result helps us to understand the discrepancy between the measured exponent and the theoretical one.