Fernando **Nagore**

GEOMETRÍA MÉTRICA Y DESCRIPTIVA PARA ARQUITECTOS

REEDICIÓN A CARGO DE JOSÉ MANUEL POZO

T6)

GEOMETRÍA MÉTRICA Y DESCRIPTIVA PARA ARQUITECTOS

edición T6 EDICIONES, S.L.
dirección JOSÉ MANUEL POZO

coordinación JOSÉ MANUEL POZO
diseño gráfico RUBÉN A. ALCOLEA; I. GARCÍA
dibujo ANA LAVILLA

fotomecánica CONTACTO GRÁFICO, S.L.
Río Elortz, 2 bajo, 31005, Pamplona - Navarra
impresión INDUSTRIAS GRÁFICAS CASTUERA
Polígono Industrial Torres de Elorz, Pamplona - Navarra
depósito legal NA: 2570/2007
ISBN 978-84-89713-99-5

GEOMETRÍA MÉTRICA Y DESCRIPTIVA PARA ARQUITECTOS

PRESENTACIÓN. JOSÉ MANUEL POZO

Esta presentación se hace necesaria fundamentalmente para dar cuenta de las modificaciones introducidas respecto de la edición original, así como para justificarlas. Porque no es ni una simple reedición ni una obra nueva.

Para eso previamente es preciso explicar algunas cuestiones relativas a la génesis de los tres libros de la *Geometría métrica y proyectiva para arquitectos* de Fernando Nagore y a cómo se publicaron, sobre todo atendiendo al hecho de que se trata de una obra agotada, y que por eso mismo muchos de los usuarios de esta nueva edición no conocerán aquélla, que condiciona mucho ésta.

Esta edición surge como una necesidad, debido a que la edición original, elaborada manualmente por Nagore, ya no podía seguir reproduciéndose con la debida calidad; lo que ha obligado a preparar una nueva, en la que era preciso decidir diversos detalles acerca de su contenido y del modo de presentarlo.

Una de las ideas que han presidido la preparación de esta nueva edición ha sido respetar, en todo lo que fuera posible, el diseño de la obra original, tanto por lo que se refiere a la ordenación y composición de los capítulos, como a la redacción de los textos y el desarrollo de las demostraciones y a la terminología y simbología empleadas por Fernando Nagore, a quien sigue correspondiendo el mérito de su preparación, un tanto extraña y audaz para los vientos que corren por las Escuelas de Arquitectura españolas, poco favorables para las materias de corte científico y rigurosas; esas para las que, con frase feliz de un gran amigo mío y buen arquitecto y profesor de proyectos, "no sirve ir con las manos en los bolsillos, y confiar en tener una ocurrencia interesante, sino que tienes que saber".

Sirva esta obra como homenaje al ir contra corriente de Nagore, y también como agradecimiento a lo que recibimos de él.

Sentado esto, es importante señalar que la decisión de no cambiar nada o casi nada no responde al convencimiento de que la obra no sea mejorable. Pero pienso que lo que ofrece es suficiente para la finalidad para la que fue concebida. Y por eso apenas hemos añadido nada. Y eso que hay cosas que, en mi opinión, sobran; tanto desde el punto de vista meramente instrumental, como incluso desde la consideración de su posible utilidad en el desarrollo de hábitos mentales útiles para la imaginación espacial y la concepción de arquitectura; pero pienso que aun ésas deben mantenerse, para respetar el rigor y el deseo de acabamiento de las cuestiones tratadas que Nagore quiso para su obra; por eso, aunque podrían haberse suprimido algunos epígrafes sin que desmereciese la eficacia operativa de la publicación, hemos preferido mantenerlos.

Los cambios son, genéricamente considerados, de tres tipos:

De estructura
Formales o de diseño de las páginas
De contenido

Todos tienen bastante que ver con el modo en que compuso la obra Fernando Nagore: personal y artesanalmente.

Hay que saber que entonces no se disponía de medios informáticos personalizados y como la composición de la obra y la redacción de los textos la deseaba hacer él, se tuvo que valer de una sencilla máquina de escribir. Elaboraba él los dibujos y ajustaba los textos y las explicaciones al espacio disponible, lo cual suponía un tremendo trabajo, en el que no era fácil que nadie pudiera ayudarle, porque para hacerlo, además de saber dibujar con limpieza y escribir a máquina, hacía falta tener un cierto gusto compositivo y, sobre todo, había que saber geometría, como señalaba el amigo al que aludo al comienzo de estas líneas, para decidir qué debía decirse u omitirse en cada caso en función del espacio que hubiese quedado libre en torno a los dibujos.

Esto explica algunos 'desórdenes' evidentes de la obra. Si en un momento dado se le ocurría una nueva cuestión acerca de un punto ya tratado, o había tenido un olvido, el único modo de remediarlo era volver a empezar desde el punto en que desease introducir el cambio. Para eludir esa molesta repetición, algunas cuestiones aparecen tratadas en varios lugares, o añadidas al final del capítulo en la sección de SUGERENCIAS, ACLARACIONES, NOTICIAS.

Con esta aclaración como justificación de fondo para cuanto hemos modificado, podemos pasar a señalar los cambios estructurales, formales y de contenido que finalmente hemos introducido a fin de hacer de la obra algo más útil, más agradable y más eficaz.

I. CAMBIOS EN AL ESTRUCTURA DE LA OBRA

Como se ve, hemos reunido los tres libros en un único volumen aunque manteniendo la autonomía de aquéllos dentro de él. Si bien hemos dividido el libro III de Nagore en dos distintos, el III (La línea curva) y el IV (Geometría Proyectiva).

Además, hemos añadido un apéndice, completando el volumen, con una COLECCIÓN DE PROBLEMAS de Geometría Métrica, cuya resolución pensamos que puede ser de gran utilidad para la asimilación real, y no sólo memorística, de los conceptos recogidos en los libros anteriores. Los problemas que conforman ese apéndice son una selección de los que Nagore proponía en sus clases a sus alumnos, y las explicaciones que los acompañan son igualmente suyas.

No es improbable que él también, de haber podido, hubiese publicado unidos al menos los dos primeros libros, que se refieren a la Geometría Métrica, pero como la elaboración de sus libros fue personal y artesanal, los tres libros vieron la luz con más de un año de distancia entre sí. De hecho, la primera edición del primer volumen fue completamente experimental y estaba encuadernada con un gusanillo de plástico.

Esa sucesión en el tiempo dificultaba mucho, por otra parte, la preparación de un ÍNDICE DE TÉRMINOS geométricos, que ahora hemos preparado, que remite a las páginas de la obra en que las cuestiones son tratadas con mayor amplitud o especificidad.

II. CAMBIOS FORMALES

Como se ha señalado, la elaboración del libro por Nagore fue progresiva; posiblemente por esa razón él recomenzaba la numeración de los teoremas en cada capítulo, a fin de evitar que la introducción de alguno nuevo, en un momento dado, en algunos de ellos, le obligase a renumerar todos, lo que equivaldría a repetir buena parte del trabajo.

Nosotros hemos decidido numerar los teoremas correlativamente dentro de cada libro, desde el Teorema 1.1 del libro I al teorema 18.6 del libro IV, porque nos parece que así evitamos confusiones innecesarias, y son más fáciles y claras las referencias internas de la obra.

Igual criterio hemos adoptado con relación a las ilustraciones, que hemos numerado correlativamente dentro de cada libro.

De todos modos el cambio más evidente desde el punto de vista formal se refiere a los dibujos, y a la distribución de estos con relación al texto. De entrada esos dibujos ya no son los elaborados a mano por Nagore sino que se han rehecho por medios informáticos. Han perdido gracia, pero pensamos que han ganado en claridad.

Y los textos no envuelven ya a los dibujos, sino que definen un cuerpo propio y continuo, en el que pueden destacarse claramente los distintos Teoremas, Notas, Corolarios,…

También hemos sustituido el subrayado de la obra original por textos en negrita, y hemos resaltado en color los enunciados de los Teoremas, para introducir un detalle alegre, que rompa la monotonía de las columnas de texto, y hacer más grata y cómoda su lectura.

III. CAMBIOS EN LOS CONTENIDOS

Éstas son indudablemente las alteraciones más delicadas.

Como se ha señalado anteriormente, se ha procurado mantener casi íntegra la redacción y organización interna original.

Sin embargo, parece suficientemente justificado introducir algunas modificaciones, que la experiencia de uso de esos libros a lo largo de estos años recomiendan hacer, o bien que se estiman convenientes, porque con ellas se completa alguna carencia advertida, o porque se resuelve algún desorden evidente en la disposición y concatenación de los desarrollos teóricos, cuya inadecuada ubicación, por otra parte, es bastante probable que proceda también del modo en que fue confeccionada la obra, como se ha apuntado anteriormente.

Lógicamente hemos corregido las erratas que hemos descubierto, cosa que no sería necesario ni comentar. Y confiamos en no haber introducido otras nuevas.

Por último, hemos completado la BIBLIOGRAFÍA, añadiendo obras más recientes, de más fácil consulta, pero manteniendo las que Nagore dispuso, porque son, en algunos casos, de mayor profundidad y extensión, aunque sean más difíciles de localizar.

ADVERTENCIA PRELIMINAR, PARA NADA BANAL. JOSÉ MANUEL POZO

Aunque, como señalo en la PRESENTACIÓN, al preparar esta edición hemos procurado respetar máximamente el concepto y composición de la obra original dactiloscrita, como homenaje y reconocimiento a Fernando Nagore, al que tuve la dicha de conocer, y a cuyo magisterio, amistad y señorío debo mi actual conocimiento de la ciencia a la que él, tal vez el último romántico de la geometría, consagró los últimos años de su vida, sin embargo me ha parecido necesario añadir esta ADVERTENCIA preliminar introductoria, con la que no pretendo corregir una carencia ni completar su contenido, sino, simplemente, poner en su lugar debido una cuestión fundamental, que él colocó dentro de la obra, posiblemente porque cuando tomó conciencia de la necesidad de esta advertencia, la obra ya estaba adelantada, y su confección manual no facilitaba la ubicación de las nuevas ocurrencias en el lugar adecuado.

Esa advertencia, que juzgo necesaria, consiste sencillamente en poner sobre aviso al lector de que se apresta a emplear una obra concebida en el universo geométrico euclidiano.

Esto es, que la aceptación del célebre Postulado V del Tratado de Geometría de Euclides es una premisa previa a los desarrollos que contienen estas páginas.

Por la razón que sea, esta afirmación, fundamental, en puro rigor científico, no se hace en la obra de Nagore hasta la página 27 (en la edición primera), siendo así que todas las afirmaciones que se vierten en las páginas anteriores requieren de su aceptación para su validez.

Podrá pensar alguno que es una advertencia innecesaria, por lo obvio, pero no compartiré su opinión, ya que la geometría euclidiana, en la que vamos a movernos, es tan verosímil como su contraria; eso sí, es más cómoda para nosotros, porque los modelos a que da lugar coinciden mejor, apreciable e intuitivamente, con lo que creemos observar a diario, en el entorno que nos rodea, que los modelos, más complejos, propios de las geometrías no euclidianas.

Pero en rigor, no se puede decir que el espacio 'real' coincida con el de la geometría euclídea, sino simplemente que esta concepción geométrica ofrece representaciones más fácilmente imaginables.

Lo cual, en una obra científica destinada a su uso universitario nos obliga a hacer la advertencia que estamos haciendo.

Así, por ejemplo, en la geometría de Riemann se afirma que por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela a ella, lo que contradice el Postulado V del Tratado de Geometría de Euclides y, sin embargo, como señala Artigas, el éxito de la teoría de la relatividad ha llevado a algunos a plantearse si el espacio 'real' no responderá en realidad a la geometría de Riemann, y de hecho se han propuesto interpretaciones en esa dirección. Lo que sirve, según Artigas, para advertir de que al hablar de realismo referido a un modelo geométrico debe hacerse de modo bastante relativo y limitado.

Con todo, es más útil seguir haciéndolo, en el sentido antes apuntado. Esto es, que resulta práctico aceptar que la geometría euclídea responde a la realidad, ya que parece ajustarse imaginativamente a las observaciones que proceden de la experiencia perceptiva ordinaria, y es la que ofrece modelos de más fácil comprensión[1].

UNA SEGUNDA ADVERTENCIA, ÉSTA ACERCA DE LA CONVENIENCIA DE SEGUIR ESTUDIANDO HOY LA GEOMETRÍA MÉTRICA Y LA PROYECTIVA. CON VARIOS CONSEJOS, DE MIES VAN DER ROHE UNO, DE LE CORBUSIER OTRO, DE BERLAGE EL TERCERO

No puedo desaprovechar la oportunidad que me ofrece la presentación de esta obra para justificar no sólo la validez de su contenido sino la vigencia de su estudio en una Escuela de Arquitectura a comienzos del siglo XXI.

Para lo que me voy a servir de la palabra de dos de los maestros que han alimentado con sus ideas y sus obras el movimiento moderno: Le Corbusier y Mies van der Rohe.

Si aceptamos que la arquitectura es "el juego sabio, correcto y magnífico de los volúmenes reunidos bajo la luz[2]" , será forzoso que nosotros, lectores y usuarios de esta obra, actuales o futuros arquitectos, que anhelamos imaginar nuevas bellezas arquitectónicas, conozcamos y estudiemos las propiedades geométricas de esos volúmenes con los que la hemos de componer, así como las que afectan a los sistemas mediante los podremos representar.

"La sensación, frente a la arquitectura, dirá también Le Corbusier, la obtendréis mediante la medición de las distancias, de las dimensiones, de las alturas, de los volúmenes: matemática poseedora de una clave que dará (o no) la unidad, según que tenga éxito o fracase. ¿Lo creeréis? Esta clave de la arquitectura, la *proporción*, se ha perdido, olvidado. Ya no pensamos en la que en cierta época fue todo y conducía hasta el mismo misterio; ni nos ocupamos de ella, la hemos abandonado"[3].

En lo cual, esto es, en la estima y valoración de la proporciones como generadoras del equilibrio arquitectónico y la unidad, coincidía incluso con Berlage, que tantas disputas mantuvo con él en otros campos, pero para quien también "la proporción constituía la sal-

1. Para una consideración más extensa del tema Vid. ARTIGAS, Mariano y SANGUINETI, Juan José, "Lugar, Espacio, Geometría"; recogido en *Filosofía de la naturaleza*; Ed. Eunsa, Pamplona, 1989, pp. 165-187.

2. LE CORBUSIER, *Hacia una arquitectura*; Ed. Poseidón. Buenos Aires, 1978, p. 27.

3. LE CORBUSIER, Mensaje a los estudiantes de arquitectura, *La arquitectura*, n. 9. Ed. Infinito, Buenos Aires 1961, p. 38.

vaguardia contra la simple moda pasajera, una garantía de valor permanente"[4].

Por eso aunque debamos reconocer que la Geometría atraviesa actualmente una cierta crisis de identidad, como todo lo riguroso y no sujeto a la volubilidad de lo opinable, no podemos renunciar a seguir defendiendo la necesidad de su estudio y a mantener su esencia científica y a conocer sus fundamentos.

El proceso mediante el que se logra la transmisión de la ciencia geométrica, inevitablemente arduo y largo –y este es posiblemente el triste origen de la crisis de identidad apuntada–, lejos de entenderse como algo surgido de cientifismos obsoletos o de prácticas encaminadas a lograr la ejercitación en el dominio de determinadas habilidades gráficas, superadas aparentemente por los logros de la informática, debe plantearse como un cauce privilegiado (al tiempo que difícilmente sustituible) para adquirir simultáneamente hábitos mentales de ideación espacial y destrezas geométricas, necesarios para potenciar la capacidad creativa.

Que es casi lo mismo que afirmaba Mies cuando defendía que "los estudiantes, en paralelo a su formación científica, han de aprender primero a dibujar para dominar los medios técnicos de expresión y educar el ojo y la mano"[5]. Dicotomía –ciencia, técnica/arte, sensibilidad– en la que radica buena parte de la dificultad evidente que caracteriza al aprendizaje de la arquitectura.

Mies completaba su consejo apuntando algunas ideas acerca de cómo propiciar esa educación visual y técnica, cuando recordaba sus comienzos como director del Departamento de Arquitectura del IIT de Chicago: "Según mis convicciones cualquier principiante, con una formación y orientación adecuadas, podía convertirse en el plazo de un año en un buen dibujante. (…) Algo más tarde realicé el descubrimiento sorprendente de que los alumnos parecían comprender aquello que les explicaba sobre las proporciones y, sin embargo, en sus ejercicios no desarrollaban el más mínimo sentido para ellas. Se me hizo claro que sus ojos sencillamente no podían percibir las proporciones"[6].

Porque es preciso convencerse de que adquirir ese sentido de la proporción y la medida no es cosa fácil, y requiere insistir en el estudio de las que se dan, lo queramos o no, en los cuerpos y figuras con las que habremos de trabajar al crear y delimitar nuevos espacios, de modo que de ellas surja la armonía y alcancemos la fuerza de la unidad, y más aun, ya que, como afirmaba Schulze, para Berlage "la proporción en la geometría era un medio formal para lograr el orden en la arquitectura y conducirla a la cualidad más deseable en el arte de construir: el reposo"[7]; de modo que para él "la proporción constituía la salvaguardia contra la simple moda pasajera, una garantía de valor permanente"[8].

Que es una idea que nos remite, en última instancia, a plantear la necesidad de no contentarse ni siquiera con hacer consideraciones superficiales acerca de las medidas y las figuras geométricas, sino que es preciso remontarse a las raíces, y al estudio riguroso de la geometría arrancando de los principios elementales de la geometría clásica, como puedan serlo, a modo de ejemplo, el V Postulado de

4. Vid. BERLAGE, Hendrich Petrus, *Thoughts on Style 1886-1909*, Getty Center Publications Programs. Santa Mónica, 1996, pp.185-257: The foundations and Developement of Architecture, (Zurich, 1908). p. 241.

5. VAN DER ROHE, Mies, "Directrices para la enseñanza de la arquitectura"; en: *Mies van der Rohe, Die Kunst der Struktur (Mies van der Rohe, el arte de la estructura)*, Zurich/Stuttgart, 1965; recogido en NEUMEYER, Fritz, *Mies van der Rohe. La palabra sin artificio. Reflexiones sobre arquitectura*; 1922-1968. El Croquis editorial. Madrid, 1995, p. 507.

6. Cfr. VAN DER ROHE, Mies, "Seminario Peterhans para entrenamiento visual"; en: *Mies van der Rohe. Lehre und Schule (Mies van der Rohe, enseñanza y escuela)*, Basilea/Stuttgart, 1977; recogido en NEUMEYER, Fritz, *Mies van der Rohe. La palabra sin artificio. Reflexiones sobre arquitectura*; 1922-1968. El Croquis editorial. Madrid, 1995, p. 505.

7. SCHULZE, Frank, *Mies van der Rohe; Una biografía crítica*; Hermann Blume editor. Madrid, 1986, p. 69.

8. Vid. BERLAGE, Hendrich Petrus, *Thoughts on Style 1886-1909*, Getty Center Publications Programs. Santa Mónica, 1996, pp.185-257: The foundations and Developement of Architecture, Zurich, 1908, p. 241.

la Geometría de Euclides al que nos hemos referido en la nota preliminar, o el fundamental Teorema de Thales, que cito expresamente porque su estudio no es en absoluto extraño a ese objetivo de lograr el control, intelectual y gráfico, de los volúmenes bajo la luz.

LA GEOMETRÍA MÉTRICA

El aprecio por la precisión y la exactitud, el conocimiento y dominio de las proporciones, de las cualidades métricas y la estructura de los volúmenes y de las curvas..., así como las cuestiones geométricas que permitirán el estudio del soleamiento, de las propiedades métricas de la reflexión, y de la transmisión de la luz y del sonido, y otras muchas, son conocimientos convenientes para un arquitecto.

Sin duda en esa tarea resulta difícilmente sustituible el papel de la Geometría Descriptiva, "que ancla la representación de escenarios a reglas lineales y proporcionales estrictas que, como fuertes convenciones, han sido entendidas como peculiaridades estructurales de la percepción visual"[9].

Si consideramos que el papel es, a fin de cuentas, tan sólo un medio para anotar la idea y transmitirla, es claro que ese proceso no se puede llevar a cabo de modo inteligible al margen de las cualidades geométricas de la realidad, sirviéndonos de un código de signos caprichosos e inventados, desvinculado de las propiedades formales y dimensivas de la arquitectura que se representa. Esa representación 'recoge', debe 'recoger', de modo eficaz, la realidad formal de lo representado, porque "la geometría no ha sido aplicada sino que surge al efectuar el trato con la materia y las extensiones en quehaceres de índole arquitectónica"[10].

Sólo respetando las reglas de la biunívoca relación existente entre la geometría de la realidad y la de su dibujo, las formas finales en que se traduce la representación de un hecho o imaginación arquitectónicos, forzosamente bidimensionales, reflejarán la riqueza tridimensional del espacio definido por ellas, que constituye la esencia de la arquitectura.

Por eso, lo primero que debe lograrse es adquirir un adecuado conocimiento de las cualidades métricas de los cuerpos y de las formas geométricas, de sus proporciones, relaciones y medidas. Aunque las cualidades geométricas dignas de estudio no sean sólo las métricas y dimensivas.

Ya que será preciso, además, internarse en el más complejo e intelectual mundo de la Geometría Proyectiva, que conduce al conocimiento de las relaciones existentes entre los cuerpos y las superficies, tan sorprendentes como inevitables, que tienden invisibles lazos entre las figuras y los volúmenes, acordándolas entre sí o, por el contrario, poniendo en evidencia sus desavenencias formales.

Pero sólo una vez alcanzado el dominio de las proporciones, se podrá atender a esas relaciones y a la proyectividad. De modo que la lucha por el dominio de la geometría del plano deberá ser la palestra intelectual de la mente que aspire a dominar el espacio plu-

9. SEGUÍ DE LA RIVA, Javier, "El reflejo de la movilidad en la arquitectura", Revista *EGA* n. 9, p. 27.

10. SEGUÍ DE LA RIVA, J., "La arquitectura y el dibujo como envolturas. Para un reajuste en el entendimiento del dibujar y el proyectar"; en *Dibujar lo que no vemos*, Ed. Universidad de Granada, Granada, 2004, pp. 1101-1104.

ridimensional y a distribuirlo, buscando la máxima riqueza, a partir del mínimo número de elementos.

La libertad compositiva de la arquitectura moderna y las ilimitadas posibilidades técnicas que aparentemente posee, permiten hoy por hoy proyectar casi cualquier cosa, pues con los nuevos materiales se puede hacer realidad prácticamente todo. Lo cual, paradójicamente, exige mayor rigor y sentido en la determinación de lo que se debe hacer, atendiendo aquella sentencia que Paul Valery ponía en boca de Sócrates[11] cuando afirmaba que "la mayor libertad nace del mayor rigor". El hecho de que ahora se pueda emplear un número mucho mayor de términos o 'vocablos' arquitectónicos, obliga a tener un conocimiento mayor de la sintaxis y la gramática de ese lenguaje plástico, si se quiere 'escribir' correctamente y con elegancia.

En ese proceso a la Geometría Descriptiva le compete ser precisamente el cauce para dominar y sistematizar los lenguajes arquitectónicos al servicio del proyecto, pues "la codificación lingüística señala el advenimiento de la madurez de la historia de la arquitectura"[12].

Ya que tanto si lo que se busca es contribuir al proceso de capacitación para el proyecto, preparando las mentes de los futuros arquitectos para diferenciar "lo que es posible, de lo que es necesario y de lo que tiene sentido" –que, según Mies, es lo que deberá distinguir la orientación correcta de cualquier enseñanza de la arquitectura[13]–, como si lo que se quiere es simplemente proporcionar habilidades gráficas útiles para la praxis proyectual, le corresponde máximamente a la Geometría Descriptiva el desarrollo de las disposiciones intelectuales que requiere la ideación espacial.

LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Por eso estimo que para poder dar una respuesta arquitectónica a tono con nuestro tiempo, pensando, claro está, en una arquitectura de verdad, esto es, comprometida y propositiva, en una arquitectura con recorrido, se necesita desarrollar una notable capacidad de abstracción, y tener un considerable dominio de la medida, la proporción y la relación proyectiva de las masas y los planos. "La arquitectura, dirá Le Corbusier, es espacio, ancho, profundidad y altura, volumen y circulación. La arquitectura es una concepción de la mente"[14].

Para el diseño de una arquitectura que se define a partir de las relaciones que se establecen entre unos elementos y otros, con intervención ineludible de las razones de medida y posición, se requiere una mente habituada a plantear y aprovechar esas dependencias y relaciones.

De ahí que, a mi modo de ver, la docencia de la geometría encaminada al diseño de arquitectura, deba tener necesariamente hoy en día, mucho más que antes, una matriz proyectiva; que deberá apoyarse en la posesión previa de los conocimientos métricos y en un adecuado sentido de la proporción, que contribuya a familiarizar al futuro arquitecto con el descubrimiento y formulación de la importancia de las relaciones que se dan entre los cuerpos y figu-

11. VALERY, Paul, *Eupalinos o el Arquitecto*; Galería-Librería Yerba, Murcia, 1982, p. 81.

12. ZEVI, Bruno, *El lenguaje moderno de la arquitectura*; Ed. Poseidon, Barcelona, 1978, p. 81.

13. VAN DER ROHE, M., op. cit.

14. Cfr. LE CORBUSIER, "Si tuviese que enseñarles arquitectura", *Architectural Design*, n. 29, II-1959; recogido en *Mensaje a los estudiantes de arquitectura*, Ed. Infinito, Buenos Aires 1961, pp. 61-69.

ras, y en las transformaciones y movimientos que se producen en el plano, de modo que encadenados y adecuadamente proporcionados entre sí, alcancen un equilibro armónico.

Sobre la formación proyectiva de ámbito bidimensional, se podrá fundamentar la educación de la cabeza en el control y la definición del espacio tridimensional, intelectualmente concebido, sirviéndose del recurso a los sistemas diédrico y cónico de representación, como medios para desarrollar máximamente la visión espacial, explotando las cualidades de ambigüedad, superposición y transparencia que caracterizan al empleo de esos lenguajes gráficos.

Por eso se impone la defensa (o recuperación) no sólo de la Geometría Descriptiva, como apuntaba, sino de las disciplinas sobre las que se apoya: la Geometría Métrica y la Proyectiva, cuya docencia se ha visto últimamente relegada en las Escuelas, cuando no, en ocasiones, acosada y combatida, con atrevida osadía (no exenta de ignorancia), ya que la concepción del espacio moderno como esencia de la arquitectura tiene matriz proyectiva[15].

Tal vez ese ataque pueda proceder del enfoque 'desenfocado' que ha tenido en ocasiones, propiciado por el hecho de que por decenios haya sido cultivada sobre todo por matemáticos. Que ha sido la causas, además, de que la materia se haya ido situando de modo progresivo, en la mayoría de las Escuelas, al margen del hecho proyectual, como una más de las materias que componen la parte 'técnica' (o a lo sumo gráfica) de la carrera, perdiendo de vista que es precisamente a la Geometría Descriptiva a la que le compete potenciar al máximo en el futuro arquitecto la capacidad de 'ver' en el espacio y de dominar los 'lenguajes' propios de la tarea proyectual-creativa, enseñándole a usar y a leer un 'pentagrama'. De tal modo que, como postulaba Mies, gracias a eso desaparezcan de los trabajos la complejidad y el desorden, que se renuncie a las líneas que carezcan de significado y se llegue a estar en condiciones de captar el verdadero sentido de las proporciones. "Nosotros los arquitectos, dirá Aburto, que manejamos casi exclusivamente formas geométricas, tenemos la obligación de percibir y comprender la expresión de las mismas. Es un lenguaje tan elocuente como lo es el pentagrama para los músicos. Con la única diferencia de que si en éstos hay un acuerdo reglamentado y previo, en nosotros hay acuerdo cuando existe sensibilidad"[16].

En realidad la concepción moderna de la arquitectura, abstracta y volumétricamente elemental, lejos de rechazar el estudio de la geometría, lo precisa aun más y exige más de la materia, aunque sea indudablemente de un modo nuevo.

"Todo está en la planta y en la sección", afirmaba Le Corbusier precisamente en su *Mensaje a los estudiantes de arquitectura*[17]. Pero sin la coherencia de la geometría y su rigor, esa visión de la totalidad a partir de esos documentos se hace inalcanzable, y aunque existan planta y sección, si no se poseen los hábitos intelectuales necesarios para generar en la mente el espacio al que se refieren ambos, no será posible disfrutarlo. Aunque tal vez sea posible construirlo, como lo fue para los griegos y para los constructores medievales, que aun no habían descubierto ese espacio perspectivo o no sabían representarlo, o ambas cosas a un tiempo.

15. A ella pertenece el concepto de espacio tridimensional regular y continuo característico de la modernidad. Renunciar al estudio y conocimiento de la geometría proyectiva supondría renunciar a la visión intelectualizada y relacional del espacio y los cuerpos, pues, como señala Piaget, la noción de espacio proyectivo lleva consigo una coordinación de los puntos de vista y un mecanismo operatorio mucho más complejo que las percepciones que corresponden a cada uno de estos puntos de vista considerados aisladamente (Cfr. PIAGET, Jean, *Psicología y Epistemología*, Ed. Planeta Agostini., Barcelona, 1985, p. 99). Además, esa renuncia supondría interrumpir la cadena evolutiva y de progreso de la ciencia geométrica, ya que, como señala oportunamente Ampliato (AMPLIATO BRIONES, Antonio Luis, "Reflejos del pensamiento. Un apunte evolutivo sobre dibujo y arquitectura". *En los límites del reflejo arquitectónico; Actas del VII Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica*, San Sebastián, 1998, pp. 267-276), podríamos decir que la geometría métrica (Euclides) se asume en la proyectiva (Desargues), y que ésta a su vez representa un caso particular de la geometría topológica, alcanzándose en esta evolución un grado de verosimilitud creciente, que se puede considerar paralela a la creciente verosimilitud que ofrecen los modelos físicos de Aristóteles, Newton y Einstein. De modo, continúa él, que podríamos decir que la geometría topológica es la hipótesis más real, más vívida de nuestro medio ambiente contemporáneo. (...) Y la forma espacial arquitectónica, y sus manifestaciones instrumentales contemporáneas no son una excepción". No parece sensato de estos presupuestos renunciar al marco lógico-matemático que proporciona la geometría proyectiva gracias a la cual podemos acceder a la fruición topológica de la geometría dimensiva.

Abundando en el tema aun podríamos añadir lo que con frase quizás un tanto extrema llegaba a afirmar Cayley (1821-1895) cuando decía que: *Geometry projective is all Geometry -La Geometría proyectiva es toda la Geometría-* (Cfr. VERA, Francisco, *Breve Historia de la Geometría*; Ed. Losada, S. A., Buenos Aires, 1948, p. 133). Que indudablemente es una consideración no válida al hablar de la Geometría para arquitectos, pero que advierte del peligro que puede esconder el desprecio por el contenido científico de la ciencia geométrica.

Sobre este punto ofrezco algunas reflexiones en: POZO MUNICIO, José Manuel, "La enseñanza de la geometría y el espacio de la modernidad", Revista *EGA*, n. 10, 2005, Valencia, junio 2006, pp. 126-132.

16. ABURTO, Rafael, "Razones de la Alhambra", *RNA* n. 135, marzo 1953, p. 42.

17. LE CORBUSIER, "Si tuviese que enseñarles arquitectura", *Architectural Design*, n. 29, II-1959; recogido en *Mensaje a los estudiantes de arquitectura*, op. cit., pp. 61-69.

Más aun, los griegos carecían de una palabra para designar el 'espacio'; ellos hablaban de localización, distancia, extensión y volumen[18], pero no existían en su vocabulario palabras para definir esa 'materia inmaterial' que surge de la transparencia y la interpenetración volumétrica que, junto con la consideración del tiempo como una coordenada vital más de las experiencias perceptivas, caracterizan la modernidad arquitectónica; esas notas reclaman una concepción dinámica para la arquitectura, en la que el infinito tiene sitio en el papel, ya sea mediante el uso de la perspectiva central, en la que ese infinito está finitamente representado, ya mediante el recurso a la isometría, en la que escapa del papel y nosotros con él; pero siempre, forzosamente, en uno u otro caso, movernos en el universo del espacio proyectivo supone un paso adelante, un avance respecto a la concepción clásica del mundo (en paralelo con el que supuso la física newtoniana respecto de la aristotélica señala Ampliato con cierta audacia[19]), para la que la representación y aun la concepción de ese espacio abierto al infinito concebido como el marco en el que se desenvuelve el hombre y la arquitectura que le acoge, resultaban inalcanzables, como hemos apuntado.

Lo cierto, finalmente, es que la concepción de la arquitectura moderna va ligada propiamente a un entendimiento del espacio de matriz proyectiva, dentro del cual los cuerpos se ubican y la arquitectura se desarrolla.

Y eso forzosamente ha de tener un reflejo gráfico en el propio proceso creativo, si, como señalaba Sierra, de modo un tanto alambicado, “tomando la arquitectura como un factor de relacionamiento entre las dimensiones pequeñas (el punto) y las grandes (la superficie), y cualquier proyecto como el acto transformador del entorno de doble cara (hacia dentro y hacia fuera), el lugar se convierte en la misma arquitectura como conformador de la continuidad espacial"[20].

Se trata, a fin de cuentas, de una concepción del espacio en la que los muros no son otra cosa que una separación entre espacios, exterior e interior; un filtro que permite comprenderlos al diferenciarlos; una idea, que Navarro Baldeweg ve materializada tanto en las obras de Mies como en las de Wright y los neoplasticistas, y que Van del Laan[21] explica con una comparación muy expresiva, según la cual los muros que separan los espacios exterior e interior realizan entre ambos la misma función que cumple una sandalia en el caminar humano; como esta sirve para proteger y acomodar la fragilidad de la planta del pie a la dureza del suelo, los muros de la casa se afirman como el elemento conciliador entre el hábitat y la naturaleza, que permite al hombre subsistir en su seno[22].

Estamos en un momento en el que la arquitectura ya no pone el acento en el espacio entendido como simple vacío residual entre realidades plásticas, ni siquiera en el espacio entendido como 'lo que queda contenido', sino que ahora se concibe como algo "limitado por superficies planas conjugadas", según la expresión, de ecos casi 'proyectivos', con la que arrancaba el Manifiesto de la Alhambra[23].

La arquitectura se concibe ahora como el elemento de separación entre dos espacios o mejor aun, como el instrumento necesario para

18. Cfr. SPENGLER, Oswald, *La decadencia de Occidente*, Ed. Espasa, Madrid, 1958, pp. 175 y ss.; cit. en ARNHEIM, Rudolph, *Arte y Percepción visual. Psicología de la visión creadora*, Ed. Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1962, p. 242.

19. AMPLIATO BRIONES, A., "Estadios volumétricos. Una aproximación evolutiva a la ciencia del espacio", En *La formación cultural arquitectónica en la enseñanza del dibujo*; Actas del V Congreso de Expresión Gráfica Arquitectónica, Las Palmas, 1994, pp. 287-297.

20. SIERRA DELGADO, J. R., *Manual de dibujo de arquitectura*, etc…, op. cit., p. 48.

21. Hans VAN DER LAAN (1904-1991).

22. VAN DER LAAN, H., L'espace Architectonique, cap. 1, *Nature et Architecture*; op. cit., pp. 1-2.

23. "La arquitectura moderna da más énfasis al volumen y al espacio limitado por superficies planas conjugadas que a la masa y al espacio sentido como un vacío contenido entre realidades plásticas, que es lo que se acusa en el pasado clásico". Cfr. *Manifiesto de la Alhambra*, ("Formas", I), p. 29. Dirección General de Arquitectura, Madrid, 1953; Tomado de la Edición Facsímil realizada por el COA de Aragón; Zaragoza 2004.

la segregación de un espacio para una función. Como dirá Van der Laan[24], "la verdadera morada para el hombre no surge ya de la excavación del macizo terrestre, sino de la *puesta aparte* de espacios limitados, arrebatados al vasto espacio de la naturaleza con las formas masivas de los muros". Pero, apunta él, "introducir en un espacio una separación levantando en él un solo muro deja intacta la extensión ilimitada del espacio original. (…) Para llegar finalmente a aislar un espacio dentro del gran espacio natural, será indispensable levantar un segundo muro, situado de tal modo que su relación con el primero suscite entre ellos un nuevo espacio". Esto es, dos muros 'conjugados' remitiéndonos a la expresión del Manifiesto, o dos muros proyectivamente relacionados pensando en términos geométricos, 'crean espacio'.

Es a esa percepción previa intelectual de ese espacio, que podríamos llamar relacional, a la que debe disponer el aprendizaje de la geometría. Tarea en la que desempeñará un papel importante el cálculo y dibujo de las sombras, entendidas como mecanismo gráfico proyectivo de dibujo, mediante el que se produce un real acercamiento al espacio continuo y homogéneo, que, en la obra de Mies, Navarro relaciona con el recurso al laberinto, en el cual a lo largo de todos sus itinerarios tiene que entablarse un juego entre esperanza y frustración: una dialéctica entre la visibilidad y la opacidad; una dialéctica del otorgar y negar, como corresponde a la pugna entre el objeto y el sujeto[25].

Una concepción proyectiva del espacio exige el dominio de esas cualidades geométricas, éstas su previa fundamentación, y ambos, como instrumento elemental, su métrica.

Que para nosotros será la que surge en el universo euclidiano.

Por eso me parece justificado tener por un notable beneficio haberme formado al lado de Nagore a partir de 1981, y haber podido enfocar estas cuestiones desde su punto de vista. Porque ahora, aun distanciándome necesariamente de muchos de sus planteamientos propedéuticos, esa formación me permite valorar esas cuestiones con mayor objetividad y con conocimiento de causa, y me defiende del peligro de rechazar determinados contenidos docentes dejándome llevar tan sólo por prejuicios, que en ocasiones nacen sencillamente del recelo que despierta en una Escuela de Arquitectura todo lo que es abiertamente científico, cuando no de la ignorancia de lo que con ellos se puede lograr[26].

Gracias al magisterio de Nagore tengo gran respeto hacia cuestiones que de otro modo hubiesen aparecido también a mis ojos no sólo arduas y abstrusas sino, por ende, tal vez por eso mismo, inútiles. A él debo agradecer en cambio que me encuentre en condiciones de juzgar sin prevenciones cuáles de ellas pueden o no ser útiles, y para qué, con miras a alcanzar los objetivos que entiendo que debe perseguir hoy por hoy la docencia de la Geometría Descriptiva en una Escuela de Arquitectura.

24. VAN DER LAAN, H., L'espace Architectonique, cap. 1, *Nature et Architecture*; op. cit., pp. 10-13.

25. Vid. NAVARRO BALDEWEG, Juan, "El límite de los principios en la arquitectura de Mies Van der Rohe", Conferencia en el COAC, Barcelona, el 7 de febrero de 1983; tomado aquí de la versión recogida en *La habitación vacante*; Ed. Pre-textos, Girona, 1999, pp. 73-92.

26. Choca desde este punto de vista ver cómo en otros países, con menor tradición de formación técnica dentro del ámbito de la arquitectura, se siguen editando libros cuyo contenido y finalidad se rechazan o ignoran en las escuelas españolas, como a modo de ejemplo pueden ser el citado de JUNGMANN, Jean-Paul, *Ombres et Lumières* (1995), así como el *Cours de Dessin d'Architecture à partir de la Géométrie descriptive* publicado por Editions de La Villete en la colección "Savoir-Faire de L'Architecture", y en Alemania, SCHAARWÄCHTER, Georg, *Perspektive für Architecten*, Verlag Gerd Hatje, Stuttgart, 1993.

libro I

GEOMETRÍA DEL PLANO

I. GEOMETRÍA DEL PLANO: INTRODUCCIÓN

La carencia de conocimientos básicos sobre las formas geométricas que se aprecia en los alumnos que inician los estudios de Arquitectura, ha hecho necesaria la introducción en la asignatura de Geometría Descriptiva, de unas primeras lecciones relativas a la Geometría Métrica del Plano y del Espacio.

Las razones académicas de esta inclusión son claras, puesto que la Geometría Descriptiva tiene por objeto la resolución de los problemas de la Geometría del Espacio por medio de operaciones efectuadas en un plano, y representar en éste las figuras de los sólidos, difícilmente podría entenderse y dominar aquélla si no se conoce previamente y con la profundidad necesaria lo que requiere ser resuelto y representado, el mundo de las formas espaciales.

Es lamentable que a los alumnos de bachillerato se les quiera enseñar métodos de representación sin tener conocimiento de las formas geométricas, ni de lo que con ellas puede realizarse, deducidas estas realizaciones de un análisis serio de su generación y propiedades.

Se impone, por lo tanto, como primer paso, el estudio de la Geometría de la medida o Geometría Métrica, en la que el alumno entra en contacto con la realidad del espacio físico en que se mueve, para conocerlo de una manera nueva, porque tiene que encontrar las relaciones entre sus magnitudes mediante la observación directa.

La experiencia acumulada en varios años de docencia, indica que el descubrimiento por parte del alumno de este nuevo mundo, produce en él, primeramente asombro, luego interés, después tentación de abandono por las dificultades que se le presentan y, por último, si capta las maravillas que en él se encierran, una profunda fuente de ejercitaciones deleitosas.

A través del estudio de la Geometría Métrica, el alumno se familiariza con el método del razonamiento lógico y, casi sin darse cuenta, llega a formar su mente en la necesidad ineluctable de la demostración como elemento indispensable de la certeza.

Esta formación de la mente le servirá al alumno, no sólo para la propia Geometría y sus problemas, sino para cualquier otra actividad que quiera desarrollar como persona responsable y consciente. De ahí deriva la gran importancia del tema que se expone en las páginas que siguen.

Lo que en ellas se dice no es nuevo; es la antigua disciplina que nos viene de Egipto y de la antigua Grecia, la que sirvió de divertimento y ocio cultural a los filósofos griegos; la Geometría clásica, que ha llegado a desaparecer como materia de estudio en los programas de Bachillerato y de las Facultades de Ciencias; pero que para los Arquitectos sigue siendo una necesidad.

No quiere esto decir que se excluyan, como posibles lectores estudiosos, a todos los que no vayan a seguir la carrera de Arquitectura, antes al contrario, sería deseable que cundiera en la sociedad la afición a la Geometría como parte intuitiva de la Matemática pero con una gran carga de formación espacial.

Sin olvidar, en uno y otro caso, las dificultades que revela la célebre frase atribuida a Euclides cuando el rey Ptolomeo de Egipto le pedía un método fácil para aprender sus lecciones: "Non est regia ad mathematicam via" (No hay camino de reyes para las matemáticas). Todos pasan por la rigurosa senda trazada por Euclides hace 23 siglos.

Lo único que se ha hecho con el abundante material heredado, ha sido una selección de los temas, una clasificación de los mismos según un orden que se estima pedagógicamente necesario, y una adecuación de la expresión sintáctica a los tiempos actuales y a la mentalidad de los jóvenes estudiantes. Todo ello fruto, también, de una larga experiencia docente. En el texto se expone sólo lo que el estudiante de Arquitectura necesita conocer, pero todo lo que necesita.

Para el cómodo entendimiento de las proposiciones expuestas, las figuras –siempre necesarias en la Geometría– se han colocado junto al texto, como sistema considerado el mejor dentro de los posibles; es aconsejable ya desde este primer momento, indicar al alumno la conveniencia de la repetición por su cuenta de las figuras cuando estudie los distintos teoremas; así se le fijarán mejor en la mente; y no es consejo despreciable.

La estructura adoptada para la obra, divide a la Geometría Métrica en dos libros: la Geometría Métrica del Plano y la Geometría Métrica del Espacio. Éste que tiene el lector en sus manos es el correspondiente a la primera de ellas, y para facilitar las referencias, se ha dividido en Capítulos y éstos en Apartados.

Al final de cada Capítulo se han introducido una serie de notas con el título genérico de SUGERENCIAS, ACLARACIONES Y NOTICIAS, que son precisamente eso, lo que las propias palabras quieren decir (véase, si hay duda, el Diccionario de la Lengua, operación muy conveniente en este y en múltiples casos).

Habría también que aclarar la simbología y el vocabulario usados; cosa que está en las páginas que anteceden al Capítulo 1 y que, al igual que esta introducción, es necesario leer.

El máximo fruto de la lectura de este libro se sacará con un manejo constante del mismo hacia delante y hacia atrás; es un libro de permanente manoseo.

Lo único que resta es expresar el deseo de que el lector disfrute, con el estudio de esta Geometría Métrica del Plano, tanto como el autor de ella gozó al escribirla, que fue mucho.

Fernando Nagore. Pamplona, septiembre de 1985

VOCABULARIO

Algoritmo: (De Al-juarizmi, sobrenombre del célebre matemático Mohamed Ben Musa). Método y notación de las distintas formas del cálculo.

Demostración: Comprobación de un principio o teoría con un hecho cierto. Fin y término del procedimiento deductivo.

Proposición: Enunciación de una verdad demostrada o que se trata de demostrar.

Axioma: Proposición tan evidente que no necesita demostración.

Postulado: Proposición cuya verdad de carácter experimental y que no puede demostrarse, se acepta sin probarla.

Hipótesis: Suposición imaginada, sin pruebas o con pruebas insuficientes, para deducir de ella ciertas conclusiones que están de acuerdo con los hechos reales.

Tesis: Conclusión, proposición que se mantiene con razonamientos.

Lema: Proposición que requiere ser demostrada antes de establecer un teorema. Puede entenderse como un teorema auxiliar destinado a facilitar la demostración de otro teorema más general.

Teorema: Proposición que afirma una verdad demostrable.

> Dos teoremas son **recíprocos** uno de otro, cuando la hipótesis y la tesis del segundo son respectivamente iguales a la tesis y a la hipótesis del primero.
>
> Dos teoremas son **contrarios** uno de otro, cuando la hipótesis y la tesis del segundo son respectivamente contrarias a la hipótesis y la tesis del primero.

Corolario: Proposición que no necesita prueba particular por deducirse fácilmente de lo demostrado antes.

Escolio: Observación, nota o comentario relativo a una proposición.

Problema: Proposición en la que se pide la determinación de uno o varios elementos desconocidos llamados incógnitas mediante el conocimiento de otros llamados datos, relacionados con los primeros. Es una cuestión a resolver, o una figura que construir o una magnitud geométrica que evaluar.

Geometría: Parte de las matemáticas que trata de las propiedades y medidas de la extensión.

> **Geometría Plana** es la parte de la Geometría que considera las figuras cuyos puntos están todos en un mismo plano.
>
> **Geometría del Espacio** es la parte de la Geometría que considera las figuras cuyos puntos no están todos en un mismo plano.
>
> **Geometría Descriptiva** es la que tiene por objeto resolver los problemas de la Geometría del Espacio por medio de operaciones efectuadas en un plano y representar en él las figuras de los sólidos.

capítulo 1

LINEA RECTA Y ANGULOS

Definiciones previas
A Perpendiculares y oblicuas
B Paralelas

Donde se da noticia del ángulo y sus clases.

De qué cosa sea la perpendicularidad y la oblicuidad entre dos rectas, y de las consecuencias que de ello se derivan.

Sobre el paralelismo y su relación con la perpendicularidad.

Aparece el gran Euclides.

De lo que sucede cuando una secante corta a dos rectas paralelas.

Sobre cómo averiguar si dos ángulos son o no iguales.

DEFINICIONES PREVIAS

Se llama **ángulo** la separación o abertura de dos rectas que tienen un punto común, llamado **vértice** del ángulo.

Las dos rectas se llaman **lados** del ángulo.

Un ángulo se designa con tres letras, o por el vértice si está solo, o por una letra del alfabeto griego.

La magnitud de un ángulo no depende de la de sus lados, sino de la separación de éstos; y así, dos ángulos serán iguales cuando coincidiendo el vértice y un lado, coincida también el otro lado, aunque los lados de uno sean desiguales a los del otro.

Se llaman **ángulos adyacentes** dos ángulos que tienen un lado común y los otros dos lados en línea recta. F1.1, F1.2

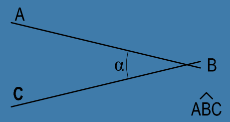
Se dice que una recta es **perpendicular** a otra cuando los ángulos adyacentes que forman las dos son iguales.

Se llama **ángulo recto** cualquiera de los dos ángulos adyacentes que forma una recta con otra a la cual es perpendicular.

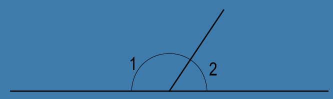
Se dice que una recta es **oblicua** a otra, cuando los ángulos adyacentes que forman son desiguales.

Se llama **bisectriz** de un ángulo, la recta que divide el ángulo en dos partes iguales.

F1.1



F1.2



"Una vertical que corta a una horizontal produce al punto un clamor dramático"

(Kandinsky)

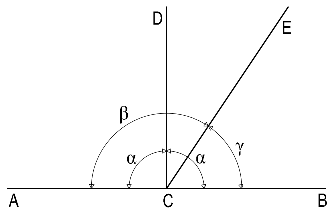
A. PERPENDICULARES Y OBLICUAS

TEOREMA 1.1

Por un punto de una recta no se puede levantar más que una perpendicular a dicha recta. F1.3

Sea $\overline{AB}$ la recta y C el punto en ella. Siendo $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$, los ángulos α son iguales.

Otra recta cualquiera $\overline{CE}$ que pase por C formará con $\overline{AB}$ dos ángulos, uno β mayor que el recto, y otro γ menor que el recto; luego dichos ángulos son desiguales y, por tanto, la recta $\overline{CE}$ es oblicua a la $\overline{AB}$.

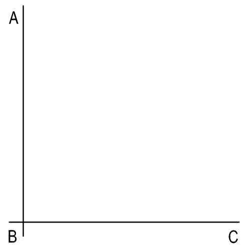


F1.3

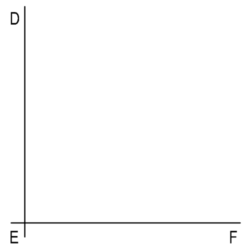
TEOREMA 1.2

Dos ángulos rectos son iguales, aunque no sean adyacentes. F1.4, F1.5

En efecto: Si se coloca el ángulo DEF sobre el ABC de modo que coincida el punto E sobre el B y la recta $\overline{EF}$ sobre la $\overline{BC}$, la recta $\overline{DE}$ coincidirá con la $\overline{AB}$ y, por consiguiente, los ángulos rectos serán iguales.



F1.4



F1.5

DEFINICIÓN

Se llama ángulo **agudo** el ángulo menor que el recto, y ángulo **obtuso** el ángulo mayor que el recto.

TEOREMA 1.3

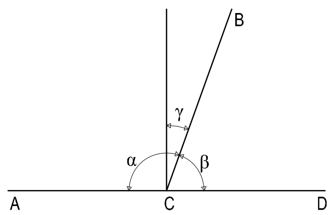
La suma de los ángulos adyacentes es igual a dos rectos. F1.6

Sean los ángulos adyacentes α y β. Levántese por el punto C la perpendicular a $\overline{AD}$ que formará con $\overline{CB}$ el ángulo γ. Se tiene:

$$\alpha=1R+\gamma$$

$$\beta=1R-\gamma$$

$$\alpha+\beta=2R+\gamma-\gamma=2R$$



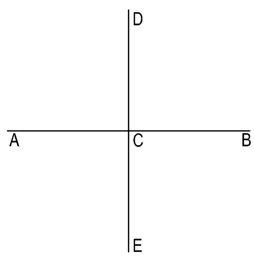
F1.6

COROLARIO 1

Los cuatro ángulos que forman dos rectas perpendiculares son rectos. F1.7

Pues siendo $\overline{DE}$ perpendicular a $\overline{AB}$, los dos ángulos ACD y BCD son rectos; luego sus adyacentes ACE y BCE son también rectos.

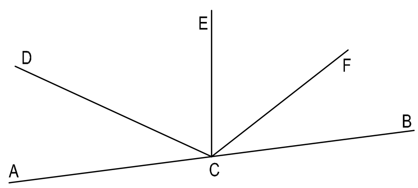
De aquí resulta que $\overline{AB}$ forma con $\overline{DE}$ dos ángulos adyacentes BCD y BCE iguales; y que, por lo tanto, $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{DE}$. Luego si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera.



F1.7

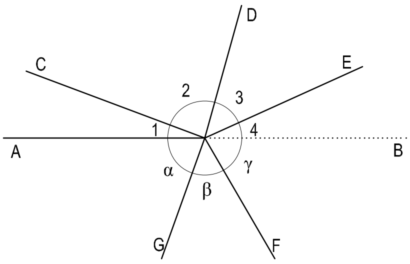
COROLARIO 2

La suma de los ángulos consecutivos formados hacia un mismo lado de una recta, es igual a dos rectos. F1.8



F1.8

En efecto: ACD+DCE+ECF=ACF y como ACF+FCB=2R, sustituyendo será ACD+DCE+ECF+FCB=2R.



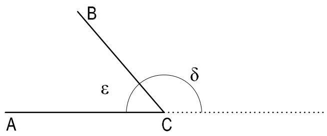
F1.9

COROLARIO 3

La suma de todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto por varias rectas que salen de este punto, es igual a cuatro rectos. F1.9

Pues prolongando $\overline{OA}$ en sentidos contrarios se obtiene $\overline{OB}$, y por el Corolario 2 se tiene:

1+2+3+4=2R y $\alpha+\beta+\gamma$=2R, sumando se tiene: 1+2+3+4+$\alpha+\beta+\gamma$=4R.



F1.10

COROLARIO 4

Un ángulo cualquiera es menor que dos ángulos rectos. F1.10

Pues prolongando uno de sus lados, $\overline{AC}$, se tiene $\varepsilon+\delta$=2R luego ε<2R.

DEFINICIONES

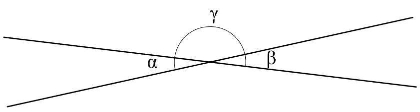
Si la suma de dos ángulos es igual a uno recto, cada uno se llama **complemento** del otro, o bien los dos se llaman **complementarios**.

Dos ángulos que tienen el mismo complemento son iguales, pues a los dos les falta el mismo ángulo para valer un recto.

Si la suma de dos ángulos es igual a dos rectos, cada uno de ellos se llama **suplemento** del otro, o los dos se llaman **suplementarios**.

Dos ángulos que tienen el mismo suplemento son **iguales**, pues a los dos les falta el mismo ángulo para valer dos rectos.

Se llaman ángulos **opuestos por el vértice** dos ángulos de los que uno está formado por las prolongaciones de los lados del otro.

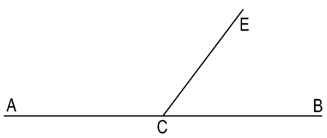


F1.11

TEOREMA 1.4

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. F1.11

Pues α tiene por suplemento a su adyacente γ y β tiene por suplemento a su adyacente γ; luego $\alpha+\gamma$=2R=$\beta+\gamma$. De donde $\alpha=\beta$.

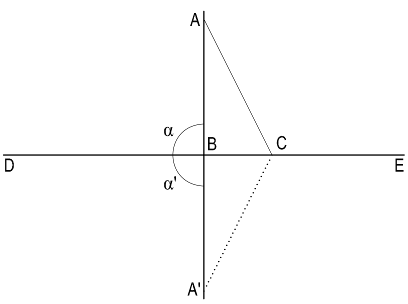


F1.12

TEOREMA 1.5

Si dos ángulos exteriores uno a otro, y que tienen el mismo vértice y un lado común, son suplementarios, tendrán en línea recta los otros dos lados. (Es recíproco del Teorema 1.3). F1.12

Pues la prolongación de $\overline{AC}$ hacia la derecha formará con $\overline{CE}$ un ángulo que, según el teorema directo, será suplemento del ACE y, por lo tanto, igual al BCE; luego dicha prolongación coincidirá con $\overline{CB}$; luego las dos rectas $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ forman una sola recta.



F1.13

TEOREMA 1.6

Desde un punto tomado fuera de una recta no se puede trazar a esta recta más que una sola perpendicular. F1.13

Sea el punto A y la recta $\overline{DE}$. Diríjase otra recta cualquiera $\overline{AC}$ desde A y tómese en la prolongación de $\overline{AB}$ una parte $\overline{A'B}$ igual a $\overline{AB}$, uniendo A' con C.

Doblando la figura por $\overline{DE}$, caerá $\overline{A'B}$ sobre $\overline{AB}$ por ser $\alpha=\alpha'=1R$; A' caerá sobre A por ser $\overline{A'B}=\overline{AB}$; luego $\overline{AC}$ coincidirá con $\overline{A'C}$ por tener sus extremos coincidentes, por lo que ACB=BCA', o $ACB = \frac{ACA'}{2}$ y siendo este último <2R, será ACB<1R; luego $\overline{AC}$ es oblicua a $\overline{DE}$.

> NOTA: Los Teoremas 1.1 y 1.6 cierran el ciclo de las propiedades unitarias que demuestran. Se podrían compendiar en el siguiente: Desde cualquier punto del plano, sea exterior o de ella, solamente se puede trazar una perpendicular a una recta dada.

> NOTA: El Teorema 1.6 se podría demostrar con más facilidad considerando la igualdad de los triángulos ABC y A'BC, pero entonces habría que colocarlo detrás de los teoremas del triángulo, trastocando el orden que se ha querido establecer.

B. PARALELAS

POSTULADO DE EUCLIDES

Por un punto dado fuera de una recta no puede pasar más que una sola paralela a dicha recta.

La ineficacia de todos los esfuerzos hechos para probar este principio con el rigor exigido en las demostraciones geométricas, induce a admitirlo excluyendo demostraciones viciosas, optando por la experimental.

COROLARIO

Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

Pues si dichas rectas se encontrasen, por el punto de encuentro pasarían dos paralelas a una recta, lo que es imposible.

DEFINICIONES

Si dos rectas cualesquiera $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son cortadas por otra recta, $\bar{t}$, ésta toma el nombre de **secante** o **transversal**. F1.14

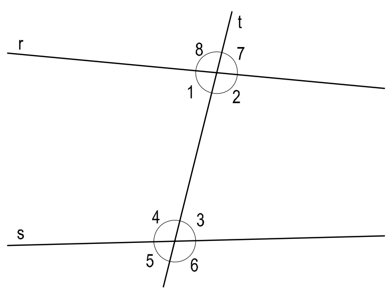
Los ángulos 1, 2, 3 y 4 se llaman **internos**.

Los ángulos 5, 6, 7 y 8 se llaman **externos**.

Los ángulos 7 y 3, 2 y 6, 1 y 5, 4 y 8, de un mismo lado de la secante, uno externo y otro interno, y que no son adyacentes, se llaman ángulos **correspondientes**.

Los ángulos internos 1 y 3, 2 y 4, de diferente lado de la secante y no adyacentes, se llaman **alternos**.

Se llaman **paralelas** dos rectas que están en un mismo plano y que, por más que se prolonguen, no se encuentran. La existencia de estas rectas fundamenta la siguiente proposición:



F1.14

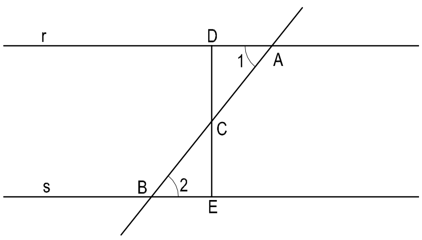
TEOREMA 1.7

Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.

Pues si dichas rectas se encontrasen, desde el punto de encuentro se podrían trazar dos perpendiculares a una recta, lo que se ha demostrado ser imposible en una geometría euclidiana. (Teorema 1.6).

TEOREMA 1.8

Si los ángulos alternos son iguales, las rectas $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son paralelas. F1.15



F1.15

Sean iguales los ángulos 1 y 2. Desde C, punto medio de $\overline{AB}$, trácese la perpendicular $\overline{CE}$ a $\bar{s}$ y, tomando en $\bar{r}$ un segmento $\overline{AD}$ igual al $\overline{BE}$, trácese la recta $\overline{DC}$.

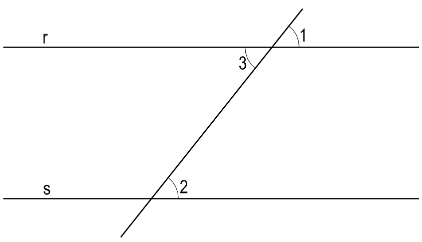
Haciendo girar el triángulo BCE en su mismo plano alrededor de C hasta que $\overline{CB}$ coincida con $\overline{CA}$, en cuyo caso el punto B caerá sobre A por ser C punto medio de $\overline{AB}$, la recta $\overline{BE}$ coincidirá con $\overline{DA}$ por ser 1=2 (hipótesis). Y el punto E caerá sobre D por ser $\overline{BE}=\overline{AD}$; luego $\overline{CE}$ coincidirá con $\overline{CD}$.

Por consiguiente, DCA=ECB y como este ángulo es suplemento del ACE, también DCA es suplemento de ACE, luego las rectas $\overline{CE}$ y $\overline{CD}$ forman una sola recta (Teorema 1.5).

Además ADC=BEC, y siendo este último recto, también lo será el primero; luego $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son perpendiculares a $\overline{DE}$ y, por lo tanto, son paralelas.

TEOREMA 1.9

Si dos ángulos correspondientes cualesquiera son iguales, las rectas $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son paralelas. F1.16

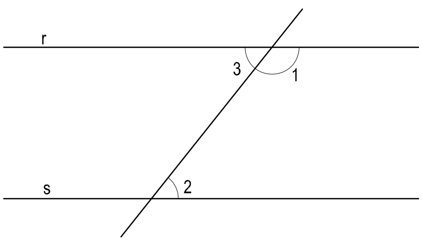


F1.16

Sean iguales los ángulos 1 y 2. Los ángulos 1 y 3 son iguales por opuestos por el vértice. Los ángulos 2 y 1 son iguales por hipótesis. Luego los ángulos 2 y 3 son iguales; y por el teorema anterior, $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son paralelas.

TEOREMA 1.10

Si la suma de los ángulos internos de un mismo lado de la secante es igual a dos rectos, las rectas $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son paralelas. F1.17



F1.17

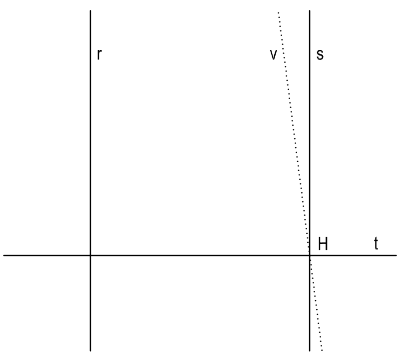
Sea la suma de los ángulos 1 y 2 igual a 2R.

Será también 1+3=2R por adyacentes.

De ambas igualdades se deduce que 2=3 por tener el mismo suplemento; y como son ángulos alternos, las rectas $\bar{r}$ y $\bar{s}$ son paralelas.

TEOREMA 1.11

Si dos rectas son paralelas y una de ellas es perpendicular a una tercera, la otra también lo será. (Es recíproco del Teorema 1.7). F1.18



F1.18

Sea $\bar{r}$ paralela a $\bar{s}$, y $\bar{r}$ perpendicular a $\bar{t}$.

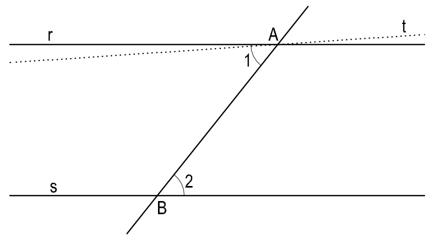
Si $\bar{s}$ no fuese perpendicular a $\bar{t}$, por H se podría trazar una recta $\bar{v}$ que sí fuese perpendicular a $\bar{t}$ y, por lo tanto, $\bar{v}$ sería paralela a $\bar{r}$ por el Teorema 1.7, luego por el punto H pasarían dos paralelas a $\bar{r}$ lo cual es imposible si se admite el Postulado de Euclides.

TEOREMA 1.12

Si dos rectas son paralelas, los ángulos alternos producidos en ellas por una secante son iguales. (Es recíproco del Teorema 1.8). F1.19

Sean $\bar{r}$ y $\bar{s}$ paralelas.

Si 1 fuese diferente a 2, por A se podría trazar una recta $\bar{t}$ que formase con $\overline{AB}$ un ángulo igual al 2; dicha recta sería paralela a $\bar{s}$ según el Teorema 1.8; luego por el punto A podrían pasar dos paralelas a $\bar{s}$; lo que es imposible.



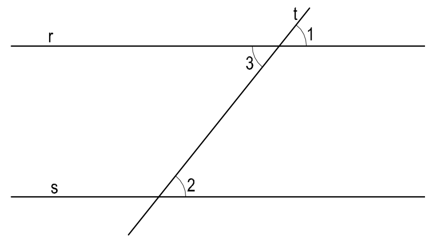
F1.19

TEOREMA 1.13

Si dos rectas son paralelas, los ángulos correspondientes producidos en ellas por una secante, son iguales. (Es recíproco del Teorema 1.9). F1.20

Sean $\bar{r}$ y $\bar{s}$ paralelas.

1 es igual a 3 por opuestos por el vértice. 2 es igual a 3 por alternos internos entre paralelas. Luego 1 es igual a 2.



F1.20

TEOREMA 1.14

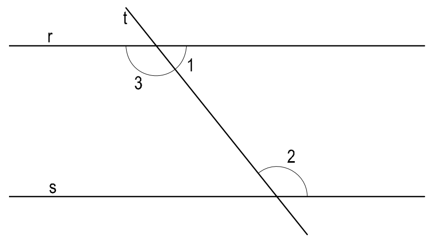
Si dos rectas son paralelas, la suma de los ángulos internos de un mismo lado de una secante es igual a dos rectos. (Es recíproco del Teorema 1.10). F1.21

Sean $\bar{r}$ y $\bar{s}$ paralelas.

1+3=2R por adyacentes.

2 es igual a 3 por alternos entre paralelas.

Luego 1+2=2R.



F1.21

TEOREMA 1.15

Si la suma de los ángulos internos de un mismo lado de la secante es menor que dos rectos, las rectas $\bar{r}$ y $\bar{s}$ se encontrarán hacia ese lado. F1.22

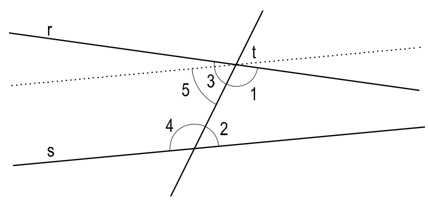
Sean las rectas $\bar{r}$ y $\bar{s}$.

Tienen que encontrarse, pues si fuesen paralelas, 1+2=2R por el teorema anterior.

Esto supuesto, siendo 1+2<2R, será 3+4>2R.

Luego si por A se traza $\bar{t}$ paralela a $\bar{s}$ como 5+4=2R, será 3>5.

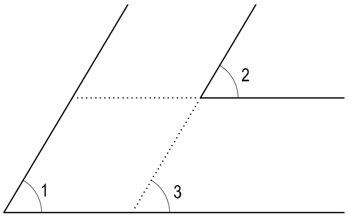
Ahora bien; $\bar{t}$ y $\bar{s}$ no pueden encontrarse, luego $\bar{r}$ y $\bar{s}$ no podrán, con mayor motivo, encontrarse hacia la izquierda de la secante, y como se ha visto que no son paralelas, se encontrarán hacia la derecha, es decir, hacia el lado de la secante en que la suma de los ángulos internos es menor que dos rectos.



F1.22

TEOREMA 1.16

Dos ángulos cuyos lados sean paralelos, son iguales o suplementarios.



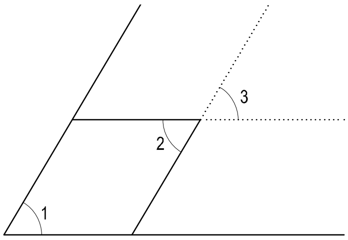
F1.23

CASO 1: Sean 1 y 2 dos ángulos de lados paralelos y del mismo sentido. F1.23

Prolónguense los lados de 2 hasta que corten a los de 1. Aparece así el 3.

Se tendrá:1=3 por correspondientes; 2=3 por correspondientes.

Luego 1=2.



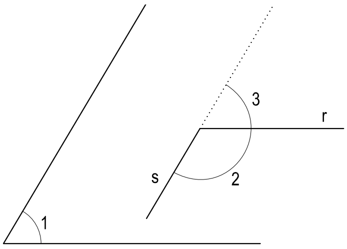
F1.24

CASO 2: Sean 1 y 2 de lados paralelos y de sentido opuesto. F1.24

Prolónguense los lados de 2 para formar el ángulo 3.

Se tendrá: 2=3 por opuestos por el vértice; 3=1 por el caso anterior.

Luego 1=2.



F1.25

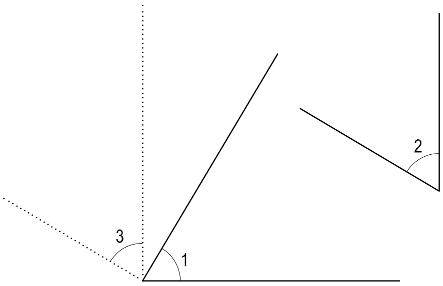
CASO 3: Sean 1 y 2 de lados paralelos pero dos en el mismo sentido y dos en opuestos. Prolónguese $\bar{s}$ y se obtendrá el ángulo 3. F1.25

Se tendrá: 2+3=2R por adyacentes; 1=3 por el Caso 1.

Luego 1+2=2R; así pues, los ángulos 1 y 2 son suplementarios.

TEOREMA 1.17

Dos ángulos agudos u obtusos, cuyos lados son perpendiculares, son iguales; y si uno es agudo y otro obtuso, son suplementarios.



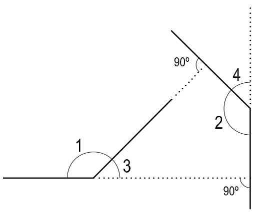
F1.26

CASO 1: Sean 1 y 2 los dos ángulos agudos y de lados perpendiculares. F1.26

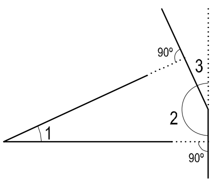
Diríjanse por el vértice de 1 las rectas paralelas a los lados del 2, que formen el 3.

Se tendrá: 2=3 por lados paralelos; 3=1 por igual complemento.

Luego 1=2.



F1.27 A



F1.27 B

CASO 2: Sean 1 y 2 ambos obtusos. F1.27A

Prolónguese un lado de cada ángulo, obteniendo 3 y 4. Por el caso anterior, 3=4.

Luego, 1 y 2 tienen el mismo suplemento, luego son iguales.

CASO 3: Sean 1 y 2, uno agudo y otro obtuso. F1.27B

El ángulo 3 adyacente al 2 es agudo e igual al 1, y como 2+3=2R,

será 2+1=2R.

Luego los ángulos son suplementarios.

COROLARIO

Si se trazan perpendiculares a los lados de un ángulo, el ángulo que forman entre sí las nuevas rectas es el mismo que formaban las rectas originales.

NOTA: No se considera el caso en que los ángulos sean ambos rectos, porque ya se ha demostrado que esta clase de ángulos son siempre iguales (Teorema 1.2).

SUGERENCIAS, ACLARACIONES, NOTICIAS

Para comenzar bien el estudio de la Geometría hay que olvidar todo lo que cree saberse sobre ella y empezar de cero.

·

Es menester conocer el significado de las palabras que se usan en el lenguaje explicativo, no sólo las que no se han oído antes, sino las de uso ordinario en las que el concepto que encierran escapa normalmente a la conciencia y, por ello, se usan mal; muchas veces por mimetismo.

·

Poco a poco se irá aprendiendo el método del razonamiento lógico. Al demostrar una proposición hay que apoyarse únicamente en las demostradas anteriormente y en nada más, haciendo uso de la primera indicación aquí apuntada.

·

La recta, gramaticalmente, es femenina. El punto y el ángulo son masculinos. Es éste un carácter genérico de la Geometría que puede hacerla cambiar de aspecto.

·

El plano es el conjunto de sus puntos, o el de sus rectas, o el de ambos. Mirado de esta manera, desde fuera de él, se percibe una gran anarquía.

La Geometría del Plano o Planimetría trata de averiguar qué orden se puede establecer dentro del plano para eliminar esa aparente anarquía; y para ello, comienza por establecer un vocabulario propio y específico dando así principio a una **expresión** o **idioma geométrico**.

·

Dos rectas concretas del plano forman siempre un **ángulo** que tiene **lados** y **vértices**. Hay infinitos ángulos posibles, y sólo con esta definición de ángulo se puede establecer ya una clasificación de las posiciones de las rectas entre sí. La **perpendicularidad** y el **paralelismo**; la **oblicuidad** y la **convergencia**, son definiciones consecuencia del ángulo que dos rectas forman.

·

Dos ángulos pueden ponerse en relación uno con otro bien sea por su posición, bien por sus condiciones intrínsecas o extrínsecas; y así, puede hablarse de ángulos **adyacentes**, **complementarios**, **suplementarios**, **iguales**, **alternos**, **correspondientes**, **internos**, **externos**, **consecutivos**, **opuestos por el vértice**, etc. Es una nomenclatura que sirve para clasificarlos.

·

La definición de ángulo recto es consecuencia de la igualdad de los ángulos adyacentes, o sea de la perpendicularidad de dos rectas; no al contrario.

·

El ángulo es un dominador del mundo plano en cuanto es capaz de organizar a las rectas para que lo definan. Además de esto, como los lados del ángulo son rectas de longitud indefinida, su sola existencia clasifica a los puntos del plano en tres categorías: interiores al ángulo, exteriores a él, y de los lados. Y dentro de ellos, aun pueden encontrarse los que, siendo interiores o exteriores, gocen de alguna nueva propiedad relativa al propio ángulo (bisectrices p.e.).

·

La superposición de dos rectas puede entrañar la duda de si es la misma recta o son dos diferentes.

Como el plano no tiene tercera dimensión, tal superposición es mental más que física; o, si es física, las dos rectas se penetran y funden convirtiéndose en una sola.

·

Un sano ejercicio de imaginación será el de considerar todo lo que ocurre en el plano como visto desde él mismo, como si el observador estudioso fuese también un ser plano, y le afectase personalmente todo lo que en el plano sucede. De esta forma, el interés por "entender" aumenta.

·

No debe ser difícil concebir un mundo de seres planos, de dos dimensiones. Los niños lo entienden perfectamente y juegan con soldaditos y muñecas de cartulina, recortables.

·

EUCLIDES (323-285 a. de C.)

Matemático griego que vivió entre los siglos IV y III antes de C. (323-285). Se sabe que reinando Ptolomeo I enseñó en Alejandría de Egipto, ciudad que, gracias a Euclides, se convirtió en un floreciente centro de los estudios matemáticos.

La fama de Euclides se basa, sobre todo, en la obra titulada **Elementos de Geometría** en la que se halla reunido cuanto se había conseguido hasta entonces en la Geometría griega.

Esta obra está compuesta de 13 libros.

Los Elementos de Euclides establecen el **método analítico deductivo** que será característico de la matemática de todos los tiempos.

El **quinto postulado** de los Elementos es el más conocido y en el que se apoya toda la Geometría aquí expuesta.

Sólo se puede reprochar a Euclides un poco de extensión, complicación y oscuridad en sus demostraciones. Puede ser debido a estos inconvenientes el que se atribuya las dificultades que experimentaba Ptolomeo Filadelfo (hijo de Ptolomeo I), rey de Egipto, que era un hombre culto. Un día, fatigado por la extrema atención que requerían las lecciones de Euclides, pidió para él métodos más simples y fáciles. "*No, príncipe* -respondió Euclides- *no existen caminos reales para las matemáticas*".