

**TRANSICIÓN AL CAOS EN CONVECCIÓN DE
BÉNARD- MARANGONI CON PEQUEÑA
RELACIÓN DE ASPECTO**

Memoria presentada por
Diego M. Maza Ozcoidi
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas
Septiembre de 1995



Departamento de Física y Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

Universidad de Navarra. 31080 Pamplona, Navarra (ESPAÑA)

D. Carlos Pérez García, Catedrático del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra y **D. Héctor Luis Mancini**, Dr. en Ciencias Físicas.

CERTIFICAN: que la presente Memoria "Transición al caos en convección de Bénard Marangoni con pequeña relación de aspecto", ha sido realizada bajo nuestra dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra por D. Diego M. Maza Ozcoidi, para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Carlos Pérez García

Héctor Luis Mancini

A mis padres

Terror al caos

Los sistemas como decía Peguy, son sistemas de tranquilidad, que amamos por que nos sentamos sobre ellos. Es una forma de vivir tranquilos a cubierto de los peligros y asechanzas del caos, de la oscuridad, del misterio, del más allá. Son bastiones contra la angustia que se levanta apenas asomamos un poco la cabeza a esa tierra pavorosa. Nos refugiamos en los Sistemas, las Iglesias, en los Partidos, en las Ortodoxias, como chicos en las faldas de la madre. Son en suma, manifestaciones de la cobardía.

El hombre libre, el herético, el solitario, tiene que estar poseído de un valor casi demencial.

Ernesto Sabato
Heterodoxia

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a la Universidad de Navarra y a sus autoridades, por haberme permitido realizar estas investigaciones en sus claustros, en un ambiente inmejorable para la concreción de la tarea científica.

A mi director, Dr. Carlos Pérez García por haber confiado y apoyado todas las iniciativas tendientes a concretar este trabajo.

Al Dr. Hector L. Mancini, con quien compartimos innumerables días de discusiones "interrogando sutilmente a la naturaleza", por su infinita paciencia y afán educador.

Al Dr. Angel Garcimartin por su compañerismo y ayuda diaria.

A Javier Burguete, siempre dispuesto a acudir a mis llamadas de socorro cuando no funcionaba algún programa.

A Pedro Elizalde, por su constante colaboración a la hora de solucionar los diversos escollos técnicos que se presentaran.

A la Dra. Carmen Palacios, por su incondicional e inestimable apoyo. Al Dr. Gabriel Mindlin por haberme ayudado a entender siquiera en parte, el enigmático mundo de la dinámica no lineal. A Esperanza Vázquez, Thierry Ondarçhu, Ana Mancho, Henar Herrero, Juan Millán, Ricardo López, Emilio Diaz Calavia, por sus valiosos comentarios y ayudas, pero sobre todo por su amable compañerismo. A la secretaria del Departamento de Física, María José Collados, por socorrerme siempre que me ví atrapado en algún infierno burocrático.

A mis "vecinos" del laboratorio de Hematología y Cardiología de la Universidad de Navarra.

A la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra por proporcionarme los medios que permitieron la realización de este trabajo.

Al Departamento de Física de la Universidad Nacional de San Luis, Argentina, que me permite realizar estos estudios aquí. A Lili Garro por su invalorable ayuda, y en especial, a mis amigos ("lo chochamu"), D. Valladares, F. Nieto, D. Linares, M. Nazarro, J Ramirez y muchos más cuyos nombres sería muy largo mencionar.

Finalmente a toda mi familia, por los grandes sacrificios que han debido soportar para que yo concretara este trabajo, en especial, mis padres, mi esposa y mi hijo.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I:	
LAS ESTRUCTURAS CONVECTIVAS	5
I.1 La fuerza de empuje. Formulaci3n general de los flujos inducidos por flotaci3n.	5
I.2 Convecci3n de B3nard-Rayleigh.	7
I.3 Convecci3n de B3nard-Marangoni.	13
I.4 Transici3n al caos	16
CAPITULO II:	
DESCRIPCION DEL SISTEMA EXPERIMENTAL	21
II.1 Las celdas convectivas.	21
II.2 Los sistemas de medida.	27
II.2.a M3todos de medida no invasivos.	27
II.2.a.1 La ombroscop3a.	30
II.2.a.2 Schlieren.	30
II.2.a.3 Interferencia.	32
II.2.a.4 Refracci3n de rayos localizados.	32
II.2.a.5 Descripci3n del sistema experimental.	32
II.2.b M3todos de medida invasivos.	40
II.2.b.1 T3cnicas de sembrado.	40
II.2.b.2 Determinaciones locales de temperatura	41

CAPITULO III:		
	ESTADOS CONVECTIVOS INDEPENDIENTES DEL	
TIEMPO		45
III.1 Condiciones de contorno adiabáticas (celda A).		48
III.2 Calentamiento inhomogéneo (celda B).		57
III.3 Transistorio de formación.		67
CAPITULO IV:		
	ESTADOS CONVECTIVOS DEPENDIENTES DEL	
TIEMPO		73
IV.1 Algunos antecedentes.		73
IV.2 Régimen dependiente del tiempo para la celda A.		75
IV.3 Régimen dependiente del tiempo para la celda B.		85
IV.3.a Relación del planform con la temperatura.		85
IV.3.b El planform y la deformación de la superficie.		86
IV.3.c Oscilaciones y flujo.		90
IV.3.d Dependencia de la frecuencia con la temperatura.		107
IV.3.e Oscilaciones y superficie.		110
CAPITULO V:		
	COMPARACION ENTRE LAS CONFIGURACIONES	
USADAS EN LOS EXPERIMENTOS		117
CONCLUSIONES		129
REFERENCIAS		131

CAPITULO I

LAS ESTRUCTURAS CONVECTIVAS

I.1 La fuerza de empuje. Formulación general de los flujos inducidos por flotación.

Consideremos un fluido homogéneo y puro cuya densidad ρ depende en general de la temperatura T y de la presión estática p $\rho = \rho(T, p)$. Si el fluido está en reposo en un campo gravitacional de fuerza \mathbf{g} , una región de menor densidad soportará una fuerza ascensorial neta de magnitud \mathbf{F} , tal como se esquematiza en la Figura I.1.

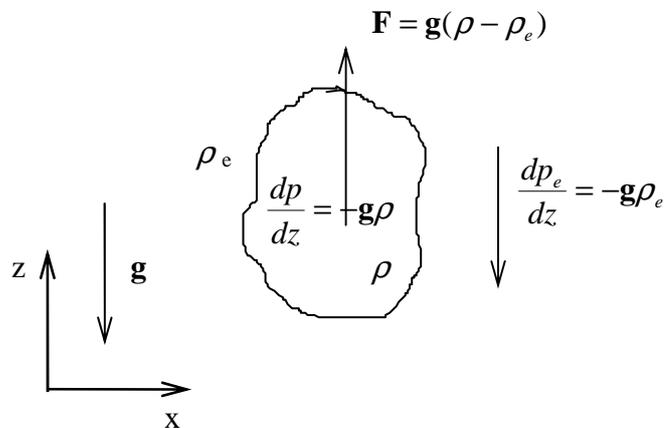


Figura V.1 Representación esquemática de la fuerza de flotación.

Dentro del campo gravitatorio, la distribución de presiones en equilibrio es $p_e = -\rho_e g z$, por cuanto cualquier inhomogeneidad en la densidad se verá sometida a un gradiente $\frac{dp_e}{dz} = -\rho_e \mathbf{g}$, y en consecuencia, la región correspondiente se pondrá en movimiento por efecto de la fuerza neta de flotación $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, z) = \mathbf{g}(\rho - \rho_e)$.

La magnitud de esta fuerza depende pues de la temperatura local. Su expresión completa resulta del balance entre el momento y la disipación viscosa, así como la suma

de la energía que se difunde y la que viaja por convección. Las ecuaciones completas que rigen el movimiento inducido por transporte térmico son:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \nabla \rho \quad (\text{Ec. I.1})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + 1/3 \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (\text{Ec. I.2})$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot \chi \nabla T + \beta (T + 273.15) \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi \quad (\text{Ec. I.3})$$

La notación usada es: la velocidad $\mathbf{V}=(u,v,w)$; la temperatura T en °C, el gradiente de presión estática ∇p ; y la disipación viscosa $\mu \Phi$. Las propiedades del fluido son: la densidad ρ , el calor específico c_p , el coeficiente de dilatación térmica β , la conductividad térmica χ , y la viscosidad μ , los cuales se consideran todos constantes.

Recordemos que la disipación viscosa tiene la forma:

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \end{aligned} \quad (\text{Ec. I.4})$$

Si estudiamos, por ejemplo, el flujo generado por un gradiente de presión dentro de un tubo, estas ecuaciones no lineales pueden tener dos soluciones válidas bien diferentes: una laminar y otra turbulenta. La elección de una u otra, debe ser estudiada en función de ciertos *criterios de estabilidad*.

Desde un punto de vista matemático, esto significa que a la solución estacionaria para la velocidad \mathbf{V}_e , la temperatura T_e y la densidad ρ_e , hay que sumarle pequeñas perturbaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{V}_e(\mathbf{r}) + \varepsilon \cdot \mathbf{V}'(\mathbf{r}, t) \\ T(\mathbf{r}, t) &= T_e(\mathbf{r}) + \varepsilon \cdot T'(\mathbf{r}, t) \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho_e(\mathbf{r}) + \varepsilon \cdot \rho'(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{Ec. I.5})$$

denotadas aquí con una tilde '. Introduciendo estas soluciones en las Ecs. (I.1-4), se recupera la solución estacionaria a orden cero, mientras que los términos de orden ε^2 o mayores se suponen despreciables pues comenzamos por un análisis lineal. De este modo se obtiene un sistema de ecuaciones *para las perturbaciones*, que han de ser completadas con condiciones de contorno adecuadas. Esas *ecuaciones lineales* poseen soluciones de la forma $e^{\sigma t}$ cuya ecuación característica puede ser resuelta mediante métodos analíticos o numéricos. Hay que destacar, sin embargo, que el análisis lineal es el *primer paso* de uno no lineal más completo.

Recordemos ahora brevemente la noción de estabilidad asintótica y marginal. Las ecuaciones (I.1-4), se pueden escribir esquemáticamente como:

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, X_3) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Ec. I.6})$$

cuyas soluciones supondremos de la forma $X_i = \psi(t, [X_{i0}])$ donde ψ indica la función de evolución de la variable y X_{i0} define el estado inicial del sistema. Esta solución será estable si es "inmune" a toda clase de fluctuaciones, lo que se expresa por la condición de *estabilidad asintótica*:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t, [X_{i0} + \delta_{i0}], t_0) - \psi(t, [X_{i0}], t_0)| = 0 \quad (\text{Ec. I.7})$$

frente a una perturbación inicial δ_{i0} . Una solución es asintóticamente estable si las evoluciones de dos estados inicialmente diferentes coinciden para un tiempo suficientemente largo. En el análisis lineal se toman perturbaciones de la forma $e^{\sigma t}$, con $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$, de manera que el signo de la parte real σ_R determina si la perturbación resulta amplificada ($\sigma_R > 0$ inestable; $\sigma_R < 0$ estable). Cuando $\sigma_R = 0$ nos hallamos en un estado *marginalmente estable*.

Una manera muy efectiva de resolver las ecuaciones lineales de las perturbaciones consiste en utilizar un desarrollo en ciertos "modos", esto es, descomponer la perturbación en componentes de Fourier, conocidas como "modos normales". Así, la estabilidad de la solución para la perturbación suele presentarse en función del *número de onda* k , mediante la curva de estabilidad marginal $\sigma(k)$ (Figura I.2)

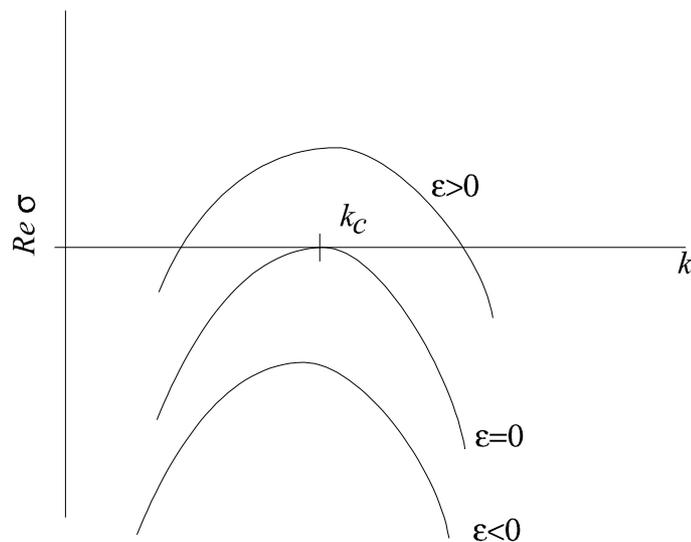


Figura I.2 Diagrama de estabilidad marginal. ε representa el parámetro de control normalizado de la inestabilidad.

A continuación, aplicamos estos conceptos a la convección de Bénard-Rayleigh.

I.2 Convección de Bénard-Rayleigh

El primer trabajo teórico sobre convección se debe a Lord Rayleigh. Aunque fue motivado por los experimentos de Bénard, Rayleigh consideró que la capa de fluido estaba atrapada entre dos superficies sólidas a diferentes temperaturas. Al ser las

condiciones diferentes, los resultados teóricos y experimentales discrepan, pero su trabajo fue de importancia indiscutible pues todos los estudios posteriores lo toman como punto de partida.

Por esto resulta útil discutir brevemente los argumentos de este trabajo. Consideremos una capa de fluido entre dos paredes perfectamente horizontales de extensión infinita, y con la pared de abajo a una temperatura mayor que la de arriba.

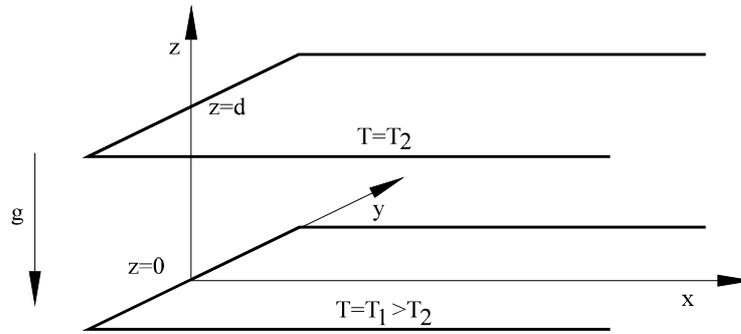


Figura I.3 Sistema de coordenadas.

Si suponemos que el calentamiento aplicado es moderado, podemos hacer las hipótesis que se desarrollan a continuación. Para la densidad se puede tomar:

$$\rho(T) = \rho_e [1 - \beta(T - T_e)] \quad (\text{Ec. I.8})$$

donde $\beta = -\frac{1}{\rho_e} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=T_e}$ es el coeficiente de dilatación y ρ_e y T_e , las variables en un

estado de referencia. Las ecuaciones de evolución del fluido serán:

a) la ecuación de continuidad

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{Ec. I.9})$$

b) la de Navier Stokes:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (\text{Ec. I.10})$$

para la que supondremos que la viscosidad dinámica $\mu = \rho_e \nu$ es constante.

c) la del balance de energía:

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \quad (\text{Ec. I.11})$$

donde la difusividad térmica $\kappa = \frac{\chi}{\rho c_p}$ permanece constante y hemos considerado que el

calor generado por disipación viscosa es despreciable frente al de conducción.

La solución estacionaria para el fluido calentado por debajo es:

$$\mathbf{V} = 0, \quad \bar{T} = T_1 - \frac{\Delta T}{d} z, \quad \frac{dp}{dz} = \rho_0 g [1 - \alpha(T(z) - T_0)] \quad (\text{Ec. I.12})$$

Las perturbaciones de esa solución son de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= 0 + \varepsilon \cdot \mathbf{V}' \\ p &= \bar{p} + \varepsilon \cdot p' \\ T &= \bar{T} + \varepsilon \cdot \theta \end{aligned} \quad (\text{Ec. I.13})$$

Se reemplazan en las Ecs. (I.8-11), que además se adimensionalizan con las variables:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{u} \frac{|r|}{d}, \quad t' = \kappa \frac{t}{d^2}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u} d \frac{|u|}{\kappa} \\ \theta &= \frac{\alpha g d^3 T'}{\nu \kappa}, \quad p' = \frac{p d^2}{\rho_0 \kappa^2} \end{aligned} \quad (\text{Ec. I.14})$$

de manera que las ecuaciones para la convección resultan:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} &= -\nabla p + \text{Pr} \theta \cdot \mathbf{z} + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{V} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \nabla^2 \theta + Ra \cdot w \end{aligned} \quad (\text{Ec. I.15})$$

donde el número de Prandtl $\text{Pr} = \frac{t_\theta}{t_\nu} = \frac{d^2/\kappa}{d^2/\nu} = \frac{\nu}{\kappa}$ relaciona los tiempos característicos de difusión de la vorticidad t_ν y de difusión de temperatura t_θ . El número de Rayleigh Ra está definido como:

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa}$$

y representa el cociente entre los efectos del empuje y los disipativos. Su importancia resulta crucial en la convección.

El sistema de ecuaciones Ec. I.15, puede reacomodarse para obtener una única ecuación para la componente w de la velocidad:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right] \left[\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right] \nabla^2 w = Ra \nabla^2 w \quad (\text{Ec. I.16})$$

Esta ecuación debe estar acompañada de las condiciones de contorno del problema. Estas se dividen en dos grupos: térmicas y viscosas. Las primeras se representan esquemáticamente en la Figura I.5. En ella, dos baños térmicos ($C_p = \infty$)

están en contacto con las paredes del sistema, de manera que - como *usualmente* se acepta- la temperatura y el flujo de calor son continuos en las interfaces:

$$\theta'|_{z=0,d} = \theta_{\text{liquido}}|_{z=0,d} \quad (\text{Ec. I.17.a})$$

$$\chi' \partial_z \theta'|_{z=0,d} = \chi_{\text{liquido}} \partial_z \theta|_{z=0,d} \quad (\text{Ec. I.17.b})$$

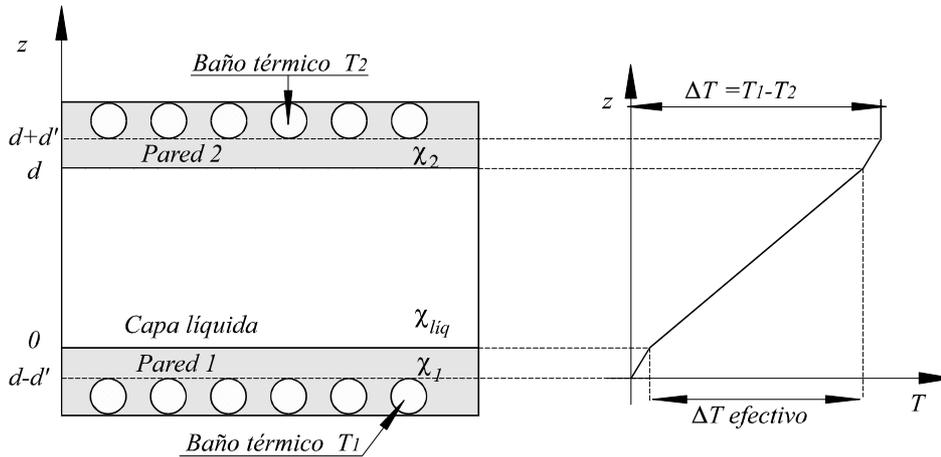


Figura I.5 Representación esquemática de las condiciones de contorno.

Para la velocidad suelen adoptarse dos tipos de condiciones: se supone la superficie "libre":

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = w = 0 \quad (\text{Ec. I.19})$$

o bien "rígida":

$$\frac{\partial w}{\partial z} = w = 0 \quad (\text{Ec. I.20})$$

Resolvemos la Ec. (I.16) utilizando la descomposición en modos normales para las perturbaciones de la velocidad y la temperatura:

$$w = W_0 W(z) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{\sigma t} \quad (\text{Ec. I.21})$$

$$\theta = \Theta_0 \Theta(z) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{\sigma t}$$

donde W_0 es la amplitud de la velocidad vertical, y su signo indica la dirección del flujo. (Nótese que dicha constante no puede ser determinada solamente de la Ec. (I.16) debido a que ésta es puramente lineal). $W(z)$ representa el perfil de velocidad vertical, y como esperamos que la estructura convectiva tenga una forma "celular", esta se describirá mediante el número de onda k :

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (\text{Ec. I.22})$$

Siguiendo las ideas de Rayleigh, la estructura celular puede ser estudiada mediante la ecuación de ondas bidimensional o "ecuación de la membrana":

$$\nabla_2^2 f(x, y) + k^2 f(x, y) = 0 \quad (\text{Ec. I.23})$$

Las componentes horizontales del flujo se pueden expresar como:

$$u = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \quad (\text{Ec. I.24})$$

Como se discutió en la sección precedente cuando $\sigma=0$ la perturbación, cualquiera que sea, no crecerá ni se amortiguará, dando lugar a un estado *marginalmente estable*. En este caso, la ecuación Ec. (I.16) se reduce a:

$$\nabla^6 w = Ra \nabla_2^2 w$$

que junto con la ecuación de la membrana Ec. (I.21) se reduce a:

$$(D^2 - k^2)^3 w = -k^2 \cdot Ra \cdot w \quad (\text{Ec. I.25})$$

donde $D \equiv d/dz$ es el operador derivada adimensional.

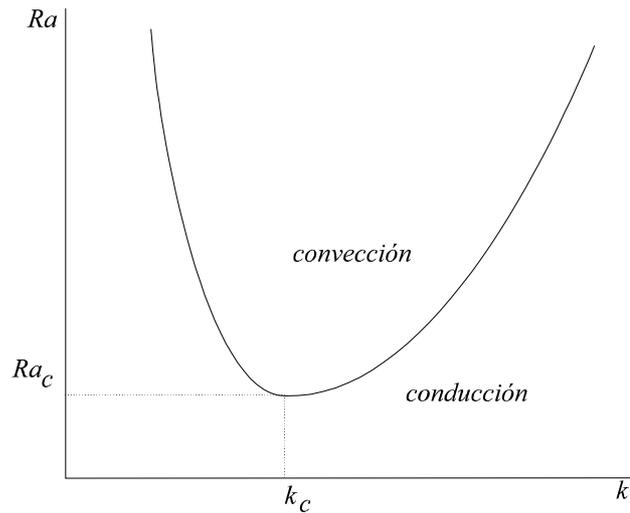
Supondremos que las condiciones de contorno para la velocidad están dadas por la Ec. (I.19), y que para la temperatura se cumple [80]:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0,h} = \frac{\chi_{\text{sólido}}}{\chi_{\text{líquido}}} \frac{k}{\text{tgh}\left(\frac{kd'}{d}\right)} \cdot \theta \Big|_{z=0,h} \quad (\text{Ec. I.26})$$

donde d' es el espesor de la placa calefactora. El término que acompaña a θ en el lado derecho de la ecuación se denomina coeficiente de transferencia de calor B . La definición exacta de este coeficiente depende, sin embargo, de si se controla la temperatura o el flujo de calor en la interfase. Los dos casos límites son:

1. $\theta_{\text{liq}} / \text{interfase} = 0$ que significa que $B \rightarrow \infty$ y que la temperatura está fijada en la interfase, es decir, o bien la pared es perfectamente conductora o el espesor de la pared termorregulada es muy pequeño comparado con la altura del fluido.
2. $\partial_z \theta_{\text{liq}} / \text{interfase} = 0$ que implica necesariamente que $B \rightarrow 0$. El flujo de calor es constante, lo cual puede ser conseguido mediante el uso de un buen aislador como pared.

Con estas condiciones, se llega a una relación entre el número de Rayleigh Ra y el número de onda k de la estructura celular $Ra = Ra(k)$. La gráfica de esta relación puede verse en la Figura I.6, y el valor para el cual Ra se hace mínimo, define el *número de onda crítico de la estructura celular* k_c . En la tabla que acompaña la figura se dan los valores críticos para las diferentes condiciones de contorno.



Límites verticales	Ra_c	k_c	λ_c
Rígido-rígido	1707.8	3.177	2.016
Rígido libre	1100.7	2.682	2.342
Libre-libre	657.5	2.221	2.828

Figura I.6 Curva de estabilidad y valores críticos en función de las condiciones de contorno

Existen diferentes formas celulares que satisfacen la Ec. (I.16). Las más comunes son: 1) rollos paralelos de longitud infinita o rollos concéntricos en sistemas con simetría cilíndrica, 2) celdas cuadradas y c) celdas hexagonales.

Un esquema de estas estructuras pueden verse en la Figura I.7.

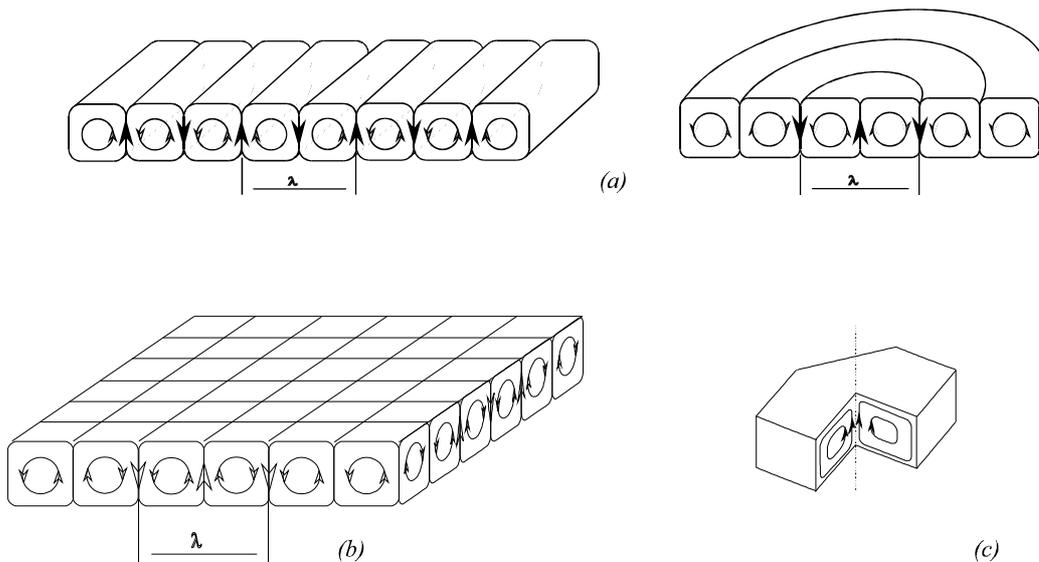


Figura I.7 Distintas formas de patrones celulares. (a) Rollos paralelos, (b) cuadrados (rollos cruzados) y (c) rollos concéntricos

I.3 Convección de Bénard-Marangoni.

Nos ocupamos ahora de los sistemas convectivos con su superficie libre en contacto con la atmósfera circundante. Estas son las condiciones de la experiencia original de Bénard que por razones históricas, se denomina en la actualidad como convección de Bénard-Marangoni. La principal diferencia con la convección discutida más arriba, es que la dependencia de la tensión superficial con la temperatura se añade al empuje como factor desestabilizante.

Pearson en 1958, fue el primero que realizó un análisis teórico en que la tensión superficial actúa como *única* fuerza desestabilizante. En este caso la condición de contorno de la superficie libre se modifica teniendo en cuenta la relación:

$$S = S_0 + \frac{\partial S}{\partial T} \Delta T \quad (\text{Ec. I.27})$$

que describe la dependencia de la tensión superficial S con la temperatura. La derivada $\frac{\partial S}{\partial T}$ suele ser negativa, pues un aumento en la temperatura ocasiona una disminución de la tensión superficial en la mayoría de los líquidos.

Considerando la descomposición en modos normales:

$$w = -\frac{\kappa}{d} W(z) f(x, y) e^{\sigma t} \quad , \quad \theta = \Delta T \theta(z) f(x, y) e^{\sigma t}$$

y las condiciones de contorno [28]:

a) en el fondo sin deslizamiento $w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

b) sobre la superficie libre $w = 0$, $\rho \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\partial S}{\partial T} \nabla^2 \theta$

c) en el fondo $\theta = B \frac{\partial \theta}{\partial z}$ donde B es el factor de transferencia de calor

d) en la superficie $\frac{\partial \theta}{\partial z} = Bi \cdot \theta$ donde el factor de transferencia de calor aquí se denomina Bi , y se conoce como número de Biot de la superficie.

Tomando variables adimensionales para la componente w se puede demostrar que:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = k^2 \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\Delta T d}{\rho \nu \kappa} \theta = k^2 Ma \cdot \theta \quad (\text{Ec. I.28})$$

donde

$$Ma = -\frac{\partial S}{\partial T} \frac{\Delta T d}{\rho \nu \kappa} \quad (\text{Ec. I.29})$$

se conoce como número de Marangoni y al igual que el de Rayleigh es una medida adimensional de la diferencia de temperatura.

Posteriormente Nield [5] en 1964 desarrolló una teoría con las dos causas desestabilizantes, el empuje y la tensión superficial. Utilizando un análisis lineal encontró el sistema de ecuaciones equivalente a la Ec. (I.25) y que se escribe en este caso:

$$\begin{aligned}(D^2 - k^2)(D^2 - k^2 - \sigma)W &= k^2 Ra \cdot \theta \\ (D^2 - k^2 - Pr \sigma)\theta &= -W\end{aligned}\tag{Ec. I.30}$$

Ahora el umbral para el desarrollo de la convección estará fijado por el acoplamiento entre los números de Marangoni y de Rayleigh. El valor del número de Marangoni para que se desarrolle la convección Ma_c , dependerá de los otros parámetros $Ma_c = Ma_c(Ra, k, B)$.

El umbral de la convección originado por los *dos efectos desestabilizantes* cumple la relación aproximada:

$$\frac{Ra}{Ra_c} + \frac{Ma}{Ma_c} \cong 1\tag{Ec. I.25}$$

que se ha representado en la Figura I.8 para los casos extremos del número de Biot cero e infinito.

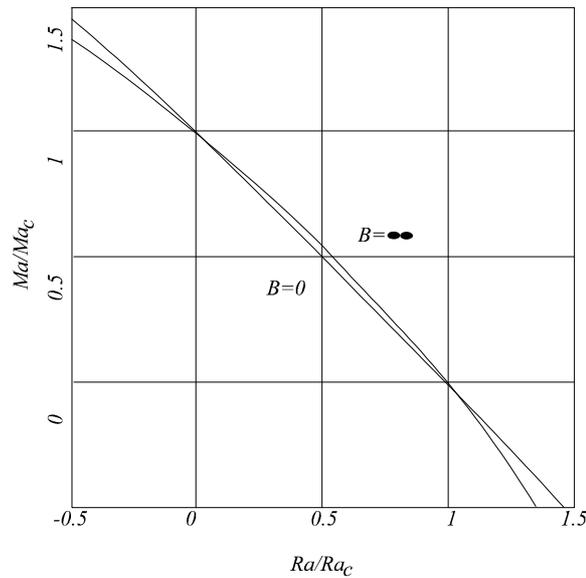
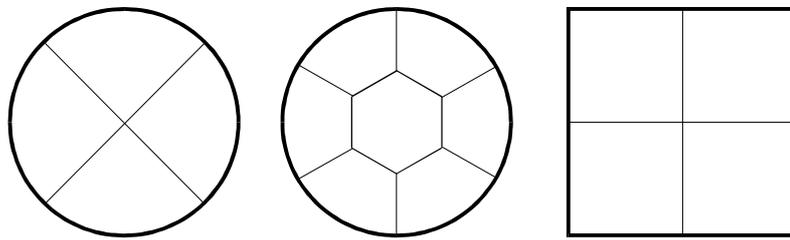
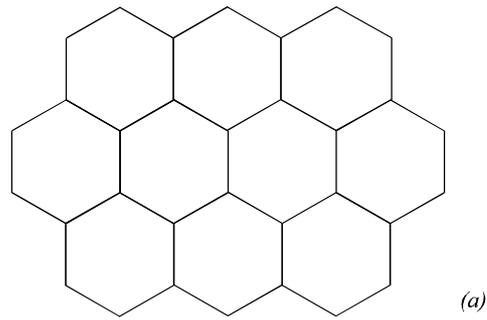


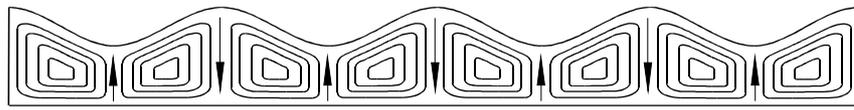
Figura I.8 Diagrama de estabilidad de Nield para la convección con flotación y tensión superficial. La letra B indica el valor del número de Biot.

Las observaciones experimentales posteriores a Bénard en este tipo de sistemas, son más bien escasas. Cuando la relación de aspecto (definida como la raíz cuadrada de la superficie de fluido respecto de la profundidad) es "infinita", siempre se presenta una estructura hexagonal (Figura I.9.a), mientras que si la relación de aspecto es pequeña, se observan diferentes formas poligonales como las de la Figura I.9.b. La deformación de la superficie es cóncava cuando la altura d es pequeña -como ya obtuvo Bénard- mientras que para valores grandes de d es convexa, tal como se representa en la Figura I.10

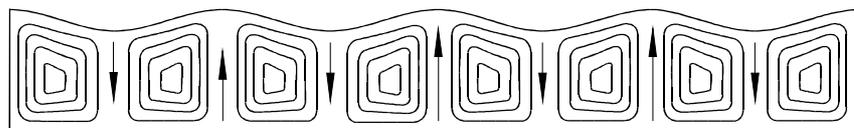


(b)

Figura I.9 Estructuras celulares en convección de Bénard-Marangoni. a) Gran relación de aspecto y b) pequeña relación de aspecto (ver referencia [18])



(a)



(b)

Figura I.10 Deformación de la superficie. a) Pequeña profundidad y b) Gran profundidad

Finalicemos esta sección recordando que los valores críticos comentados anteriormente, fueron obtenidos suponiendo una extensión lateral infinita. Como esto no es posible experimentalmente, se ha estudiado la dependencia de los valores críticos con la relación de aspecto. Destaquemos el trabajo de Dauby & Lebon [19] en geometría rectangular. Se halla en estudio su extensión al caso circular.

Figura I.11 Dependencia del número de Marangoni con la relación de aspecto, extraída de la referencia [19].

I.4 Transición al caos.

Hasta aquí hemos bosquejado el análisis *lineal* de la convección. El segundo gran avance – mucho más reciente – entraña el estudio de los estados *no lineales* a los que accede el sistema.

El parámetro de control más comúnmente utilizado para analizar la evolución de esos estados, es el número de Rayleigh. Por otro lado, el número de Prandtl Pr que depende sólo del fluido permite clasificar los regímenes dominados por la temperatura o la velocidad.

Finalmente, hay que tener en cuenta el número de onda k de la estructura. En sistemas de pequeña extensión horizontal éste toma valores discretos que se ajustan a las condiciones de contorno.

Consideremos que la convección forma rollos paralelos infinitos. Esta queda caracterizada mediante una *amplitud* –que da cuenta de su intensidad– y una *fase* que da cuenta las alteraciones que sufre el número de onda de la estructura. Consecuentemente se dan dos tipos de inestabilidades secundarias: de amplitud y de fase.

Busse y colaboradores [6], hallaron toda la gama de *inestabilidades secundarias* posibles de rollos paralelos, en el espacio de parámetros $[Ra, Pr, k]$ que dan lugar a lo que se denomina “*globo de Busse*”.

Las inestabilidades secundarias más comunes son:

1. *Inestabilidad de rollos cruzados*. Un estado de rollos paralelos pierde estabilidad, siendo reemplazado por rollos con una longitud de onda menor y perpendiculares a los iniciales.
2. *Inestabilidad de Eckhaus*. Los rollos resultan inestables frente a variaciones de la longitud de onda, dando lugar a una estructura paralela a la inicial pero con una longitud de onda mayor.
3. *Inestabilidad zig-zag*. En esta inestabilidad el sistema de rollos originalmente rectilíneo, se deforma dando lugar a una estructura ondulada que posee un longitud de onda menor que la inicial.

4. *Inestabilidad bimodal.* Cuando el número de Rayleigh es suficientemente alto, se forma una combinación no lineal de dos modos a 90° entre sí. Algunos de estos estados pueden verse esquematizados en la Figura I.12

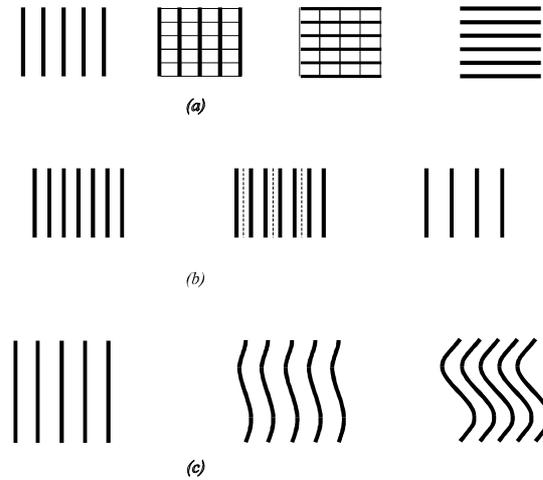


Figura I.12 Diferentes tipos de inestabilidades secundarias para un sistema de rollos paralelos a) Inestabilidad de rollos cruzados, b) inestabilidad de Eckhaus y c) inestabilidad en zig-zag.

Aumentando aún más el parámetro de control se llega hasta la *turbulencia*. Algunos autores distinguen resultados "antiguos" y "nuevos", según fueran obtenidos antes o después de que Ruelle & Takens publicaran sus trabajos acerca del origen del comportamiento dependiente del tiempo y de la turbulencia. Los resultados "antiguos" fueron compilados en un trabajo de R. Krishnamurti [7] (Figura I.13). En él se describen los estados sucesivos que atraviesa un sistema convectivo hasta arribar a la turbulencia. Estos estados son: 1) convección estacionaria en dos dimensiones, 2) convección estacionaria en tres dimensiones, 3) convección tridimensional dependiente del tiempo, y 4) turbulencia.

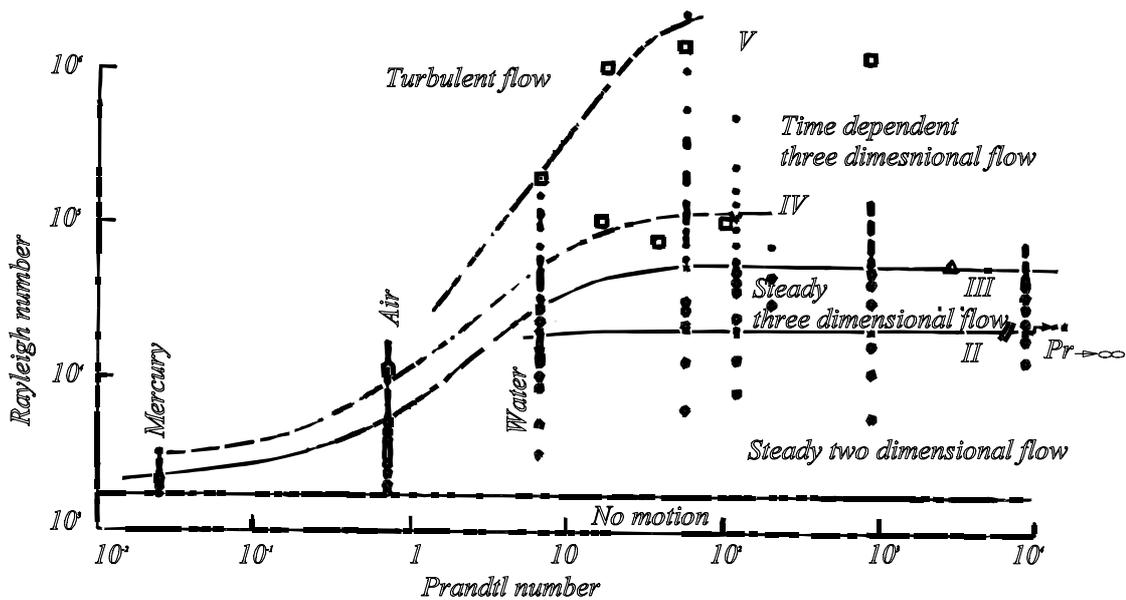


Figura I.13 Diagrama de Krishnamurti sobre los diferentes estados dinámicos hasta la turbulencia

Se llevaron a cabo un gran número de experimentos para demostrar la validez de las ideas conceptuales desarrolladas en el trabajo teórico de Ruelle & Takens [8]. Los principales resultados pueden englobarse en la observación de las tres principales rutas al caos:

Cascada de duplicación de período. En esta ruta, también conocida como ruta de Feigenbaum, a un régimen oscilatorio monoperiódico de frecuencia f se le superpone una nueva frecuencia $f_2=f/2$. Si se continúa aumentando el parámetro de control, aparecen los picos correspondientes a: $f/4$; $f/16$. De esta manera pudo verificarse que:

1. Existe una cascada de duplicación de período en el espectro de potencias con nuevos subarmónicos en las frecuencias $2^{-n}f$ siendo f la frecuencia de base.
2. Cada subarmónico tiene una amplitud en el espectro de potencias menor a la anterior.
3. Los nuevos subarmónicos se presentan para valores del parámetro de control que guardan entre sí, una determinada relación de escala.
4. El ruido presente en el sistema experimental impide verificar bifurcaciones de orden elevado.
5. La sección de Poincaré [9] obtenida de la señal experimental, tiene un máximo que puede considerarse aproximadamente cuadrático.

El primer resultado experimental en el que se obtuvo esta ruta se debe a Libchaber y Maurer [10], y fue realizado en una celda con relación de aspecto pequeña y un fluido con bajo número de Prandtl. En la Figura I.14 pueden verse algunos resultados.

Cuasiperiodicidad: En 1982 Dubois & Bergé [11] mostraron por primera vez la aparición de un *atractor extraño* en un experimento de Bénard-Rayleigh. Midiendo series temporales de la temperatura $T(t)$ en una celda con pequeña relación de aspecto, reconstruyeron la sección bidimensional de Poincaré a partir de un muestreo estroboscópico de la señal sobre un plano con ejes $[T(t), T(t)]$, en intervalos de tiempo fijos a partir de una de las frecuencias presentes en el sistema.

Esas secciones ponían de manifiesto la presencia de dos frecuencias *incommensurables*, que para cierto valor del parámetro de control desarrollaban un atractor extraño de acuerdo con las predicciones de Newhouse, Ruelle & Takens [12] y del modelo de Curry & Yorke [13].

Figura I.15 Cuasiperiodicidad. Aparición de dos frecuencias [16], sección de Poincaré antes y después del caos [11].

Intermitencia: En el régimen de intermitencia las señales se comportan de manera regular durante largos intervalos de tiempo \square regiones *laminares* \square mientras que durante algunos instantes aleatoriamente distribuidos, se muestra muy irregular tras lo cual otra vez retorna al estado laminar. Indiquemos que de los tres tipos posibles de intermitencia, han sido observados dos en experimentos de Bénard-Rayleigh. P. Bergé [14] en 1980 reportó intermitencia de “tipo I” en un sistema con pequeña relación de aspecto, y posteriormente la “tipo III” fue observada en un experimento similar por M. Dubois *et. al.* [15].

Figura I.16 Observación experimental de la intermitencia Tipo I y III

Los experimentos que manifiestan regímenes caóticos han sido realizados en celdas con pequeña relación de aspecto. En 1978 Ahlers & Behringer [17] mostraron que en esas condiciones el número de osciladores presentes en el sistema es pequeño, cuyo espectro de potencias presenta un número limitado de picos. Sin embargo, para relaciones de aspectos intermedias esta característica desaparece, generándose estados cuyo espectro posee banda ancha; para relaciones de aspecto grandes el espectro se hace continuo y dominado por una banda ancha de ruido de baja frecuencia.

CAPÍTULO II

DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA EXPERIMENTAL

Los sistemas convectivos como el estudiado por Bénard, no requieren una sofisticada técnica de implementación, pues basta calentar un recipiente lleno de fluido, para que aparezcan en su interior estructuras convectivas. Esto resulta suficiente para tener una idea cualitativa de los fenómenos involucrados, pero a la hora de cuantificarlos, hay que incorporar las técnicas típicas de los experimentos hidrodinámicos.

Las dificultades que presentan las determinaciones cuantitativas pueden agruparse en dos grandes grupos: a) la elección de los elementos adecuados, tales como el fluido o los materiales del recipiente y b) las características técnicas del sistema de medida, que a su vez pueden subdividirse en técnicas invasivas -que perturban de manera apreciable la dinámica del fluido- y no invasivas.

A continuación haremos una breve reseña de los métodos de medida con sus ventajas e inconvenientes, así como una descripción de las características del sistema convectivo estudiado y de las razones que han motivado este análisis.

II.1 Las celdas convectivas

Para la construcción de las diferentes celdas que contienen el fluido, hemos buscado siempre un equilibrio entre las posibilidades de los métodos de observación, y las condiciones de contorno ideales que deseábamos para el experimento.

La primera de las celdas utilizadas (Figura II.1) está formada simplemente por un recipiente circular de aluminio maquinado, calentado desde el fondo mediante una resistencia eléctrica que es alimentada por una fuente de tensión constante. En el interior de este recipiente, se coloca un cuadrado de metacrilato de 2 mm de espesor por 68 mm de lado, cuyos cantos han sido pulidos de modo que el contacto con el fondo sea

perfectamente homogéneo. El problema sobre la manera en que las características térmicas de las paredes laterales afectan la convección de Bénard-Marangoni (con pequeña y gran relación de aspecto), ha sido cuidadosamente estudiado por H. Mancini [18] y los interesados pueden encontrar en este trabajo una amplia discusión sobre este aspecto.

Un esquema de la distribución de temperaturas justo antes de la aparición de la convección en esta celda se encuentra en la Figura II.1.b. Se puede destacar que al ser la conductividad térmica del metacrilato ($\chi=0.17 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$), muy similar a la del aceite de silicona, la perturbación que las paredes inducen sobre el estado conductivo es despreciable, siempre y cuando el contacto con el fondo sea homogéneo.

Una vez desarrollada la convección, las paredes pueden considerarse prácticamente adiabáticas, pues a ambos lados de éstas se establecen regímenes convectivos muy similares, y el transporte de calor lateral resulta irrelevante. Es sencillo comprobar que la diferencia de temperatura entre las dos caras se mantiene dentro del rango del error.

Esta celda –que en adelante llamaremos *celda A*– se llena hasta el borde de las paredes, que tienen 15 mm de altura, y así se evita que el menisco introduzca perturbaciones importantes, debido a la reducida escala espacial de trabajo.

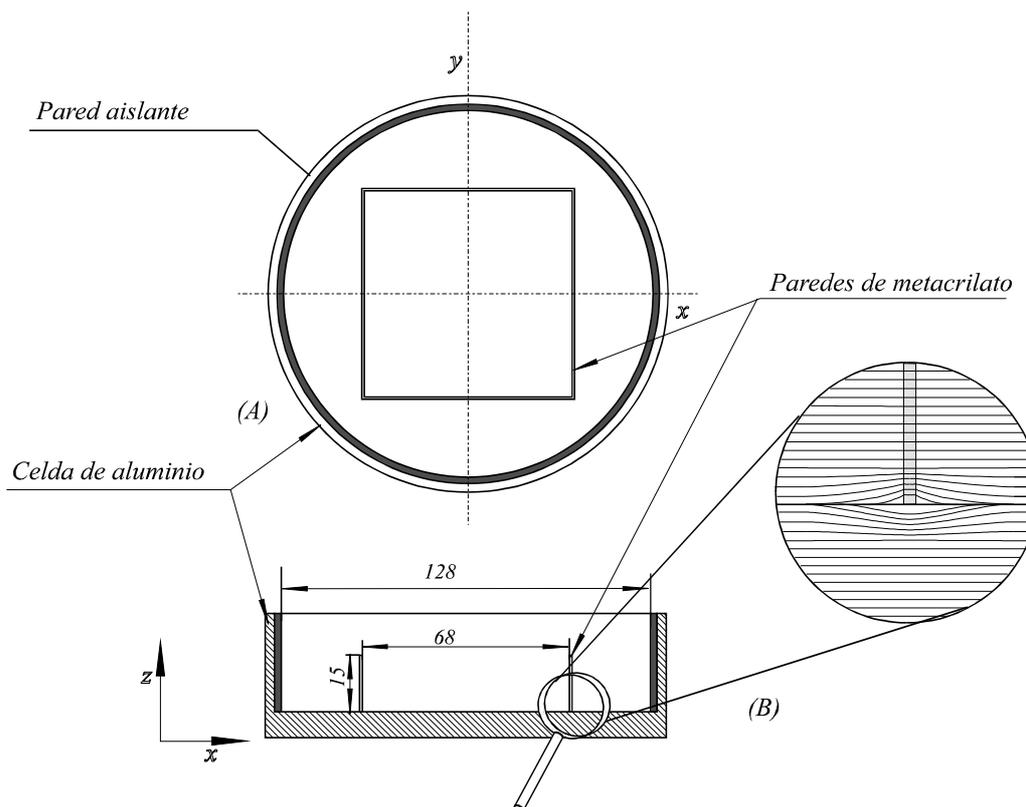


Figura II.1 Celda A. a) Vista superior y b) corte lateral de la celda convectiva. La pared aislante evita el calentamiento lateral del fluido. El detalle en (b), indica la forma aproximada de la perturbación sobre la distribución de temperaturas en el estado conductivo.

La segunda celda utilizada (en adelante *celda B*), puede verse en la Figura II.2. Las dimensiones del recipiente son las mismas que en el caso anterior pero con una importante diferencia: ahora el calefactor no abarca todo el fondo de la celda sino sólo una zona, que tiene la misma área que el cuadrado de metacrilato de la celda A. La zona

calefactora ha sido maquinada en aluminio y el resto del recipiente en acetato de polimetilo. Este último material tiene una conductividad térmica baja ($\chi \approx 0.1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$), por lo que podemos considerar que el calor fluye hacia el fluido fundamentalmente a través de la placa calefactora.

La placa tiene la superficie de contacto con el fluido pulida, para que refleje la luz que llega desde arriba y así poder estudiar la estructura convectiva mediante técnicas ópticas. La calefacción se realiza mediante una resistencia calefactora de película delgada que se encuentra a 20 mm de la superficie pulida. Esto nos garantiza una alta homogeneidad en la distribución de temperatura y una estabilidad de $0.01 \text{ }^\circ\text{C}$.

La pieza de aluminio encaja en la de acetato con una precisión de 0.1 mm de modo que cuando se alcanza la temperatura de trabajo, el propio sistema cierra el espacio entre ellos gracias al elevado coeficiente de dilatación del calefactor.

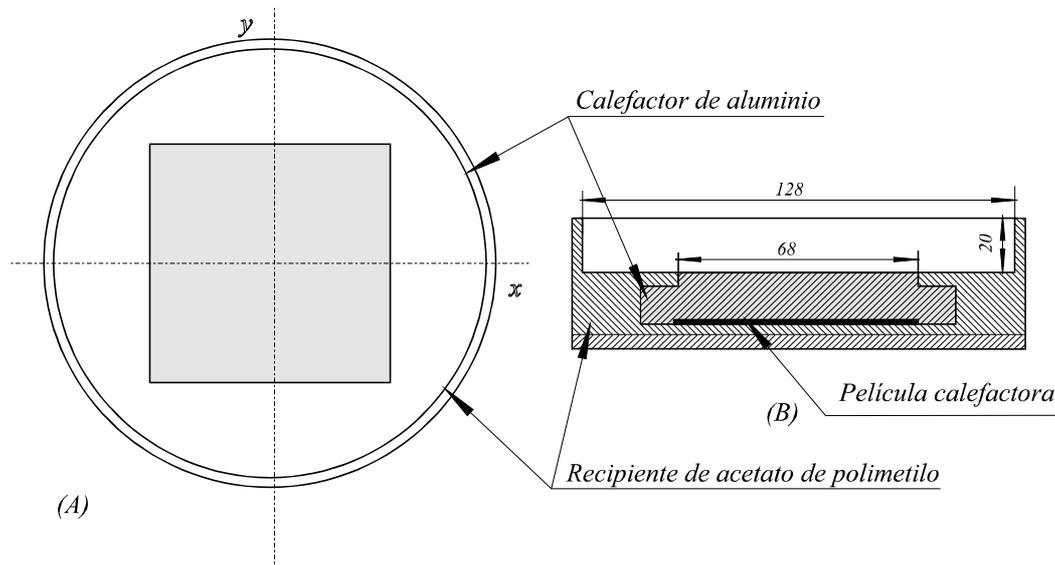


Figura II.2 Celda B. a) Vista superior y b) corte lateral

Estas dos celdas han sido diseñadas para analizar las estructuras convectivas desde un eje perpendicular al fondo, pero no permiten la observación del fluido en otras direcciones. Por esta razón se diseñó una tercera celda según el esquema que se muestra en la Figura II.3 (en adelante *celda C*). En ella, el calentamiento continúa siendo inhomogéneo, pero las paredes laterales no son cilíndricas sino rectangulares. Dos de las paredes enfrentadas están construidas con ventanas ópticas que permiten la observación de las estructuras convectivas en direcciones paralelas al fondo. Las características térmicas del vidrio difieren de las del metacrilato, lo cual da lugar a una pequeña inhomogeneidad en las condiciones de contorno. Para amortiguar estas diferencias y homogeneizar las condiciones a las que estará sometido el fluido, colocamos un cuadrado de metacrilato en el interior de la celda.

En el fondo - en este caso también de metacrilato - está insertada una pieza de aluminio de 5 mm de espesor, con un calefactor de película delgada adherido a ella. Aunque la inercia térmica de este calefactor no es tan elevada como en los casos anteriores, es razonablemente buena para el tipo de determinaciones que esperamos realizar. Nos permitirá además ensayar con potencias de calentamiento dependientes del tiempo.

En esta celda, el espacio entre la pieza de aluminio y el metacrilato ha sido sellado con metacrilato líquido, y todo el fondo pulido como una unidad. Con esta distribución se evitan inhomogeneidades bruscas en la calefacción (cosa que ocurre en los dispositivos anteriores), aún en el transitorio de calentamiento. Esto nos permitirá observar con detalle el desarrollo de la estructura convectiva desde su aparición, reduciendo al máximo las perturbaciones debidas al dispositivo de calefacción.

En esta celda, la pieza calefactora tiene un área menor que las anteriores (50 mm de lado), aunque las paredes se han construido de forma tal que se conserve la relación entre la superficie total del fondo y el área de calefacción.

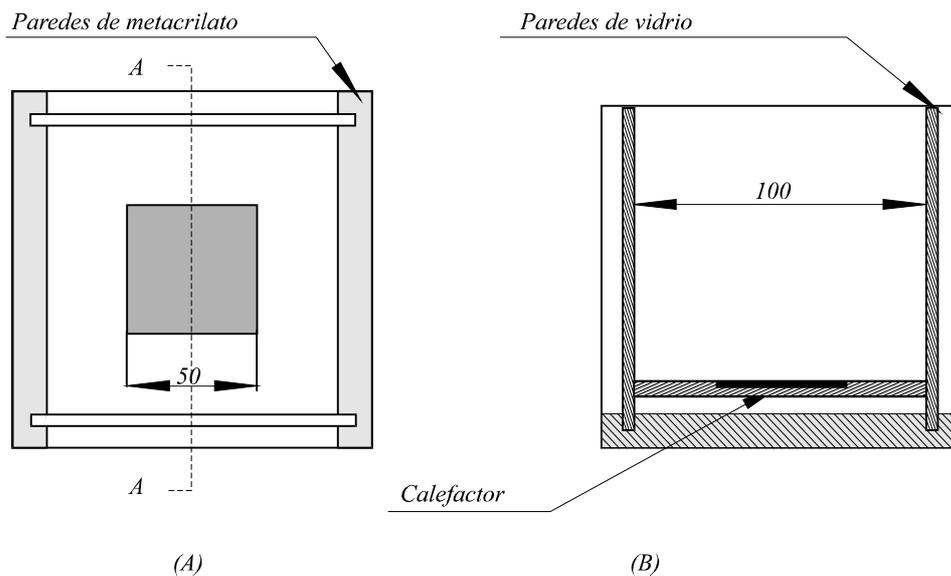


Figura II.3 Celda C a) Vista superior y b) corte lateral

En todas nuestras experiencias hemos trabajado con aceites de silicona de 100 y 350 cSt, que no afectan para nada las propiedades termomecánicas de las celdas y cuyas principales características físicas se encuentran resumidas en la Tabla I. La elección de aceites de silicona para trabajar está motivada fundamentalmente por:

1. Su elevado grado de pureza y estabilidad, y la escasa variabilidad de sus características físicas en la gama de calentamientos utilizados en el experimento. Esto nos garantiza la aplicabilidad de las hipótesis de Oberbek Boussinesq, y una perfecta repetibilidad en las determinaciones realizadas.
2. Es perfectamente transparente, lo que nos permite observar las estructuras convectivas utilizando métodos ópticos.

Otro factor que ya hemos mencionado, es el elevado número de Prandtl, que en la práctica podremos considerar infinito. De esta forma, tomando como referencia el diagrama hallado por Khrisnamurti (Figura I.13), nuestros experimentos se sitúan en una región del espacio de parámetros donde los diferentes estados dinámicos del sistema

están bien diferenciados y tienen amplias zonas de estabilidad en función del número de Rayleigh.

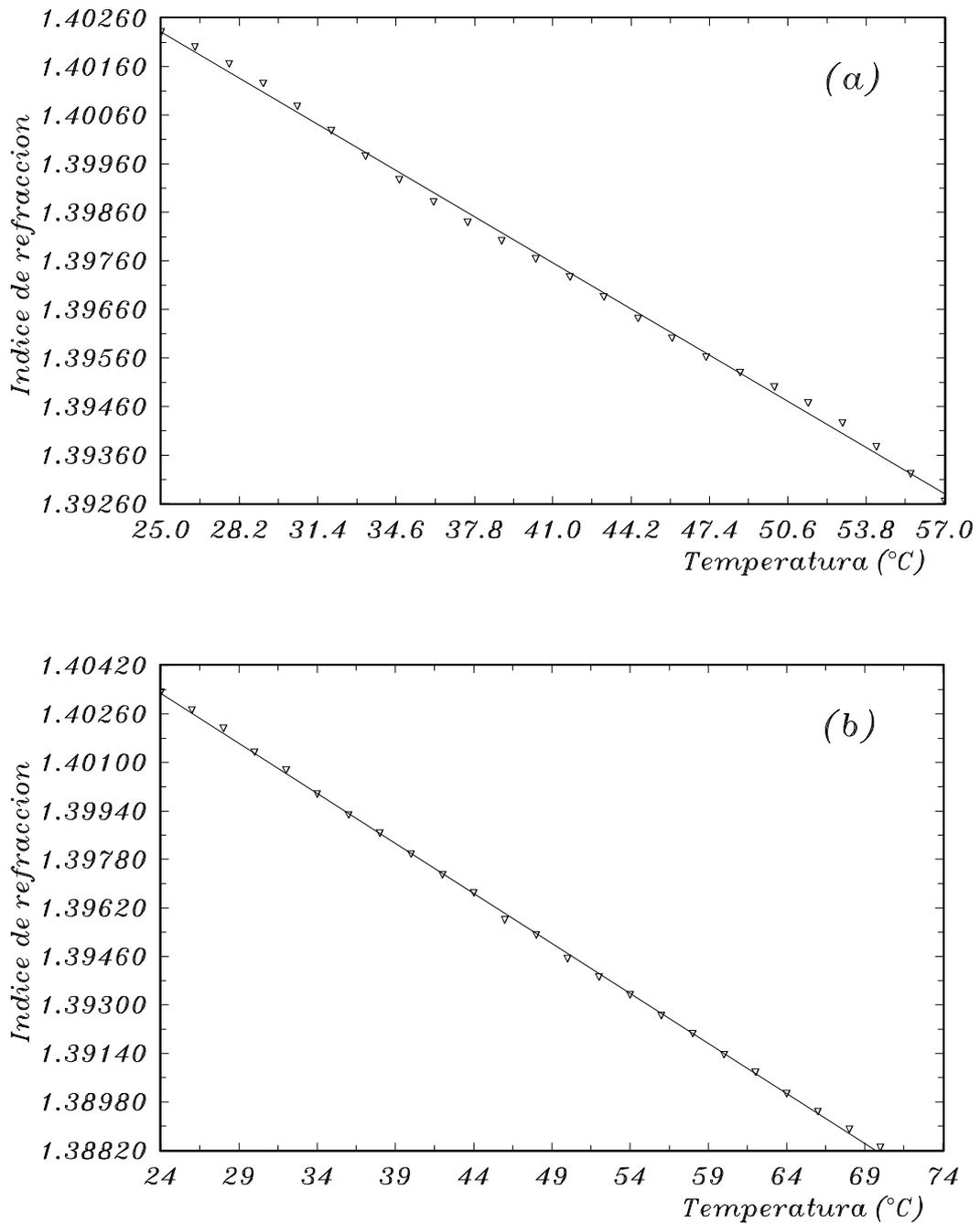


Figura II.4 Dependencia del índice de refracción con la temperatura a) 350 cSt y b) 100 cSt

La dependencia del índice de refracción con la temperatura ha sido medida mediante un refractómetro de Abbe y se ha representado en la Figura II.4. Esta magnitud nos permite resaltar la sensibilidad de los métodos ópticos utilizados, capaces de discriminar variaciones en la tercera cifra significativa del índice de refracción.

Viscosidad Cinemática (ν)	100 cSt	350 cSt
Densidad (ρ)	968 Kg.m ⁻³	968 Kg.m ⁻³
Tensión Superficial (σ)	20.9 mN.m ⁻¹	21.1 mN.m ⁻¹
Conductividad Térmica (χ)	0.1557W.m ⁻¹ °C ⁻¹	0.16 W.m ⁻¹ °C ⁻¹
Coeficiente de Dilatación (α)	9.25 10 ⁻⁴ °C ⁻¹	9.45 10 ⁻⁴ °C ⁻¹
Difusividad Térmica (κ)	1.06719 10 ⁻⁷ m ² .s ⁻¹	1.13 10 ⁻⁷ m ² .s ⁻¹
Coef. Viscosidad/Temperatura ($\delta\nu/\delta T$)	0.59 cSt.°C ⁻¹	0.62 cSt.°C ⁻¹
Coef. Tensión Sup. /Temp. ($\delta\sigma/\delta T$)	6.06 10 ⁻⁵ mN.m ⁻¹ °C ⁻¹	6.06 10 ⁻⁵ mN.m ⁻¹ °C ⁻¹
Nº de Prandtl (Pr)	937	3097

Tabla Nº 1 Características físicas de los fluidos

En todas nuestras determinaciones las celdas se encuentran sobre mesas aisladas neumáticamente de las vibraciones mecánicas externas, y la atmósfera del laboratorio mantiene su humedad y temperatura prácticamente constantes en toda la duración de los experimentos (Figura II.5).

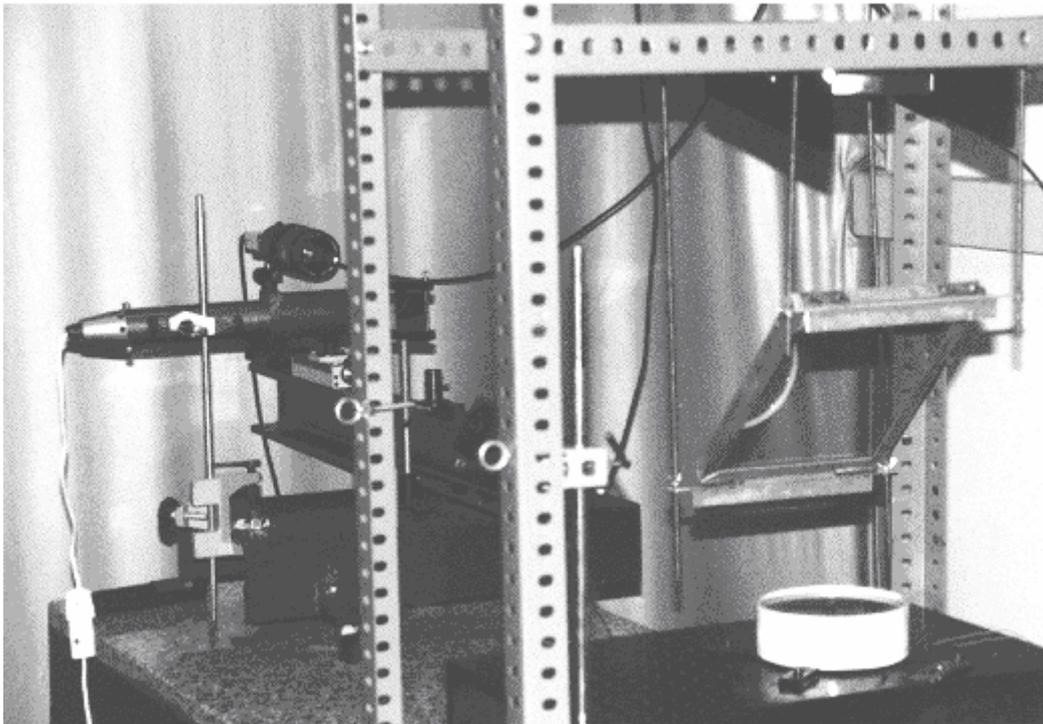


Figura II.5 Vista general del sistema experimental

II.2 Los Sistemas de Medida

Como dijimos al comienzo, podemos subdividir los sistemas de medida en dos grandes grupos: a) aquellos que introducen perturbaciones del orden de las fluctuaciones termodinámicas, y b) los métodos invasivos que sí producen perturbaciones importantes sobre el sistema. Los métodos no invasivos por excelencia son los métodos ópticos que describimos a continuación.

II.2.a Métodos de medida no invasivos.

Los estados convectivos de un sistema quedaran unívocamente determinados, si conocemos la distribución del campo de velocidades y temperaturas en el seno del fluido. Así, las técnicas experimentales implementadas en nuestro experimento persiguen la determinación de dichos campos.

Los métodos ópticos son los más comúnmente utilizados, pues permiten la visualización a gran escala de las líneas de corriente del fluido y también la determinación de propiedades locales. Un interesante listado de la gran variedad de métodos ópticos, así como una amplia bibliografía se encuentra en la referencia [20].

La mayoría de las determinaciones ópticas en dinámica de fluidos, se basan en la variación de la densidad con la temperatura, que ocasiona una variación del índice de refracción local, desviando los rayos que pasan a través de él. Veamos con más detalle estos fenómenos.

El índice de refracción de un dieléctrico puede escribirse como una función de las propiedades electromagnéticas del material, tales como el momento dipolar molecular, a través de la expresión:

$$n - 1 = \rho \frac{Le^2}{2\pi n_e M} \sum \frac{f_i}{v_i^2 - v^2} \quad (\text{Ec. II.1})$$

conocida como relación de Clausius-Mosotti, que pone de manifiesto la dependencia del índice de refracción con la densidad, y de una variedad de factores que no detallaremos. Estos pueden ser determinados con cierta precisión para la mayoría de los gases; en los fluidos por el contrario, tal determinación resulta imposible y en general, no queda más remedio que expresar esa dependencia empíricamente.

En nuestro caso, conocemos esta relación indirectamente, pues hemos medido la dependencia del índice de refracción con la temperatura y a partir de ella podemos determinar su relación con la densidad. El refractómetro de Abbe tiene una excelente precisión, pues permite determinar el índice de refracción con un error absoluto de ± 0.0002 . Como puede verse en la Figura II.4, el índice de refracción decrece con la temperatura, y dentro del rango de temperaturas con que trabajaremos resulta prácticamente lineal, por lo que lo consideraremos definido por la relación:

$$\begin{aligned} \Delta n_{100\text{cSr}}(\Delta T) &= -0.0003 \cdot \Delta T \\ \Delta n_{350\text{cSr}}(\Delta T) &= -0.000321 \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (\text{Ec. II.2})$$

Una vez determinada esta relación, estamos en condiciones de deducir la dependencia entre densidad, temperatura e índice de refracción. Sabemos que la trayectoria de un rayo luminoso en cualquier medio está regida por el principio de Fermat, el cual, en su forma variacional puede escribirse como:

$$\delta \int n(x, y, z) ds = 0 \quad (\text{Ec. II.3})$$

donde s denota la trayectoria del rayo luminoso. A partir de aquí, es sencillo demostrar que, para un rayo que viaja inicialmente paralelo al eje z , esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \left\{ 1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{dx}{dz} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right\} \quad (\text{Ec. II.4.a})$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \left\{ 1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{dy}{dz} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right\} \quad (\text{Ec. II.4.b})$$

Así, un frente de onda plano que incide perpendicularmente sobre un objeto afectado por un gradiente espacial de índices, resultará deformado debido a la diferencia de camino introducida sobre los rayos que viajan por su interior. La Ec. (II.3) describe esta deformación, pero resulta sumamente difícil de integrar, por lo cual usualmente se realizan ciertas aproximaciones [21]:

- a) las pendientes de entrada y de salida de los rayos respecto al medio son prácticamente iguales por lo cual $dx/dz \cong dy/dz \ll 1$.
- b) las derivadas $\partial n / \partial z$, $\partial n / \partial x$, $\partial n / \partial y$ son del mismo orden de magnitud.

Aplicándolas al sistema de ecuaciones (II.4), puede demostrarse fácilmente que:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \quad , \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \quad (\text{Ec. II.5})$$

y el problema se simplifica de manera considerable, brindándonos cierta esperanza de poder integrar estas ecuaciones, conocida la distribución de rayos que llega al detector.

Una distribución homogénea de rayos, no perturbada por ningún objeto, generará sobre el detector una señal constante $I(x, y, t) = I_0$. Si se introduce un objeto en la trayectoria de los rayos, que modifique la forma del frente, la distribución de intensidades final estará relacionada con la inicial mediante [22]:

$$I(x, y, t) = I_0 \left[1 + z (\nabla \theta(x, y, t) + \nabla \cdot \vec{\alpha}(x, y)) \right]^{-1} \quad (\text{Ec. II.6})$$

donde hemos supuesto que la luz se desplaza paralela al eje z ; $\theta(x, y, t)$ representa las inhomogeneidades del campo de índices y $\vec{\alpha}(x, y)$ es un vector que engloba todas las desviaciones que no corresponden al objeto bajo estudio, sino a las desviaciones independientes del tiempo del sistema óptico de medida.

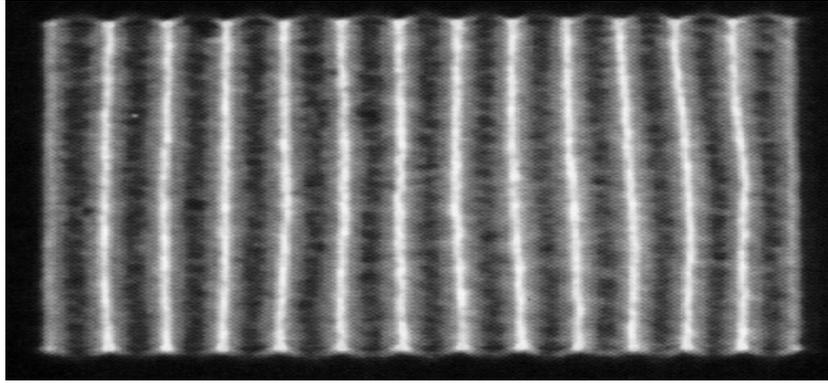
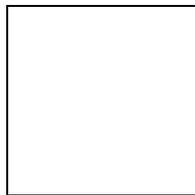


Figura II.6 Ombroscopía de un sistema de rollos en convección de Bénard-Rayleigh [23].

De esta forma, en el ejemplo más típico de estructura convectiva –la formada por un sistema de rollos paralelos – será posible visualizar la distribución espacial a través del efecto conocido como "lente térmica". Los rollos, presentan una variación periódica de la temperatura a lo largo de su sección transversal que lleva aparejada una variación periódica del índice de refracción, de modo que un frente de onda plano que los atraviese, generará una distribución de intensidades inhomogénea, reflejo de la distribución de índices [23]. Una imagen de este tipo, puede verse en la Figura II.6.

Imaginemos entonces un sistema de rollos paralelos atravesado por un frente de onda plano, podemos modelizar este problema, en primera aproximación, como un campo de índices de refracción que varía según una relación de la forma:



(Ec. II.7)

donde el número de onda k coincide con el de la estructura de rollos, y η representa la amplitud de la variación de n_0 . Usando esta relación en las ecuaciones (Ec II.4) se llega a la expresión:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right] * \left[\frac{\eta k \operatorname{sen}(kx)}{n_0 + \eta \cos(kx)} \right] \quad (\text{Ec. II.8})$$

la cual puede ser integrada numéricamente.

La intensidad la normalizamos en función del número total de rayos utilizados en la integración, asignándole a la iluminación obtenida sin la presencia del campo de índices, el valor de 128 dentro de la escala de 256 tonos de gris.

En la Figura II.7, podemos ver la distribución de intensidades resultante luego de que el frente haya atravesado el sistema convectivo. Esta imagen puede ser comparada con las obtenidas por diferentes autores [23], mostrando una perfecta coincidencia.

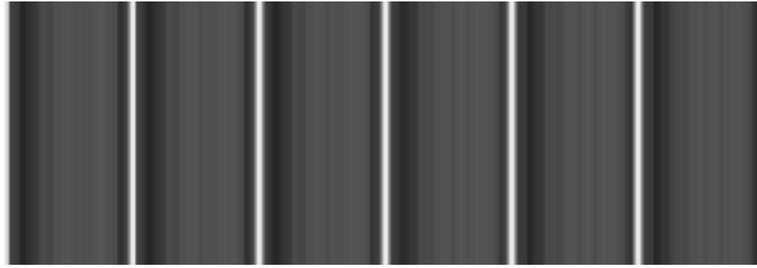


Figura II.7 Imagen obtenida mediante la integración de la Ec. II.8

Ahora bien, aunque estas imágenes proporcionan información cualitativa, la obtención de resultados cuantitativos a partir de ellas es prácticamente imposible. Veamos de qué manera los principios que acabamos de comentar se aplican a las técnicas ópticas utilizadas en el experimento.

II.2.a.1 La ombroscopía:

Este es el método más sencillo de implementar, pues consiste en colocar una fuente de luz puntual en el foco de una lente para generar un frente de onda plano. Este frente atraviesa el sistema, y luego mediante una nueva lente, es enfocado a otra región del espacio donde se registran las imágenes.

Si consideramos las aproximaciones comentadas anteriormente puede demostrarse que [21]:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = l \cdot \int_{z_i}^{z_f} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dx^2} \right) \cdot \ln n \, dz \quad (\text{Ec. II.9})$$

es decir, la variación relativa de la intensidad que llega al detector, es proporcional a la derivada segunda del campo de índices, razón por la cual este método se ha revelado sumamente eficaz en experiencias que entrañan variaciones abruptas de éste. Sin embargo, no resulta posible su utilización para determinaciones cuantitativas, debido a los problemas numéricos que presenta la ecuación integral Ec. II.9, obtenida tras drásticas aproximaciones.

II.2.a.1 Schlieren:

El método conocido comúnmente por la expresión alemana "Schlieren", consiste en un montaje muy similar al anterior, añadiendo un sistema de filtrado espacial. Tal como se esquematiza en la Figura II.8.a, este filtrado puede ser simplemente una cuchilla que intercepte alguno de los rayos que se aproximan al foco de la segunda lente. Cuando la cuchilla se coloca exactamente en el foco del sistema –si el frente de onda es perfectamente plano– la imagen que llega al detector pasa de tener una intensidad homogénea a una distribución nula. Ahora bien, si el frente de onda se halla deformado por cualquier motivo, no todos los rayos enfocan en el mismo punto, de forma que al colocar el borde de cuchilla en el foco la imagen no se anulará, sino que tendrá una distribución de intensidades determinada por la forma de la perturbación del sistema.

Este método y sus diversas variantes, han sido profusamente utilizados para estudiar las características reflectoras de diferentes superficies ópticas. Un ejemplo de

las imágenes obtenidas por esta técnica se muestra en la Figura II.8.b, correspondientes a las inhomogeneidades del fondo de una celda de aluminio. El filtrado espacial se ha realizado mediante un diafragma en lugar de una cuchilla. Se ha estimado que la resolución espacial de este método es del orden de $\lambda/600$ [24].

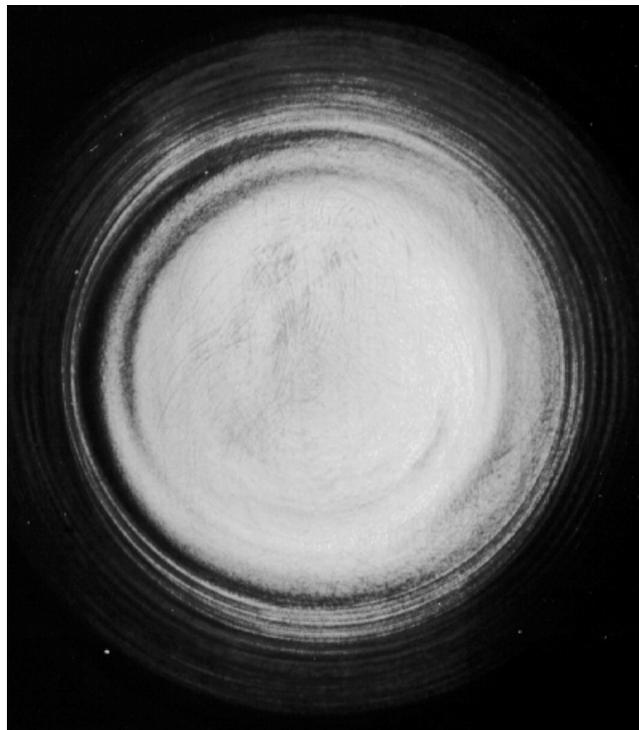
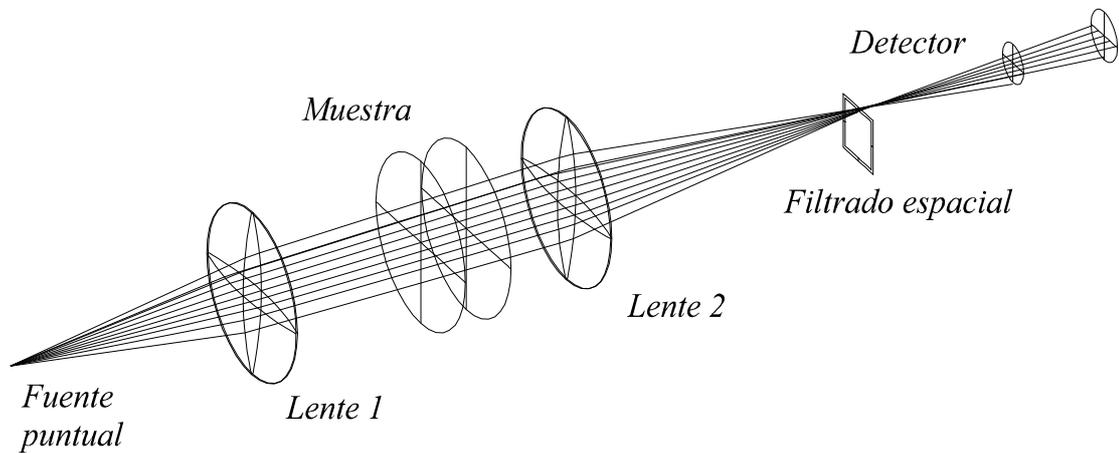


Figura II.8 a) Sistema de filtrado de rayos y b) imagen del fondo de una celda sin líquido.

Con las aproximaciones que venimos usando se demuestra que la intensidad relativa registrada por el detector viene dada por [21]:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{f}{a} \int_{z_i}^{z_f} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz \quad (\text{Ec. II.10})$$

donde f es la distancia focal del sistema de detección y a la apertura de la rendija que se utiliza para el filtrado. La dependencia del cambio de intensidad es proporcional a la derivada primera del índice de refracción y puede realizarse, al menos en primera aproximación, una buena estimación de la distribución del campo de índices mediante integración numérica.

II.2.a.3 Interferencia:

Si bien la utilización de los métodos anteriores permite una cierta cuantificación de la distribución de índices presentes en el fluido, la precisión de una determinación de este tipo es muy baja. Para mejorar esta precisión resulta necesario utilizar técnicas interferométricas. Estas entregan excelentes resultados, aunque el precio que hay que pagar por ello, es la elevada complejidad del montaje experimental. El método más popular para este tipo de determinaciones, es la llamada “interferometría de Mach-Zender”. En él, un frente de luz plana es dividido en dos, de manera que una de sus partes atraviese el fluido y la otra un medio que compense la diferencia de camino cuando el fluido estudiado no está sometido a ningún tipo de perturbación. Luego vuelven a ser mezclados para hacerlos coincidir sobre una pantalla. El patrón de interferencia que aparece sobre ella, responde exactamente a la distribución de índices presentes en la muestra.

Existen variantes simplificadas de este método, que no poseen la misma precisión, pero que entregan buenos resultados. Discutiremos una de ellas cuando la apliquemos a nuestro sistema.

II.2.a.4 Refracción de rayos localizados

Una variante de los métodos anteriores, consiste en la utilización de un único rayo que atraviese el fluido. Debido a la forma de las estructuras convectivas (y a las paredes de la celda que contiene el fluido), la determinación global del campo de índices casi siempre se hace integrando a lo largo de la dirección vertical. Sin embargo, estudiar las desviaciones de un rayo, resulta factible en diversas direcciones y además, nos permite interpretar rápida y directamente, las características locales del medio en función de la deformación de su trayectoria, o bien las deformaciones de las superficies sobre las que se refleja. Describimos a continuación como hemos implementado estas técnicas en nuestro caso.

II.2.b Descripción del sistema experimental.

Una implementación original de los métodos antes descriptos, –desarrollada por H. Mancini *et al* [25]– está esquematizada en la Figura II.9. En nuestro problema, no resulta práctico trabajar con lentes para generar el frente de iluminación, debido a las elevadas dimensiones que deberían poseer para cubrir todo el campo de las celdas utilizadas. Aquí, aquellas han sido reemplazadas por un único espejo esférico (E.e.)

cuyo coste es notablemente menor al de las lentes. El sistema de iluminación consiste en una lámpara de filamento delgado con un pequeño diafragma que la convierte en una fuente de luz cuasipuntual (F.p.).

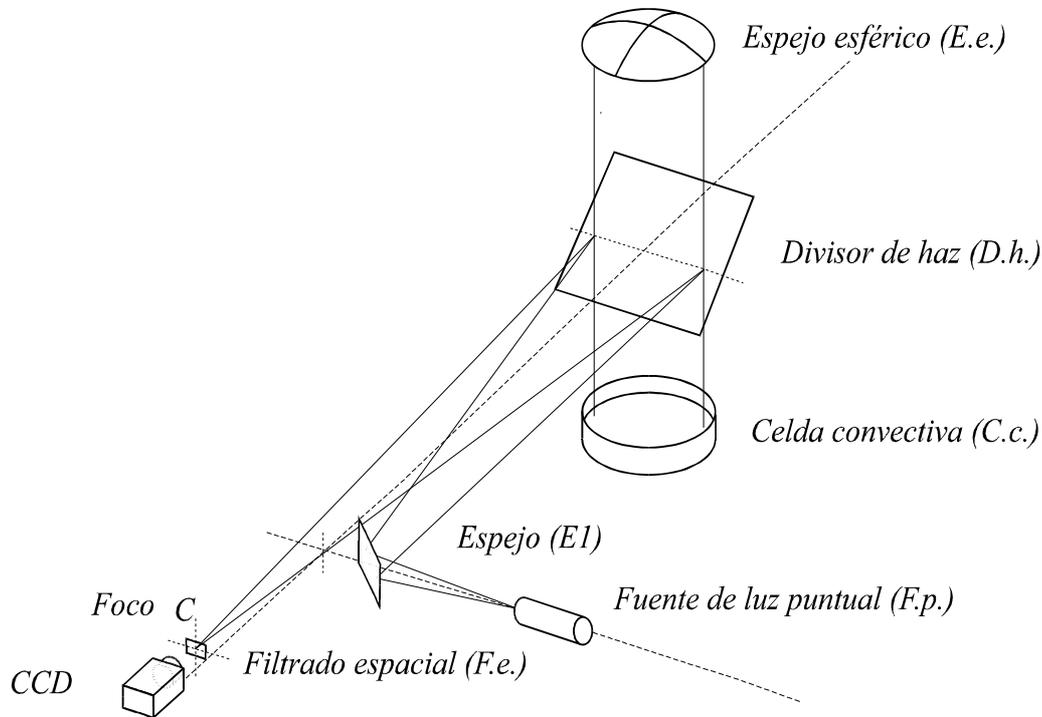


Figura II.9 Montaje experimental del sistema de observación óptica.

Los rayos que emergen de esta fuente se encuentran en el foco del espejo (E.e.), y son desviados hacia la celda. Atraviesan el fluido y regresan luego a través del mismo espejo hasta el divisor de haz donde son enfocados en el punto C. En este punto, la imagen es colectada mediante una cámara CCD de 512x512 elementos. En la posición del foco (C) se encuentra un diafragma o una cuchilla (F.e.) que permite realizar distintas variantes de filtrados espaciales cuando sea necesario. Mediante sencillos cambios en el montaje podemos transformar el sistema en un Schlieren o una ombroscopía.

Las imágenes captadas por la cámara son enviadas a una tarjeta digitalizadora de vídeo en un ordenador, con la que procesaremos las diferentes imágenes.

Un detalle importante a tener en cuenta es que el sistema es levemente astigmático, debido a la disposición de los ejes del sistema de iluminación. Esta disposición es tal que el camino de regreso no coincide exactamente con el de ida. Esta desalineación es necesaria para separar espacialmente la posición de la primera reflexión sobre el espejo, producida por la reflexión del frente de onda plana en su primer paso por el divisor de haz hacia la celda, pues ésta reflexión saturaría inmediatamente la cámara, dada su intensidad. Sin embargo, a pesar del astigmatismo, esta desalineación no introduce alteraciones importantes en la imagen captada por la cámara CCD.

También hay que considerar la extensión espacial de la fuente luminosa, que no es perfectamente puntual, con lo que la región del espacio donde son enfocados los rayos tiene una importante extensión espacial. De esta forma, cuando se coloca una

cuchilla justo en el foco, los rayos que no son colimados sobre esta posición, producen una imagen que no decae abruptamente a cero (Figura II.10).

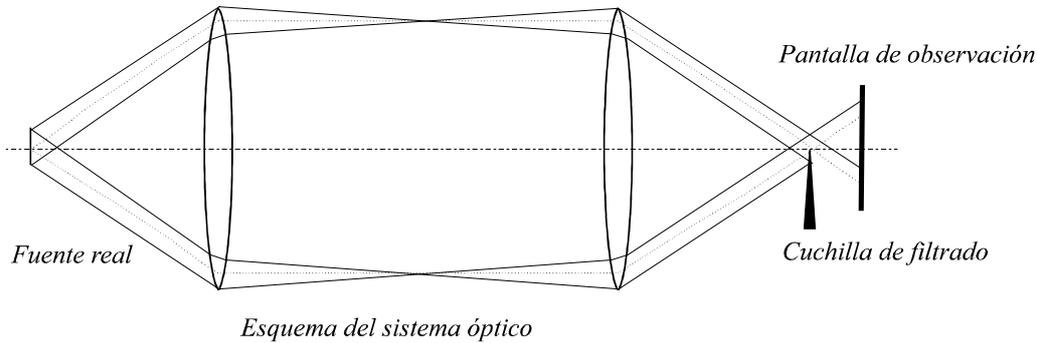


Figura II.10. Representación esquemática del sistema de observación óptico. El arreglo de lentes es equivalente a nuestro espejo esférico. Queda claro que una cuchilla colocada en el foco no elimina totalmente la iluminación sobre la pantalla.

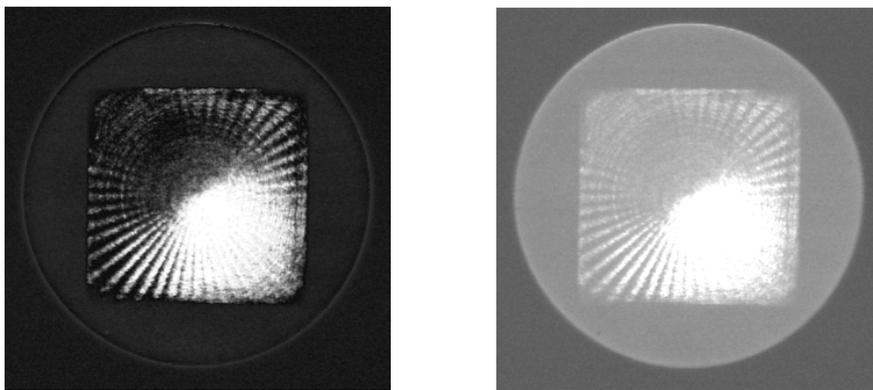


Figura II.11 Imagen de la celda B. Sin fluido (a) y con fluido (b). (Ambas sin calentamiento).

En las imágenes de la Figura II.11 se muestra la celda con y sin fluido dentro de ella. Se aprecia claramente que la imagen del fondo no resulta perturbada en absoluto, pues la superficie del fluido sin calentar es perfectamente plana. La imagen de la celda con fluido sin embargo, tiene dos componentes bien diferenciadas, una debidas la luz que se refleja sobre la superficie y otra a la que se refleja sobre el fondo. Cuando el fluido está en reposo es prácticamente imposible resolver las posiciones espaciales donde enfocan cada una de estas reflexiones. En el estado convectivo, la superficie del fluido se deforma debido a los efectos combinados del empuje y la tensión superficial, por lo cual en ese régimen de trabajo sí se puede discriminar la imagen de la superficie de la imagen del fondo. Esta última será ahora el resultado no solo de la deflexión de los rayos por las inhomogeneidades del campo de índices, sino también por las desviaciones que introduce la curvatura de la superficie.

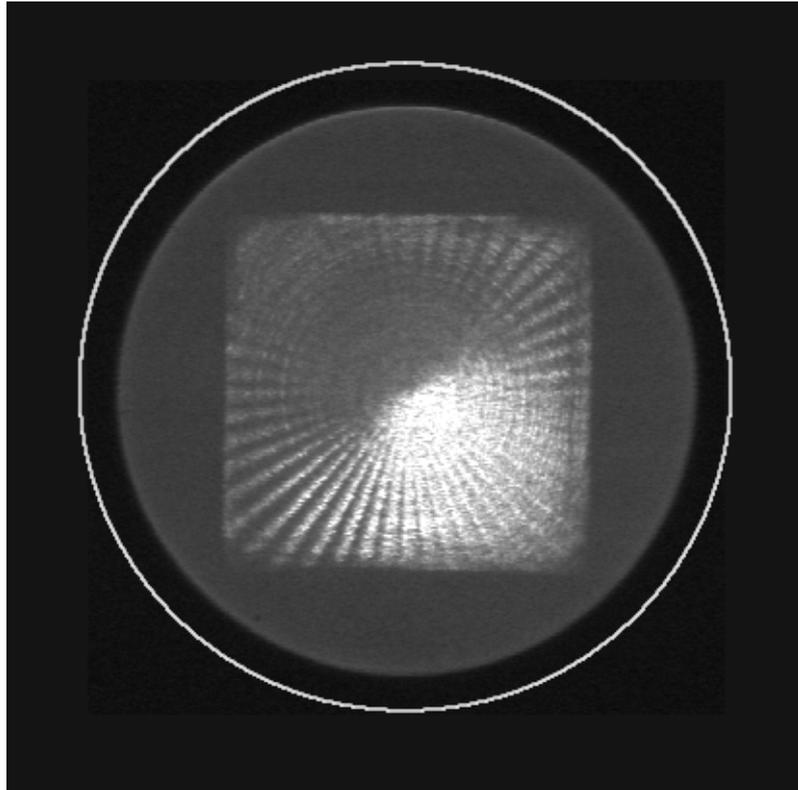
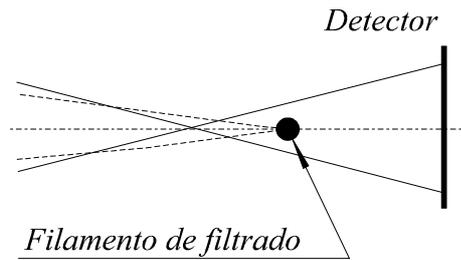


Figura II.12. Efecto del menisco sobre la imagen. La línea blanca indica los límites reales de la celda.

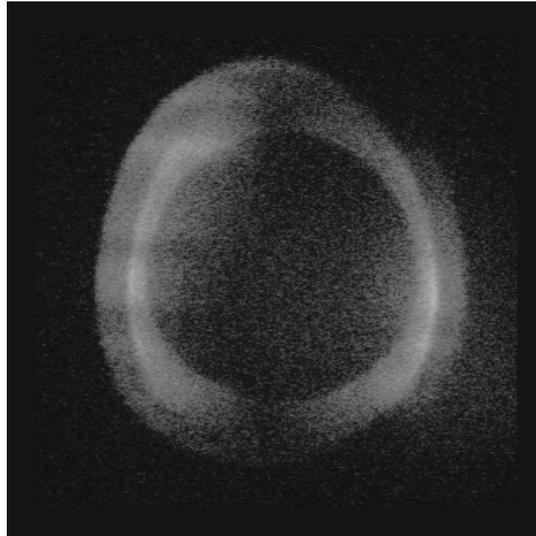
Este hecho puede ser verificado aún sin calentamiento, observando los rayos reflejados por el menisco contra las paredes de la celda. En la Figura II.12 puede verse el tamaño que *debería* tener la imagen de la superficie –determinada por comparación con el calefactor–, si ésta fuera perfectamente plana. Es evidente que el menisco perturba de forma importante la imagen de la superficie.

Normalmente, ignoramos el alcance de los efectos del menisco; sin embargo, debido a la elevada sensibilidad del método de observación, podemos determinar que su influencia se extiende más allá de 10 mm desde borde del recipiente, lo que representa más de 6 veces la longitud capilar del fluido (!).

Para comprobar que esta deformación no está originada por el sistema de observación (por defectos de construcción en el espejo, por ejemplo), hemos verificado las características ópticas del sistema, utilizando un espejo plano con una escala graduada, cuya imagen no sufrió deformación alguna. Si el responsable de la deformación fuera el menisco, la luz reflejada por éste, debería enfocarse en una región anterior a la imagen de la parte central de la superficie que es plana. Si introducimos un filamento justo en el foco de la superficie (vease Figura II.13), su imagen debe desaparecer, pero no así la producida por el menisco, pues ésta se enfoca en una región anterior, como queda patente en la Fig. II.13.b. Al filtrar la imagen de la superficie, quedan en evidencia los rayos procedentes del menisco. El astigmatismo de la imagen, se ve incrementado por el desenfoque de la luz residual; nótese, sin embargo, que el interior de la corona correspondiente al menisco es prácticamente circular.



(a)



(b)

Figura II.13. a) Esquema del sistema de filtrado, rayos procedentes de la superficie (a trazos) y del menisco (en línea continua). b) Imagen obtenida filtrando la luz procedente de la parte plana de la superficie. El anillo corresponde al menisco del fluido. (Nótese que los rayos desviados respecto del eje óptico, ponen de manifiesto el astigmatismo del sistema).

Resumiendo, la imagen que observamos con este sistema, se forma con luz que regresa desde el fondo, más aquella que regresa desde la superficie en un radio de 55 mm. Esta es perfectamente lineal si depreciamos el astigmatismo, mientras que sobre la frontera de la imagen, en cambio, el método deja de ser lineal debido al efecto del menisco.

Mencionemos también, que para este sistema, no son válidas las aproximaciones propuestas en la Sec. II.2.a. Aquí, fundamentalmente debido a la deformación de la superficie del fluido, las pendientes de entrada y salida de los rayos, no son del mismo orden y despreciables. Por otra parte, en el caso del calentamiento inhomogéneo, los gradientes espaciales del índice de refracción distan mucho de ser del mismo orden de magnitud, como pondremos de manifiesto en los párrafos siguientes.

Este dispositivo hace posible determinar las deformaciones de la superficie, así como el *planform*¹ que se forma para cada estado dinámico. Para obtener información

¹ En adelante denominaremos "*planform*" a la imagen que forma el sistema óptico sobre el detector. Esta imagen "plana", es un indicador de la "forma" tridimensional de la estructura convectiva.

respecto de los movimientos según la dirección vertical se desarrolló el sistema complementario mostrado en la Figura II.14.

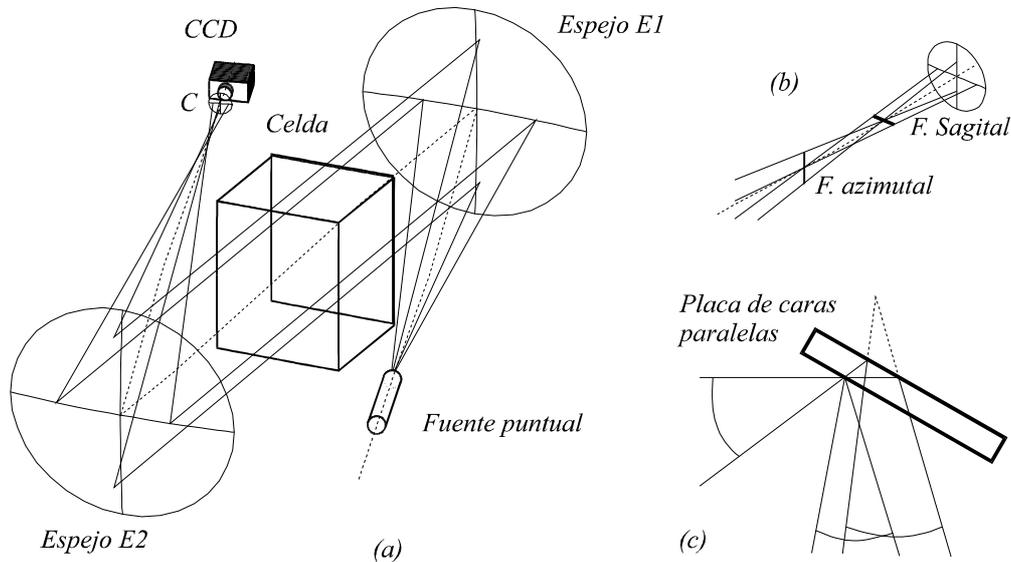


Figura II.14 a) Montaje del sistema de observación, b) detalle del enfoque c) Este sistema se puede transformar en una sencilla interferometría, colocando una placa paralela en el foco de la imagen.

Este consiste en una fuente puntual que se coloca en el foco de un espejo (E1) para formar un frente de onda plano que atraviese "lateralmente" la celda. Luego el frente llega a otro espejo (E2) que enfoca la luz en el punto C, donde se encuentra el sistema de observación.

En este sistema, la fuente de luz se halla desplazada respecto del eje que une ambos espejos, lo cual produce un fuerte astigmatismo, dando lugar a un foco tangencial y otro sagital distanciados espacialmente (Fig II.14.b). Hemos aprovechado este efecto, implementando una variante del dispositivo de filtrado, que consiste en colocar un filamento delgado paralelo a alguno de estos dos focos. De este modo la imagen generada en ausencia de inhomogeneidades será nula, siempre y cuando el espesor del filamento tenga las mismas dimensiones que la fuente de luz.

Con este sistema de filtrado, la imagen captada por la cámara en ausencia de convección será nula, pues el filamento intercepta los rayos en uno de los focos. Una vez desarrollada la convección, algunos rayos serán enfocados antes o después de la posición del filamento dándonos información de la variación del índice de refracción dentro del fluido. Aquí, la dirección de integración será alguna de las coordenadas (x,y) , sin embargo, debido a la simetría cuadrada de la celda, basta determinar las propiedades en una de ellas. Cuando coloquemos el filamento paralelo al foco sagital, observaremos aquellas desviaciones producidas por el gradiente de índices en la dirección z , mientras que si colocamos el filtro en dirección azimutal, las desviaciones serán proporcionales al gradiente según y .

Además, este mismo sistema levemente modificado, puede utilizarse para realizar una interferometría. Basta sustituir la fuente de luz blanca, por un láser de HeNe con un filtrado espacial de 5μ , de tal forma que la coherencia del frente sea muy alta. Colocamos entonces una placa paralela de vidrio en alguno de los focos (Fig. II.14.c), con lo que consigue un desplazamiento longitudinal y lateral del frente de onda que

genera un interferograma sobre una pantalla, proporcional al espesor de la placa y al ángulo de incidencia.

El diagrama de interferencia obtenido será el resultado de la integración a lo largo de la trayectoria de propagación, y no puede ser resuelto espacialmente como en una interferometría tipo Mach-Zender; sin embargo, este método permite observar cualitativamente la estructura convectiva y además es prácticamente insensible a las imperfecciones de las paredes de la celda.

Desgraciadamente, las ventajas que presenta esta disposición lateral, funcionando tanto como ombroscopía o interferometría, no son aplicables a todo el rango de variación de la temperatura del calefactor, sino solamente a valores muy próximos al umbral de convección. La interferometría fue utilizada con éxito en convección de Bénard-Rayleigh, pero con un eje de integración coincidente con el de los rollos convectivos [26]. Sin embargo, su aplicación en nuestro caso es limitada, debido a que las variaciones del índice de refracción son muy grandes. Los rayos de luz, sufren desviaciones tan fuertes (Figura II.15), que “expulsan” al frente de onda de la zona más interesante, justo sobre la superficie del calefactor. Además, los fuertes cambios en la dirección de propagación hacen que resulte imposible utilizar un tipo de filtrado eficiente para la obtención de información. Aún así, este sistema resulta muy útil en la determinación del umbral de convección, donde las variaciones locales del índice de refracción aún son pequeñas.

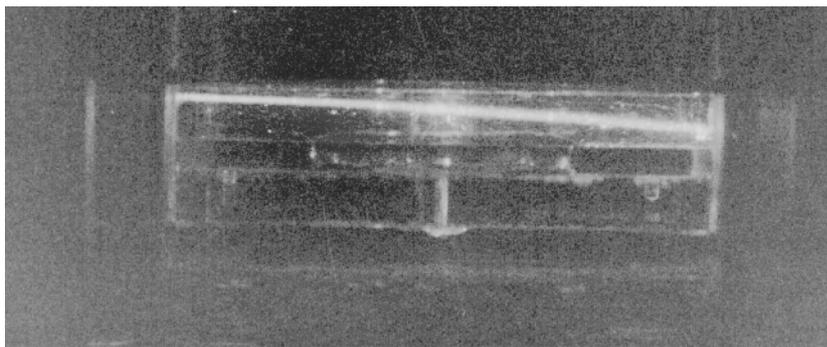


Figura II.15 Deformación de un rayo de luz laser que ingresa paralelo al fondo de la celda.

En lugar de un frente externo se puede usar un solo rayo, lo que permite recabar información de la variación del índice de refracción en la dirección de propagación.

Un haz laser puede ser observado con facilidad a lo largo de su trayectoria en el líquido proyectando sus desviaciones a gran distancia. Se pueden detectar así modulaciones menores al miliradian. Se presenta un ejemplo en la Figura II.15, donde se ha fotografiado la trayectoria de un haz, que ingresa en el fluido paralelo al calefactor. En esta imagen puede comprobarse que aparece una fuerte desviación en la dirección z cuando el rayo traspasa los límites del calefactor, evidenciando un gradiente en esa región.

Por otra parte, la forma del frente de salida del rayo está deformada, debido a la "lente térmica" que produce el fluido. De esta forma podemos estimar si la región por donde viaja el rayo es estacionaria o dependiente del tiempo. Discutiremos esto en detalle, al presentar los resultados de los experimentos.

Una variante de este método permite determinar las deformaciones de la superficie (Figura II.16). Ella consiste en expandir un haz de luz hasta formar una delgada

cuchilla, que se hace incidir sobre la superficie del líquido. Su reflexión pone en evidencia las deformaciones de la superficie según la dirección de incidencia.

Para terminar, digamos que entre las técnicas de medida no perturbativas no hemos citado la Anemometría Laser Doppler, que es, sin duda, uno de los métodos más precisos y eficaces de determinación de velocidades. Aunque no ha sido la utilizada en nuestro experimento, (fundamentalmente por las dificultades de montaje que implica), esperamos implementarla en un futuro próximo.

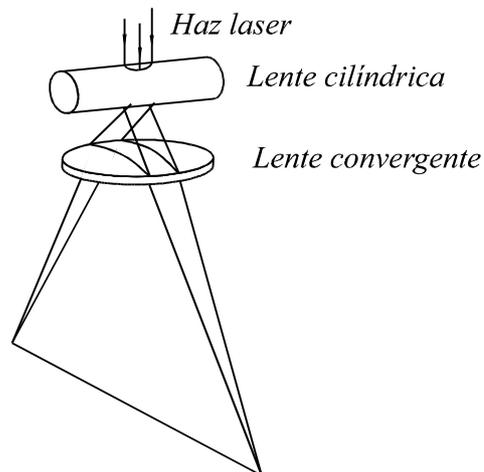


Figura II.16 Montaje experimental para determinar la deformación de la superficie.

II.2.B Métodos de Medida Invasivos

Tras haber discutido las técnicas experimentales no invasivas, discutimos ahora aquellas que, aunque introducen perturbaciones sobre el medio, permiten conocer mejor lo que ocurre en el fluido, siempre que podamos restar el efecto que la técnica misma produce sobre él.

II.2.b.1 Técnicas de sembrado.

Una mejora natural del método del pincel de luz comentado más arriba, consiste en sembrar el fluido con un pequeño número de partículas, que aparecerán brillantes en el plano iluminado, o bien utilizar alguna clase de colorante que nos permita visualizar las "trazas" de las líneas de corriente del fluido, o determinar los valores medios de la velocidad en diferentes lugares de la celda.

La elección del tipo de trazador resulta del compromiso entre la calidad de los datos y la perturbación que inducen. Una detallada discusión sobre el movimiento de una partícula en el seno de un fluido puede encontrarse en [21], donde se muestra como, para bajo número de Reynolds y flujos cuasibidimensionales, la velocidad de las partículas se aproxima exponencialmente a la del fluido según la ley:

$$u_p = u_f(1 - e^{-Kt}) \quad K = \frac{18\nu \rho_f}{d_p^2 \rho_p} \quad (\text{Ec. II.10})$$

donde u_p y u_f representan la velocidad de las partículas y del fluido respectivamente, y d_p el diámetro de las partículas.

Así, la respuesta será tanto más rápida cuanto menor sea el tamaño de las partículas y la relación entre las densidades del fluido y de las partículas.

Resulta obvio que la perturbación también será menor cuanto menor sea el número de partículas y su diámetro, pero entonces su visibilidad se ve reducida. Como, según la Ley de Stokes, el tiempo de sedimentación depende también del tamaño de las partículas, éste debe ser elegido en función del tiempo de observación necesario Δt_o , a partir de:

$$d_p \leq \frac{18\nu}{g\Delta t_o \left[(\rho_p/\rho_f) - 1 \right]} \quad (\text{Ec. II.11})$$

En nuestro caso, hemos utilizado partículas de aluminio que podemos considerar prácticamente esféricas de entre 20 y 40 μm , lo cual nos da un tiempo de caída de 100 s aproximadamente. El número medio de partículas es de 20 unidades/ mm^3 por lo cual su efecto puede considerarse prácticamente despreciable aún para la tensión superficial. No obstante debemos hacer notar que existen diferentes opiniones sobre sus efectos sobre la superficie libre, y principalmente sobre si realmente siguen al fluido en su movimiento.

El área que cubre la totalidad de las partículas representa un 5 % de la superficie libre, de manera que, aunque estuvieran todas sobre ella, su efecto es despreciable frente a las perturbaciones que puede causar, por ejemplo, restos de etanol en el aire.

Antes de proceder a la determinación de las velocidades medias mediante este método, se deja transcurrir un intervalo de tiempo para que precipiten todas las partículas cuyo diámetro sea mayor que el promedio, cosa que normalmente ocurre, debido a la heterogeneidad del material comercial, y al efecto de agregación que sufren algunas de ellas.

La utilización de colorantes, por otra parte, encierra otros problemas. Además de que éstos puedan alterar la tensión superficial, la mayoría de ellos sólo se disuelven en agua, de modo que la densidad resultante es mayor que la de la silicona y precipitan rápidamente. Para evitar esta dificultad, ensayamos diferentes soluciones de glicerina con agua para disolver los colorantes, pues con estas mezclas se consiguen densidades próximas a la de la silicona. Hemos obtenido las trazas de las líneas de corriente en cada experimento, verificando simultáneamente mediante la ombroscopia que la dinámica del planform no resultara afectada.

II.2.b.2 Determinaciones locales de temperatura.

Los métodos descriptos en la subsección anterior sirven para determinar el campo de velocidades del fluido. Ahora bien, como tratamos con fluidos cuyo número de Prandtl es elevado, este campo está supeditado al de temperaturas, así que podemos conocer la distribución aproximada de velocidades, midiendo cuanto se aparta la temperatura del régimen conductivo.

Sin embargo, la cuantificación del campo de índices a partir de las imágenes, y de este al de densidad y temperatura, es prácticamente imposible, debido fundamentalmente al gran tamaño de la región por donde viaja la luz, lo que hace inviable aplicar aproximaciones aceptables para resolver las integrales de camino que representan el problema.

La determinación local de temperaturas se lleva a cabo mediante elementos sensibles a la temperatura como termopares, termoresistencias o termistores.

Estos elementos ocasionan perturbaciones sobre las variables a medir, ya sea por la disparidad de las conductividades térmicas entre el material en que está compuesto y la del fluido, como por las alteraciones sobre el campo de velocidades, por el menisco que se forma cuando el elemento de medida ingresa desde arriba.

Intentaremos a continuación, cuantificar estos efectos sobre nuestro sistema, para demostrar que se pueden obtener medidas de gran calidad, sin perturbar de forma apreciable los estados dinámicos del sistema.

Hemos de seleccionar el tipo de sensores más convenientes para nuestras medidas. Si bien elementos como los termistores o las termoresistencias comerciales brindan una alta precisión, suelen tener dimensiones grandes, y se manufacturan, en general, encapsulados, lo que reduce notablemente su repuesta temporal. Es posible conseguir elementos de características adecuadas para este tipo de experiencias pero a un coste excesivo.

Por esta razón hemos optado por los termopares expuestos tipo T de 0.05 y 0.3 mm de diámetro. Estos se conectan a un sistema de adquisición de datos que barre hasta 20 canales diferentes en un sistema Fluke o bien 32 canales en uno HP5235. En el primero, la resolución del equipo es de 0.1 °C con un tiempo mínimo entre lecturas de 2.0 ± 0.01 s., un intervalo entre canales de 0.33 s, y un error de "llamada cruzada" (cross talk) entre canales despreciable frente a la precisión declarada por el fabricante para nuestras condiciones de trabajo (± 0.3 °C). Este sistema, se halla conectado a un ordenador personal que permite procesar los datos.

Con un sistema HP12321, que tiene un tiempo mínimo entre lecturas de 0.2 s. y una resolución de 0.001 °C, se consigue mejorar la precisión. El error estático para las condiciones de trabajo es de ± 0.01 °C y el error en el tiempo entre lecturas (controlado por el ordenador), puede llegar a ser menor que $1 \cdot 10^{-3}$ s. Con estos sistemas la principal fuente de error proviene del elemento sensor utilizado.

No haremos aquí un cálculo detallado de los errores dinámicos que introducen los termopares reales, debido a que éstos fueron caracterizados experimentalmente midiendo su tiempo de respuesta frente a diferentes tipos de perturbaciones. En general, para las características de los termopares utilizados aquí –en especial su pequeño diámetro todos estos tiempos resultan comparables, tal como ha sido determinado en nuestro laboratorio por el Dr. A. Garcimartín. Todos los tiempos de respuesta –independientemente del tipo de perturbación a que fueron sometidos– son menores de 0.01 s para los termopares de 0.05 mm y 0.06 s para los de 0.3 mm, de manera que la frecuencia de corte en cada caso vale 100 y 16 Hz respectivamente, valores que, resultan suficientes para las variaciones de temperaturas analizadas.

Se puede obtener una primera estimación de la perturbación hidrodinámica que introduce el termopar en el flujo, a partir del número de Froude del sistema, que es del orden de 0.006, de manera que las perturbaciones hidrodinámicas debidas a un obstáculo de las dimensiones del termopar, resultan inapreciables.

Además, la inmersión del termopar, produce la mayor perturbación al formarse un menisco en el punto en que éste atraviesa la superficie. Aunque la imagen registrada mediante la ombroscopía resulta claramente afectada por el menisco, su influencia desaparece más allá de 2 veces la longitud capilar del fluido (~ 3 mm), y no afecta a los estados dinámicos por los que atraviesa el sistema.

Para verificar que tanto el menisco como la diferente conductividad térmica de los sensores no introducía variaciones importantes en nuestras determinaciones, utilizamos el montaje presentado en la Figura II.17. Ahora el termopar de 0.05 mm se coloca entre los extremos de una horquilla de dimensiones levemente inferiores al diámetro de la celda, de forma que su efecto sobre la superficie es apenas perceptible. Colocando la soldadura del sensor en un punto donde la dirección de flujo se hace prácticamente perpendicular al calefactor, se determinó la temperatura tanto en regímenes estacionarios como dependientes del tiempo, y luego se comparó con las obtenidas en el mismo punto por inmersión. En todos los casos las determinaciones coincidían dentro del 0.5%. Esto demuestra que el menisco no influye de modo importante en la distribución de temperaturas *en el interior* del fluido.

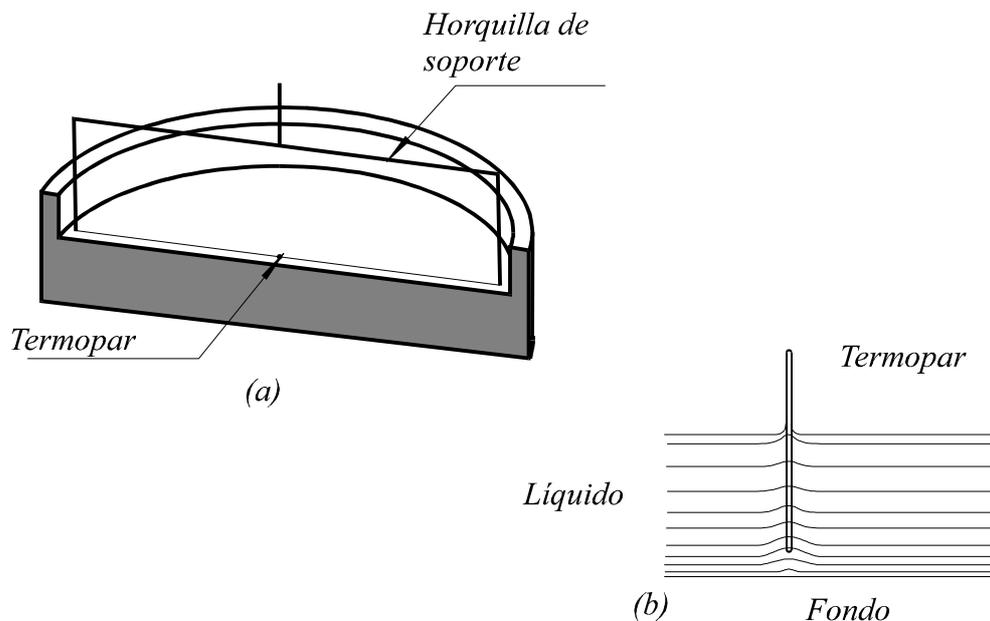


Figura II.17 Determinación de la temperatura en el interior del fluido a) Colocación del termopar y b) esquema de la perturbación sobre la distribución de temperaturas en el régimen conductivo cuando éste se sumerge.

La perturbación debida a la diferente conductividad térmica del termopar (Figura II.17.b), es la más difícil de cuantificar. Esta depende tanto de las dimensiones del termopar como de la conductividad térmica del material de que está construido, por lo que hemos preferido utilizar termopares cuyos conductores están aislados con teflón y solo la soldadura queda desnuda. Así, a partir otras experiencias realizadas por Blumröder [27] en condiciones similares, podemos afirmar que el perfil de temperatura se ve afectado en menos del 1 %.

La determinación de temperaturas en la superficie entraña un nuevo problema, pues para pequeñas profundidades de inmersión, los termopares resultan inadecuados debido al fuerte efecto del menisco. Para eliminar estos problemas, usamos sensores infrarrojos. Su uso es factible pues la emisividad de la silicona es muy alta. Su valor en función del índice de refracción n puede ser calculado como [27]:

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{4n_{\lambda}}{(n_{\lambda} + 1)^2} \quad (\text{Ec. II.12})$$

que para nuestro caso da $\varepsilon_{\lambda}=0.9719$ (a temperatura ambiente) y tiene una variación con la temperatura en el rango de trabajo de 0.16%.

Una vez calculada la emisividad, la temperatura verdadera T_v del líquido debe calcularse en función de la temperatura entregada por el detector T_l mediante la relación:

$$T_v = T_l \cdot i \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{\lambda_1-\lambda_2}}} \quad (\text{Ec. II.13})$$

donde el exponente i depende del sensor, y $\varepsilon_{\lambda_1-\lambda_2}$ la *banda de emisividad* del fluido. En general, esta banda nunca se conoce con suficiente precisión, de forma que la determinación de la temperatura verdadera es difícil, aunque se ha estimado que para el rango de temperaturas con que trabajamos [27], el error cometido es del orden del 0.1%.

Nuestras medidas fueron realizadas con un detector infrarrojo (I/R) con una respuesta espectral de 6.5 a 14 μm y un tiempo de respuesta de 0.08 s, cuya salida una tensión es igual a la de un termopar tipo T, de manera que sus registros pueden ser procesados por cualquiera de los sistemas de lectura mencionados anteriormente. La precisión de la lectura es de $\pm 2\%$ del valor nominal emisividades como las de la silicona.

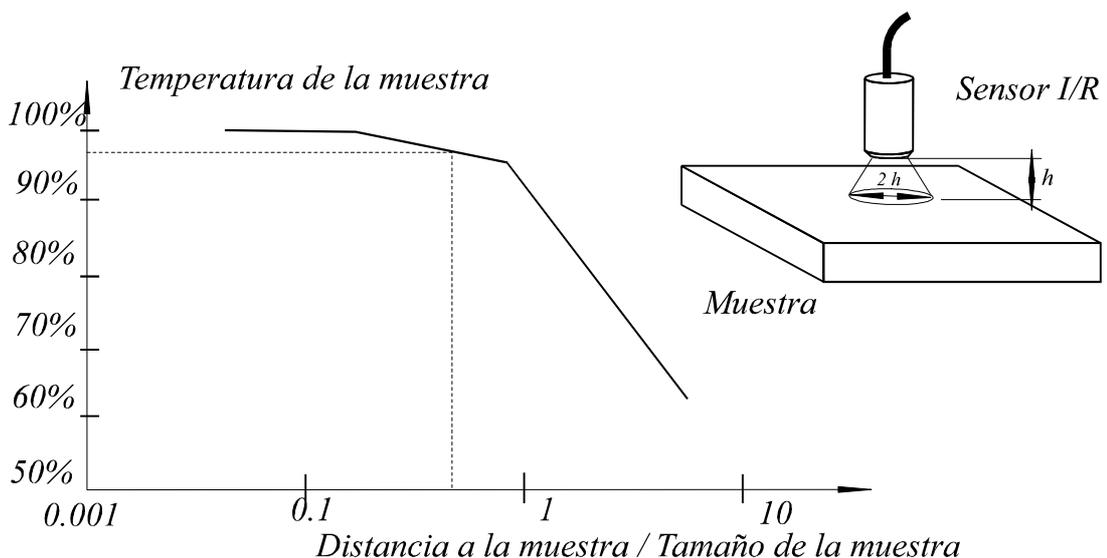


Figura II.18 Determinación de la temperatura de la superficie mediante técnicas infrarrojo.

El principal inconveniente en este tipo de detectores, es su elevado campo de integración (Figura II.18). La menor área sobre la que podemos integrar vale 12.5 mm^2 , es decir, un 0.09 % del área total de la superficie libre, de modo que la lectura que indica el I/R representa el 99 % de la energía entregada por el fluido en el área antes mencionada, y el 1 % restante lo origina el aire circundante.

Para distancias tan próximas a la superficie, la ombroscopía revela una perturbación permanente en el aire que se encuentra por encima del fluido. Sin embargo, no hemos observado ningún cambio importante en los estados dinámicos del fluido.

CAPITULO III

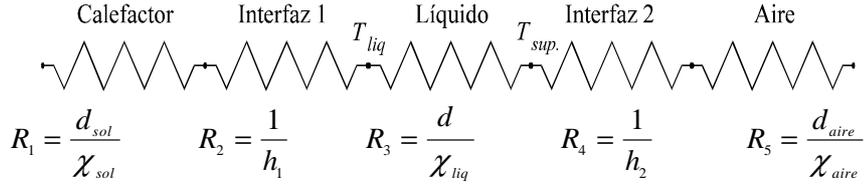
ESTADOS CONVECTIVOS INDEPENDIENTES DEL TIEMPO

La predicción de los umbrales de la convección y la caracterización de las estructuras convectivas que se forman, está restringida todavía a unos pocos casos, donde la comparación entre experimentos y modelos teóricos [28] es posible. En el caso de convección de Bénard-Marangoni, estos umbrales han sido escasamente estudiados, y aún actualmente son objeto de debate [29]. El análisis de Nield, discutido en el capítulo I, da cuenta del umbral de la convección en experimentos con tensión superficial, y pone de manifiesto la fuerte influencia que sufren estos valores, en función del acoplamiento térmico del líquido con la atmósfera, representado por el número de Biot.

A pesar de que en la mayoría de los sistemas convectivos las condiciones de contorno suponen la continuidad de la temperatura en la interfaz entre los distintos medios, se puede suponer que existe una temperatura finita entre ellos. Así, el flujo de calor ha través de la superficie libre, estará fijado por la *ley del enfriamiento de Newton*:

$$H = h(T_{\text{liquido}} - T_{\text{aire}}) \quad (\text{Ec. III.1})$$

donde el coeficiente de transporte de calor h no es realmente una constante, sino que depende de las características de los medios y también de la geometría del sistema. Para tratar este problema, resulta conveniente entonces, estudiar su análogo “eléctrico”, en forma de un circuito de “resistencias” térmicas en serie:



$$R_{total} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$$

donde d representa el espesor de cada medio, χ su conductividad térmica y h el coeficiente de Newton correspondiente a cada interfaz.

Ahora, la tensión (temperatura) en los extremos de la capa líquida, puede escribirse en función de la diferencia de tensión total aplicada (es decir de la diferencia entre la temperatura del calefactor y del aire en reposo), como:

$$T_{liq} = T_{cal} - (T_{cal} - T_{aire}) \frac{\left(\frac{d_{sol}}{\chi_{sol}} + \frac{1}{h_1} \right)}{R_{total}} \quad (\text{Ec. III.2.a})$$

$$T_{sup\ erficie} = T_{cal} - (T_{cal} - T_{aire}) \frac{\left(\frac{d_{sol}}{\chi_{sol}} + \frac{1}{h_1} + \frac{d}{\chi_{liq}} + \frac{1}{h_2} \right)}{R_{total}} \quad (\text{Ec. III.2.b})$$

De manera que aplicando la técnica de descomposición espectral recogida en el Cap. I, y teniendo en cuenta estas hipótesis sobre la interfaz del fondo, debe cumplirse para cualquier perturbación θ que:

$$\chi_{sol} D\theta_{sol} = dh_1(\theta_{liq} - \theta_{sol}) \quad (\text{Ec.III.3})$$

donde $D=d/dz$, de manera que en la capa líquida se cumple:

$$\chi_{liq} \left[\frac{\text{tgh}\left(\frac{kd_{sol}}{d}\right)}{k\chi_{sol}} + \frac{1}{h_1} \right] (D\theta_{liq})_{z=0} = (\theta_{liq})_{z=0} \quad (\text{Ec. III.4})$$

En el límite $h_1 \rightarrow \infty$ recuperamos le ecuación (Ec. I.26); sin embargo, cuando h_1 tiene un valor finito, no está garantizado que las fluctuaciones de temperatura en el fondo sean nulas, debido a la inestabilidad intrínseca del fluido en la interfaz.

Este efecto tiene consecuencias importantes sobre la interfaz de la superficie libre, pues aquí, la tangente hiperbólica de la Ec. (III.4) se hace despreciable (ajustando convenientemente el espesor de la capa de aire d_{aire}), de manera que para la interfaz con el aire se cumple:

$$(D\theta)_{sup} = \frac{h_2 d}{k_{liq}} (\theta_{liq})_{sup} = \pm Bi \cdot \theta_{sup} \quad (\text{Ec. III.5})$$

donde Bi es el número de Biot para la superficie libre, el cual depende de las condiciones particulares del experimento.

La obtención de este número a partir de primeros principios, implica resolver una ecuación integro-diferencial, que tiene en cuenta la transmisión de calor al fluido por conducción, convección y radiación, además de la disipación viscosa que aparece con el aire. No se ha conseguido hallar una solución analítica satisfactoria para este problema, también estudiado mediante una gran variedad de métodos numéricos, sin que tampoco se haya encontrado una solución aceptable (ver referencia [30] para una cuidadosa descripción de cada uno de ellos).

Por otra parte, y debido a la importancia tecnológica de este factor, existe una gran variedad de técnicas experimentales para su determinación empírica, a través de relaciones dimensionales y adimensionales. Las más comunes son:

$$h = a \left[\frac{E g \beta \Delta T}{\nu^2} \cdot \frac{\chi}{\nu} \right]^m \quad (\text{Ec. III.6.a})$$

$$h_{conv} = b \cdot \left(\frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4} \quad (\text{Ec. III.6.b})$$

$$h_{rad} = \frac{0.173 \left[\left(\frac{T_{liq}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{aire}}{100} \right)^4 \right]}{T_{liq} - T_{aire}} \quad (\text{Ec. III.6.c})$$

donde L representa la longitud característica de la superficie estudiada.

La ecuación Ec. (III.6.a), se conoce con el nombre de *ecuación de Nusselt* y es la usada más habitualmente en la literatura especializada. Los valores de los coeficientes a y m se encuentran tabulados para diferentes situaciones para valores de $Nu > 10^5$. Si bien hay coincidencia plena entre diferentes autores en el valor de m (0.25 en la mayoría de los casos), existen discrepancias de más del 100% en los valores del coeficiente a .

En la práctica la relación más utilizada para encontrar h , es la Ec. (III.6.b), donde, al igual que antes, la discrepancia en el coeficiente b es mayor del 100%. En la Ec. (III.6.c), aparece el aporte de la radiación al coeficiente h , cuyo valor resulta

despreciable para pequeñas diferencias de temperatura, pero comienza a ser preponderante cuando éstas aumentan.

Aunque los coeficientes empíricos obtenidos a partir de estas relaciones presentan una dispersión importante, nos permiten estimar que, en las proximidades del umbral de nuestro experimento $Bi \sim 10^{-3}$

Una vez encontrado el orden de magnitud del número de Biot, acudimos a la Tabla I del trabajo de Nield [5], en la que se dan los valores críticos de los parámetros adimensionales para una capa de fluido "infinita", en presencia de gravedad y tensión superficial. Estos son $Ma_c=79.991$ y $Ra_c=670.38$. En convección de Bénard-Rayleigh se ha demostrado la influencia de la relación de aspecto en los valores de los umbrales y los números de onda críticos, pero este tipo de trabajo es escaso en convección de Bénard-Marangoni [11]. Debido a que no contamos con un análisis que prediga los umbrales en las condiciones de nuestro experimento, no daremos aquí una expresión exacta de los umbrales de la convección en cada una de las situaciones experimentales. Por otra parte, no nos resulta posible alcanzar una precisión razonable en la determinación de estos umbrales, por lo cual tomaremos arbitrariamente como referencia los valores de $Ma_c=80$ y $Ra_c=670$, para conocer la distancia al umbral teórico, a través de la supercriticalidad definida como $\varepsilon = \frac{R-R_c}{R_c}$.

Discutiremos por separado los resultados obtenidos con diferentes condiciones de contorno, teniendo en cuenta estas observaciones.

III.1 Condiciones de contorno adiabáticas (celda A).

En el sistema experimental de la Fig. II.1, se colocaron 15 mm de aceite de silicona de 350 cSt cuya profundidad fue determinada con una precisión de $\pm 50 \mu\text{m}$. Se aumentó la temperatura hasta que apareciera la convección, obteniéndose el planform mostrado en la Figura III.1. La dependencia de los estados convectivos de la temperatura del calefactor puede encontrarse en las referencias [31] [32], donde se caracterizan las diferentes dinámicas que desarrolla el sistema, a partir de la información del planform. En estos trabajos sin embargo, no se discute el origen de la celdas convectivas ni sus características, las cuales describimos a continuación.

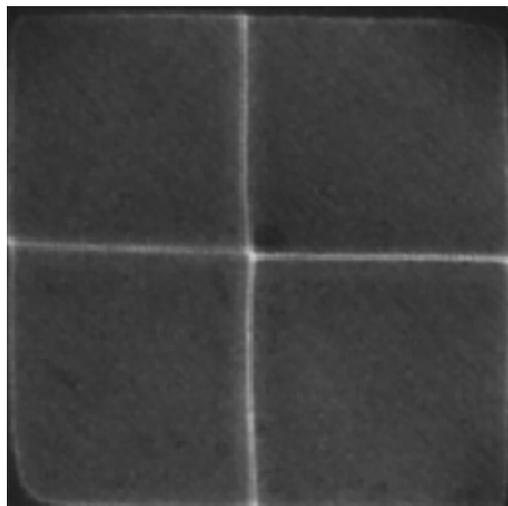


Figura III.1 Planform obtenido para $\varepsilon \approx 0.1$, en la celda con paredes adiabáticas

La estructura que se desarrolla está formada por cuatro celdas convectivas cuadradas, cuyas paredes frías coinciden con los ejes de la celda, y son perfectamente simétricas respecto al centro. Una manera altamente eficaz de verificar el perfecto nivelado del sistema consiste en comprobar que el centro del planform coincide con el centro de la celda, pues cualquier pequeña desalineación, trae aparejada un desplazamiento de la estructura convectiva, y por ende, una ruptura de simetría.

Para comenzar, estamos interesados en conocer la forma del flujo que origina estas celdas convectivas. Tal determinación, nos permitirá discriminar cual de las soluciones propuestas para la ecuación de la membrana (Ec. I.23) resulta aplicable a nuestro problema.

Según los análisis teóricos, las celdas cuadradas pueden ser interpretadas de acuerdo con Rayleigh como "...la superposición de dos partes...", de modo que la componente w de la velocidad vale:

$$w = W_0 \cdot W(z) \cdot (\cos(kx) + \cos(ky)) \quad (\text{Ec. III.7})$$

mientras que una solución igualmente válida introducida en 1940 por Pellew & Southwell tiene la forma:

$$w = W_0 \cdot W(z) \cdot \cos kx \cdot \cos ky \quad (\text{Ec. III.8})$$

La primera de la descripciones es, en palabras de E.L. Koschmieder [28], "...la más comúnmente utilizada...", y tal como este autor destaca, la preferida por los experimentales debido a que coincide con la definición arbitraria que éstos tienen sobre las "paredes" de las celdas convectivas, como la región donde la velocidad posee una única componente. Esta solución, también ha sido utilizada por otros autores para describir la dinámica observada en sistemas con pequeña relación de aspecto [11], de manera que la adoptaremos aquí para compararla con nuestros resultados. Su representación esquemática se encuentra en la Figura III.2.

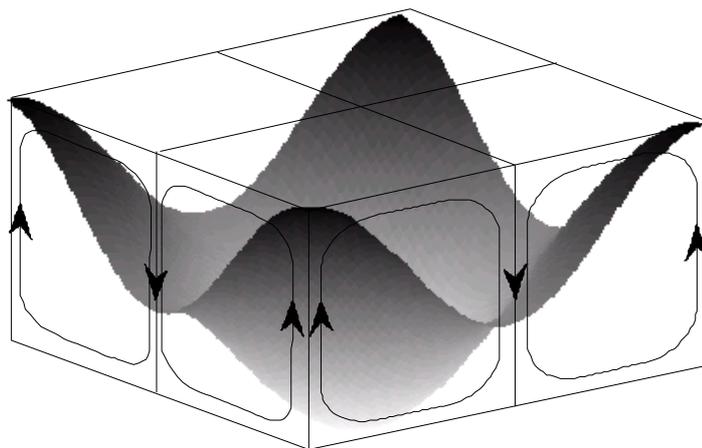


Figura III.2 Representación esquemática del perfil de velocidades de la Ec. III.7

La expresión de $W(z)$ en la Ec. (III.7) puede calcularse para condiciones de contorno compatibles con las del experimento, suponiendo que la superficie no se deforma de manera apreciable. Su expresión, es complicada por lo que no la recogeremos aquí; en su lugar, mostraremos la forma que tiene en el centro de una de las cuatro celdas convectivas (Figura III.3). Una vez conocida $W(z)$, estamos en condiciones de calcular las componentes restantes de la velocidad a partir de :

$$u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \qquad v = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$

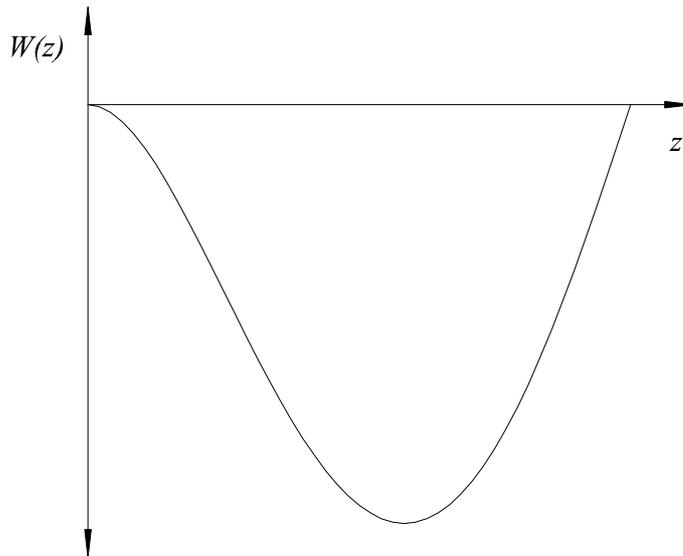


Figura III.3 Perfil de velocidades para la componente z de la velocidad w , en el centro de una celda convectiva. La elección de W_0 es arbitraria.

Para conocer entonces la forma del flujo en nuestro sistema, y decidir si resulta compatible con la solución teórica, hemos empleado la técnica de sembrado comentada anteriormente, utilizando como material trazador polvo de aluminio o silicona coloreada.

La forma del flujo en la superficie justo encima del umbral puede verse en la Figura III.4.a, mediante las trazas de las partículas de aluminio. Estas se han obtenido digitalizando la imagen y sumando cada una de las imágenes sucesivas como se hace habitualmente en las tomas de exposición prolongada, con la clara ventaja de que aquí, se pueden repetir las secuencias a diferentes intervalos de tiempo entre exposiciones, hasta obtener la imagen más adecuada. Estas trazas, se ajustan perfectamente con las halladas a partir de la Ec. (III.7), tal como puede verse en la Figura III.4.b, obtenidas a partir de ella.

Para determinar la forma de las líneas de corriente, se utilizó silicona coloreada con una cantidad despreciable de rojo Sudán que no perturba las condiciones del flujo. En primer lugar, verificamos que las gotas coloreadas colocadas sobre las diagonales de la celda, se mantienen en esta dirección, viajando hacia los vértices en la vecindad del

fondo, subiendo en la proximidad de las paredes, para luego regresar hacia el centro por la superficie. Este movimiento permanece hasta que el colorante difunde totalmente.

Además, tal como puede verse en la Figura III.4, el colorante difunde sobre la estructura de toda una celda convectiva en un tiempo aproximado de 20 minutos pero su presencia no llega a percibirse en las demás hasta pasadas más de 5 horas de su colocación.

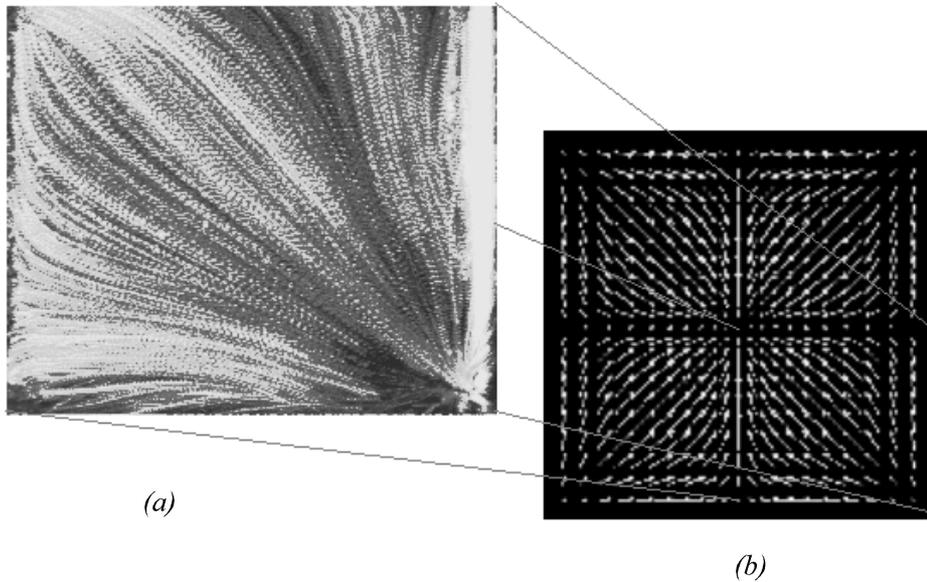


Figura III.4 a) Trazas correspondientes a las partículas que viajan sobre la superficie del fluido y b) trazas generadas a partir de la simulación de la solución Ec. III.7.

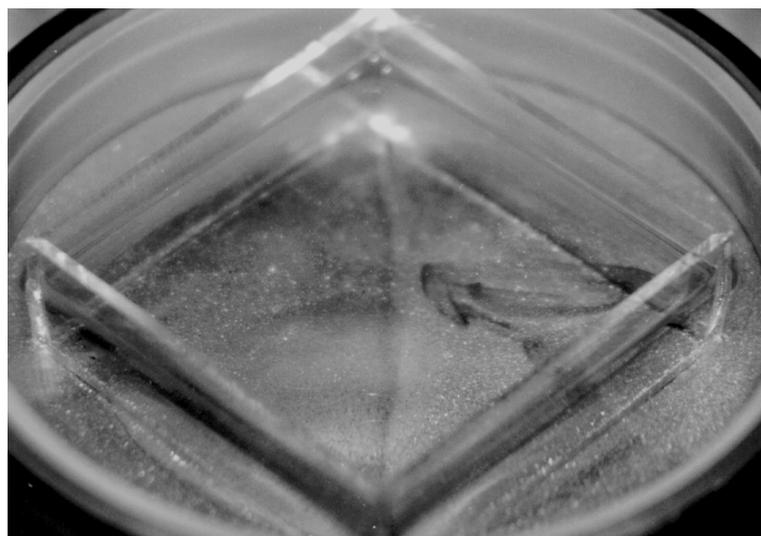


Figura III.5 Imagen del sistema cuando el colorante colocado sobre una de las diagonales ha difundido totalmente, mientras que este proceso está comenzando en la diagonal opuesta.

Para verificar qué ocurre en las líneas de corriente fuera de la diagonal, se colocó una gota de colorante justo en una de las esquinas de la celda. Allí, el trazador se dividió en dos líneas de corriente simétricas respecto a la diagonal, que evolucionaron como puede observarse en la Figura III.6.

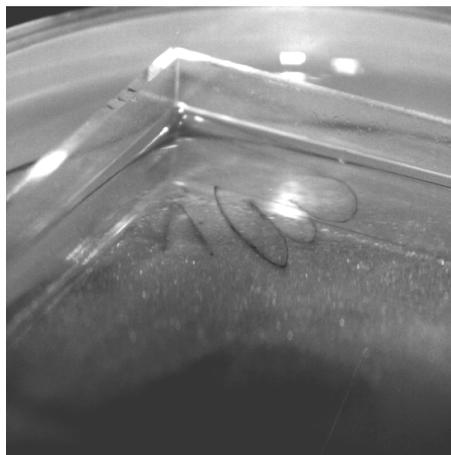
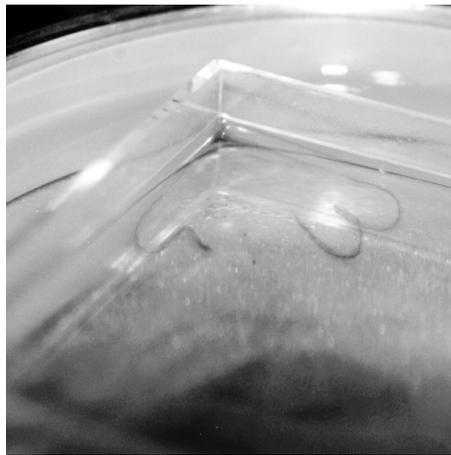
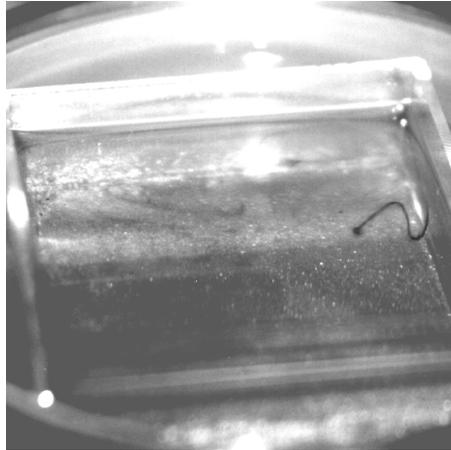


Figura III.6 Líneas de corriente correspondientes a una de las cuatro celdas convectivas en el recipiente con paredes adiabáticas. Estas corresponden a trayectorias helicoidales a medida que se desplazan hacia la diagonal del recipiente.

Se advierte en las imágenes, que una vez que el fluido alcanza las paredes frías, regresa hacia la esquina pero con una componente de velocidad perpendicular a las paredes, de manera que la vena líquida resultante tiene forma helicoidal. Este resultado, pone de manifiesto que apenas por encima del umbral, el fluido ya posee una distribución de velocidades "tridimensional".

Para confirmar la validez de la solución Ec. III.7, hemos simulado la trayectoria de una "partícula" de fluido a partir de ésta, y la hemos comparado con las imágenes anteriores. Una de las trayectorias resultantes puede verse en la Figura III.7.

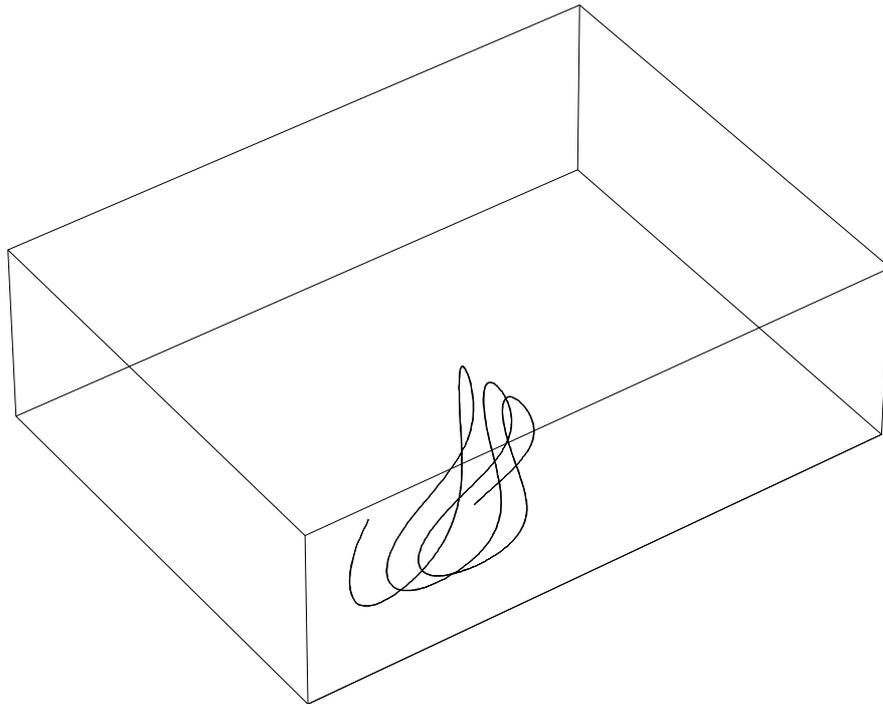


Figura III.7 Trayectoria de una partícula obtenida a partir de la Ec. III.7.

Estas trayectorias están *cualitativamente* de acuerdo con las imágenes mostradas en la Fig. III.6, lo que avala la utilización de la solución Ec. III.7

Además, hemos podido verificar mediante un pincel laser, que las deformaciones de la superficie se encuentran por debajo de $1.5 \cdot 10^{-3}$ rad, por lo que no cometemos un gran error al hallar $W(z)$ suponiendo que ésta no se deforma.

Un análisis en término de los "modos espaciales" de la ecuación de la membrana, no sólo brinda información sobre el campo de velocidades, sino también sobre la desviación de la temperatura del régimen conductivo. Resulta interesante conocer la distribución de temperaturas en el interior del fluido, y compararla con las predichas por el modelo. Para realizar esta media, se sumergen termopares en posiciones simétricas de la celda. Esto resulta adecuado sólo para zonas muy próximas a los vértices de la celda, pues el menisco que producen los termopares perturba excesivamente el planform. Para soslayar esta dificultad, se introdujeron los termopares lateralmente a través de las paredes, a 2 mm del fondo de la celda y a 10 mm de las esquinas sobre la diagonal (Figura III.8), de modo que se minimizan las perturbaciones sobre la estructura

convectiva, permitiendo conocer la temperatura en cuatro puntos del interior del fluido equidistantes entre sí.

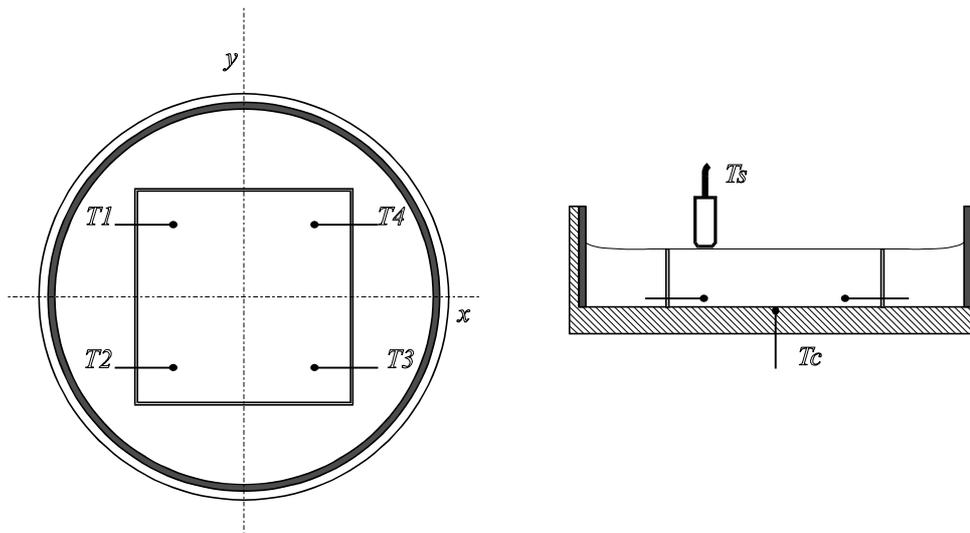


Figura III.8 Disposición de los termopares en el interior de la celda.

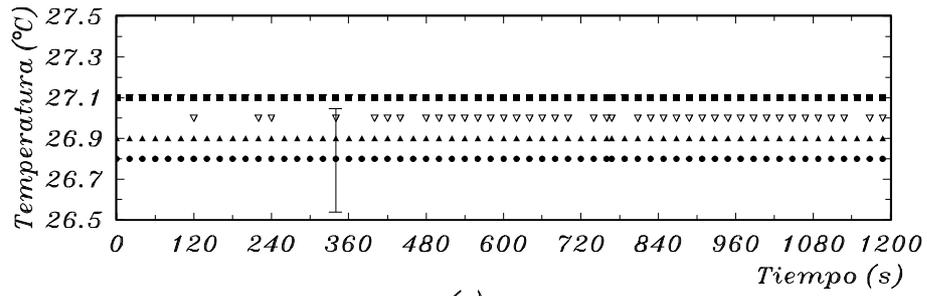
Los registros de estos termopares han de ser interpretados con sumo cuidado, debido al error que introduce en la temperatura la imprecisión debida a su posición.

Las coordenadas horizontales (x,y), pueden ser corregidas con buena precisión debido a la calidad del sistema óptico; sin embargo, la distancia respecto del fondo está afectada por un 25% de error sobre su magnitud absoluta, de forma que las lecturas de temperatura de cada uno de los sensores presentan una dispersión importante, potenciada por el hecho de que, en zonas próximas al fondo, el gradiente de temperatura es claramente no lineal y una pequeña indeterminación en la posición puede ocasionar variaciones importantes en los registros de temperatura.

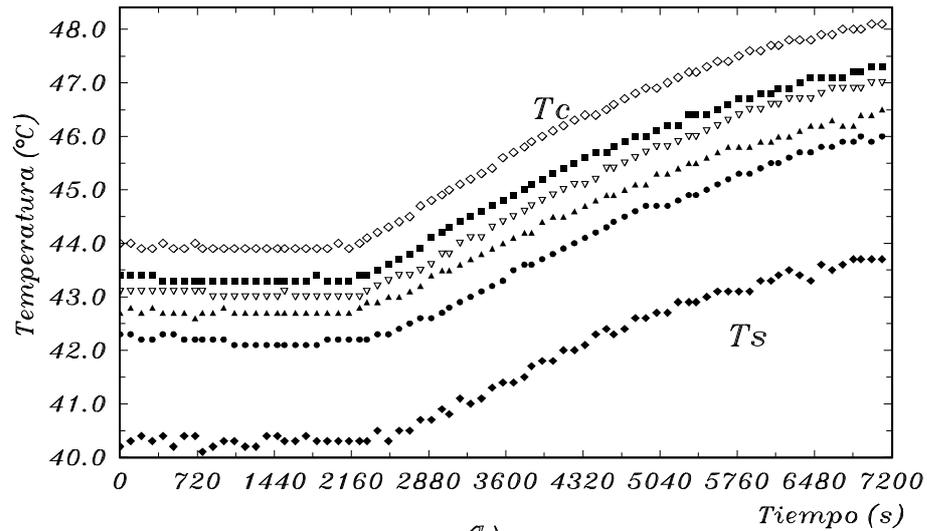
Sin embargo, y como quedará de manifiesto en las páginas siguientes, la información *cualitativa* que proporcionan estos sensores, resulta vital para la comprensión de los procesos dinámicos objeto de estudio.

En la Figura III.9.a, se aprecia que los valores de la temperatura de las celdas convectivas (T_1, T_2, T_3, T_4), son esencialmente los mismos en las proximidades del umbral, de manera que presentan la misma simetría que el planform, y están de acuerdo con los modos espaciales de la Ec. (III.7). En la Fig.III.9.b puede verse cómo responden los sensores a un escalón de temperatura del calefactor (T_c), poniendo de manifiesto que aún la temperatura medida en la superficie por un sensor infrarrojo (T_s), tiene la misma tasa de crecimiento que en las proximidades del fondo, de forma que las no linealidades de la "función de transferencia" del método de medida resultan escasamente apreciables.

Como se determinó en las referencias [31], el sistema bifurca cuando se aumenta la temperatura del calefactor a un nuevo estado estacionario con una simetría menor que en el caso anterior. Conserva las reflexiones respecto de las diagonales, pero pierde las reflexiones respecto de los ejes del cuadrado (Figura III.10).



(a)



(b)

Figura III.9 a) Temperatura medida por cada uno de los sensores próximos al fondo del recipiente. b) Respuesta a una escalón de temperatura del calefactor (T_c). (T_s indica la temperatura en la superficie del fluido medida por un sensor infrarrojo, ● = T_1 , ■ = T_2 , ▲ = T_3 , ◻ = T_4)

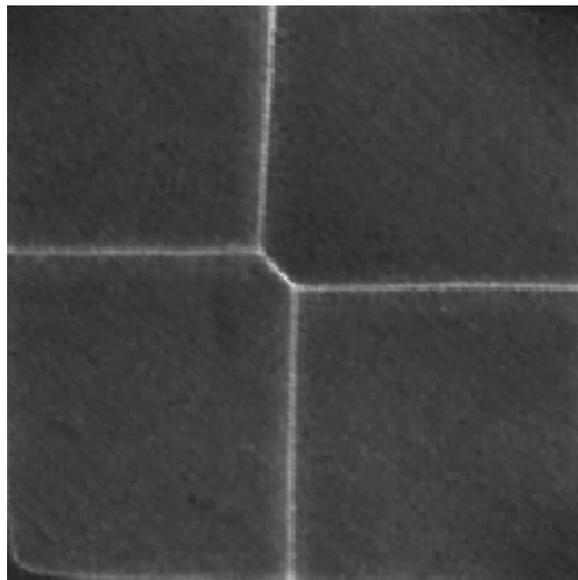


Figura III.10 Planform generado tras la primera bifurcación estacionaria del sistema. La elección de la dirección del segmento diagonal es arbitraria.

Hemos verificado que la forma del flujo en el par de celdas que conservan su forma cuadrada no resulta alterada, a pesar de su menor tamaño. Las otras dos celdas poligonales, incorporan ahora una nueva pared fría. El líquido continúa ascendiendo por las diagonales, al igual que en el estado anterior, y las líneas de corriente que se encuentran próximas a las paredes de las celdas adquieren una componente normal que las desplaza hacia la diagonal. La asimetría se manifiesta claramente en la temperatura, menor en los cuadrados –más pequeños–, que en las poligonales (Figura III.11).

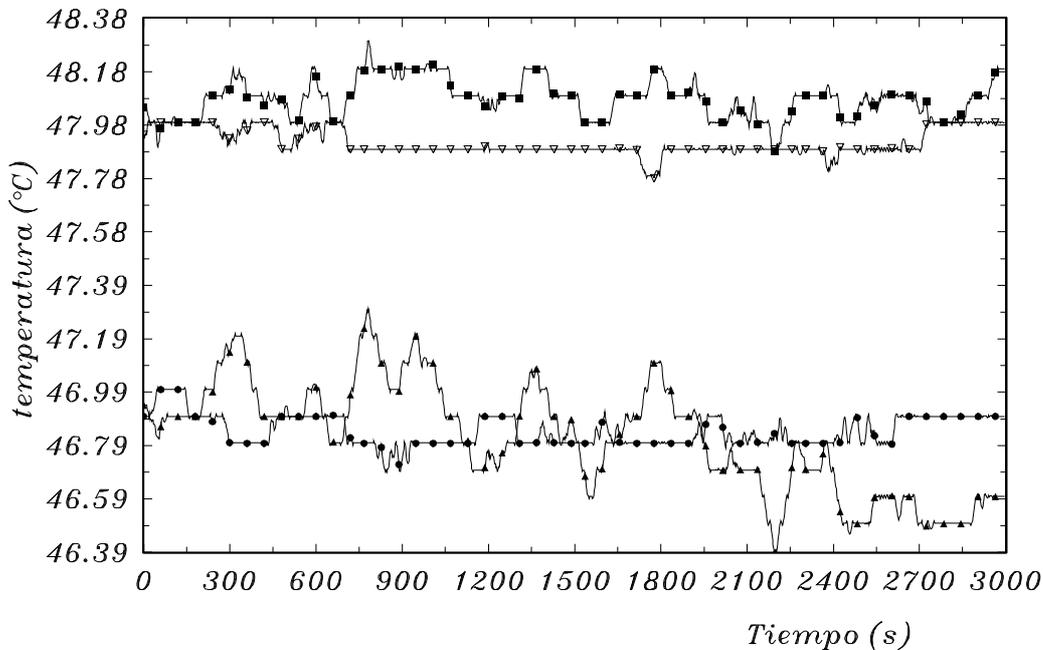


Figura III.11 Temperatura en el interior de las celdas convectivas tras la primera bifurcación del sistema. (● = T1, ■ = T2, ▲ = T3, ▽ = T4)

Por consiguiente, se puede afirmar que la ruptura de simetría del planform, es consecuencia de una *asimetría* en la temperatura dentro de las celdas convectivas. Esta *asimetría* puede asociarse a un nuevo modo espacial, que aumenta la temperatura sobre una de las diagonales mientras que la disminuye sobre la otra. Este nuevo modo se pone de manifiesto en la transformada de Fourier bidimensional (FFT) del planform correspondiente (Figura III.12). Esta presenta los modos (y sus armónicos) correspondientes al planform en el umbral (Figura III.12.a), y también el nuevo modo, con amplitud menor, justo sobre la diagonal en la Fig. III.12.b.

Un modelo que da cuenta de estas bifurcaciones ha sido desarrollado por D. Krmpotic *et al* [33]. Para un sistema cuadrado con paredes adiabáticas semejante al nuestro, se adopta como solución la Ec.(III.7), y se demuestra, utilizando las "*simetrías ocultas*" del sistema, que el responsable de la bifurcación con ruptura de simetría es un nuevo modo espacial rotado 45° respecto de los anteriores, y con el doble de longitud de onda. La concordancia entre estos resultados y los extraídos del experimento nos hacen resaltar la potencia de las técnicas implementadas en [34].

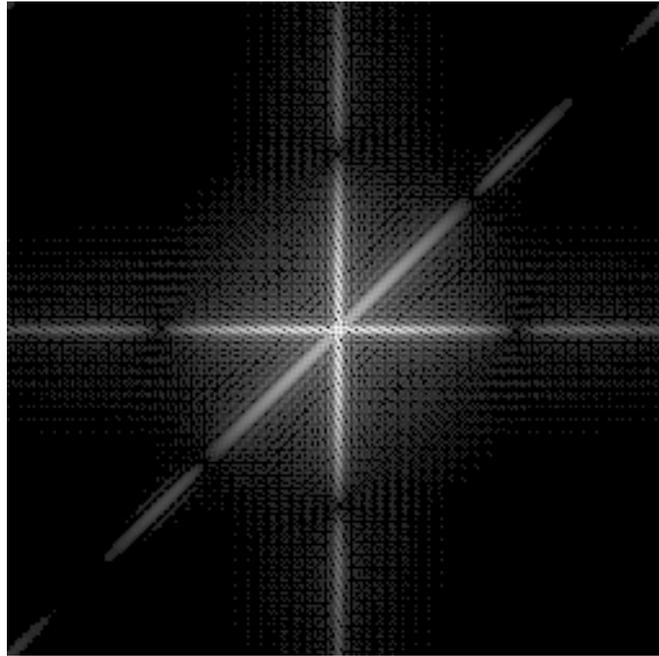


Figura III.12 FFT del planform generado tras la bifurcación estacionaria.

III.2 Calentamiento inhomogéneo (celda B).

Son muy escasos los estudios de sistemas con calentamiento inhomogéneo, tanto en pequeña como en gran relación de aspecto. La mayoría de estos trabajos – realizados en sistemas tipo Bénard-Rayleigh – están centrados en la observación de la forma de las estructuras convectivas, y del umbral de la convección.

Esos resultados han sido obtenidos para inhomogeneidades sobre la superficie de calentamiento, formando un gradiente horizontal suave y continuo. Una discusión de estos resultados puede encontrarse en la referencia [28]. En los experimentos que detallamos a continuación, no resulta correcto llamarlo calentamiento inhomogéneo, pues estrictamente hablando, se trata de una forma de calentamiento *discontinua*. Aquí, la región de calefacción *no* abarca todo el fondo de la celda, sino que está limitada a una fracción de la superficie total. Su geometría puede o no coincidir con la de las paredes y el resto del fondo está construido con un material aislante cuya conductividad térmica es mucho menor que la del calefactor.

Una disposición de este tipo ha sido utilizada por Bergé & Dubois en convección de Bénard-Rayleigh [35], para verificar las hipótesis de Landau sobre la *difusión* de los estados convectivos. En su trabajo, el calefactor se halla a una diferencia de temperatura por encima del umbral de convección (ϵ positivo), mientras que el resto no ha superado la diferencia de temperatura crítica (ϵ negativo). Los autores verifican así que los rollos *difunden* sobre la región vecina al calefactor, pero con una amplitud que decrece exponencialmente al alejarse de él.

En convección de Bénard-Marangoni, los únicos trabajos que conocemos con este tipo de calentamiento han sido realizados por Rabinovich *et al* [36], y nuestro grupo en Pamplona. En los primeros, se estudia la dependencia de la relación de aspecto –determinada respecto de la superficie del calefactor– en la formación de las estructuras convectivas o "*autoestructuras*" en el sistema y su carácter universal independiente de las condiciones de contorno. Por otra parte, los trabajos realizados en nuestro grupo [37]

[38], describen la aparición de *ondas hidrotermales* en la superficie libre y su dinámica, para distintos valores de los parámetros de control.

En los experimentos detallados a continuación, no hemos determinado con precisión el umbral de aparición de los movimientos convectivos; sin embargo, resulta interesante hacer algunas observaciones sobre el comienzo de la convección.

No existe un tratamiento teórico en que se determine la diferencia de temperatura necesaria para que se desestabilice el régimen conductivo "inhomogéneo". Aquí, al efecto desestabilizante de la estratificación de la densidad, hay que sumarle ahora la inestabilidad *horizontal*, producto de la fuerza termogravitatoria que se origina por la diferencia de temperatura horizontal. Una gota de fluido sobre el borde del calefactor estará sometida a una presión hidrostática menor que una vecina sobre el fondo aislante, donde el calentamiento se debe sólo a la difusión lateral. El gradiente de presión originado así sobre la horizontal tiende a generar una circulación del líquido como la mostrada en la Figura III.13.

En *ausencia de tensión superficial*, esta circulación tiene un efecto estabilizante, pues la mala conductividad térmica del aire hace que el gradiente vertical disminuya, originando un *aumento* en la diferencia de temperatura del umbral. Sin embargo, la variación de la tensión superficial con la temperatura da lugar a una *realimentación positiva* del efecto termogravitatorio. El aumento de la temperatura en la región central de la celda, genera una fuerza termocapilar que se suma a la termogravitatoria, de manera que la presencia de estas dos causas desestabilizantes propician una disminución en la diferencia de temperatura crítica.

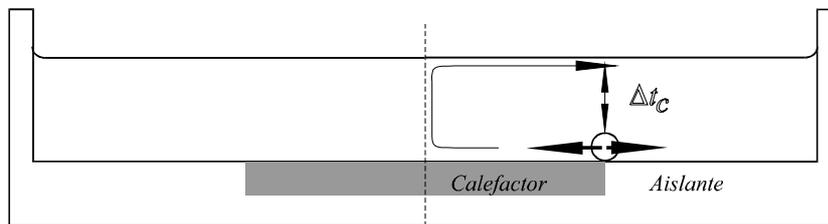


Figura III.13 Representación esquemática de la circulación del fluido en el umbral de la convección.

Según el análisis de Nield, en un sistema con 15 mm de profundidad y con relación de aspecto infinita, esta diferencia vale $0.67\text{ }^{\circ}\text{C}$, mientras que en nuestro caso, diferencias de temperatura por debajo de los $0.3\text{ }^{\circ}\text{C}$ bastan para poner en movimiento el fluido. El flujo, una vez transcurrido el transitorio de formación, depende de las diferentes simetrías de las paredes y el calefactor. Debido al efecto termogravitatorio en la frontera del calefactor, las líneas de flujo ingresan en la región de calefacción según una dirección perpendicular a los límites del cuadrado (Fig III.14), de manera que su velocidad en cada cuadrante es esencialmente paralela a los ejes. En su viaje hacia el centro, estas líneas "colisionan" sobre las diagonales y comienzan a ascender a medida que viajan hacia el centro de la celda. En el centro se encuentran con las líneas que viajan sobre los ejes y el fluido se desplaza sólo en la dirección z . Este comportamiento, origina una distribución de índices de refracción rápidamente identificable mediante ombroscopía (Fig. II.14.b), donde las regiones oscuras sobre las diagonales indican el descenso brusco del índice de refracción.

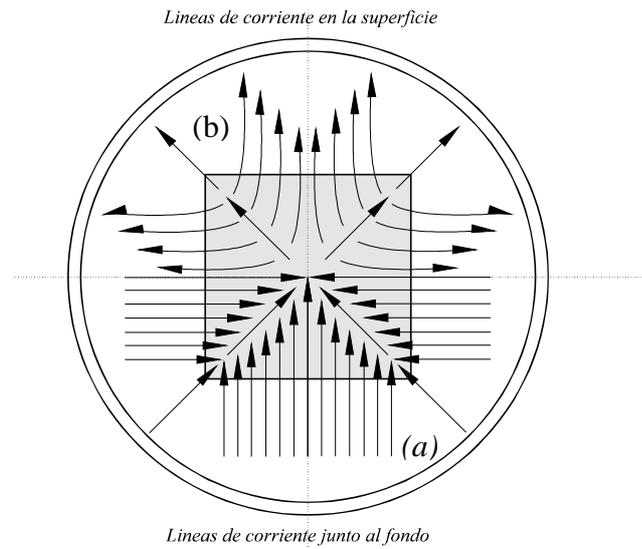


Figura III.14. Representación esquemática de las líneas de flujo que (a) viajan hacia el centro por debajo, y (b) se alejan de él sobre la superficie.

El flujo regresa hacia las paredes por una delgada región adyacente a la superficie, la cual se deforma como consecuencia del empuje del líquido que asciende. En el centro, esta deformación es prácticamente el doble que sobre las diagonales. El planform que obtenemos de la superficie mediante la ombroscopía puede verse en la Figura III.15.

o

Figura III.15 Ombroscopía de la deformación de la superficie.

Hay que tener cuidado al interpretar estas imágenes, pues usualmente, las líneas claras originadas por las ombroscopías corresponden a regiones del sistema donde el líquido desciende, lo que no ocurre aquí. La imagen de la Fig. III.15 representa la deformación de la superficie, y no un gradiente de índices. Las líneas claras dan cuenta ahora de pequeñas depresiones que rodean las zonas donde la superficie se eleva.

En efecto, mediante el pincel laser se determinó que las protuberancias del líquido ascendente, están rodeadas por una pequeña depresión, que originan los trazos brillantes visibles mediante la ombroscopía. A partir de los perfiles obtenidos en diferentes direcciones, reconstruimos la forma de la superficie, y simulamos numéricamente la imagen que se genera en el infinito al iluminarla con un frente de luz plano desde arriba. En la Figura III.16, pueden verse el centro de la ombroscopía y la imagen reconstruida numéricamente.

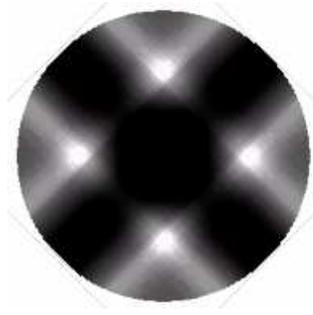


Figura III.16 a) Perfil de la superficie generado con el pincel laser según uno de los ejes de la celda. b) Imagen reconstruida numéricamente a partir de la forma de la superficie.

La forma de las líneas de corriente en las proximidades de la superficie pueden ser fácilmente interpretadas en función de un *análogo eléctrico* []. Dado que en esta región las líneas de corriente son esencialmente *planas*, podemos suponer que el campo de velocidades se deriva de una función "potencial velocidad" $\Phi(x,y)$, de manera que las componentes de la velocidad sobre la superficie estarán relacionadas con ella mediante las ecuaciones:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} , \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} , \quad w \equiv 0 \quad (\text{Ec. III.8})$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, deducimos que la función $\Phi(x,y)$ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Phi(x,y) = 0$, análogamente al *potencial eléctrico* de una distribución de cargas estáticas. Las líneas de corriente coinciden con las del campo eléctrico y las equipotenciales las podríamos llamar "equipotenciales de velocidad".

En nuestro caso, el fluido llega a la superficie por las diagonales de manera que la distribución de cargas correspondiente forma un diedro. Si suponemos que ésta distribución es uniforme y del mismo signo, el problema es sencillo de resolver. Las líneas de campo resultantes son hipérbolas, lo mismo que las equipotenciales, de manera que la trayectoria del fluido en la superficie tiene forma de hipérbola, como los frentes equipotenciales. En la Figura III.14 se han representado las líneas de flujo obtenidas a partir de una gota de silicona coloreada, colocada en el centro de la celda. El frente de colorante – las líneas de flujo son perpendiculares a él– coinciden casi exactamente en su forma con la solución del problema eléctrico por métodos numéricos.

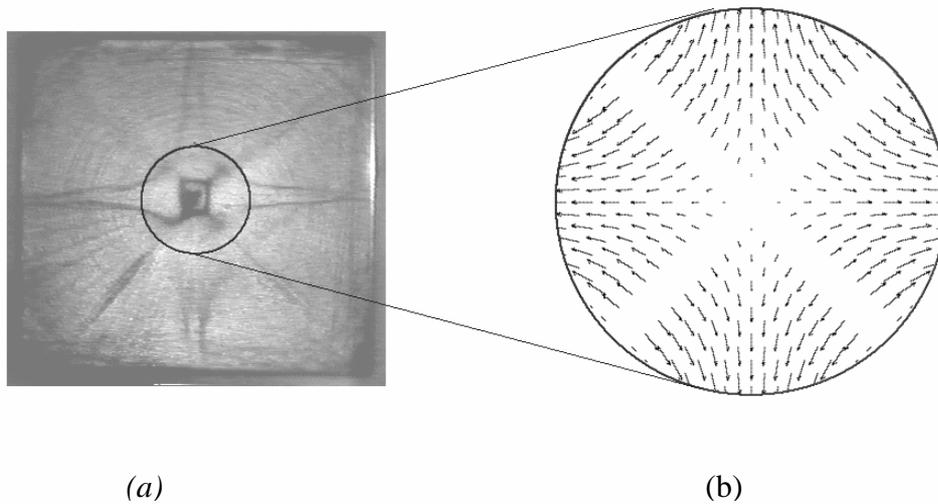


Figura III.17 a) Líneas de corriente próximas a la superficie, observadas usando silicona coloreada b). Representación obtenida a partir de la analogía electromagnética de las líneas de flujo.

La diferente simetría entre el calefactor y las condiciones de contorno tiene, por tanto, una consecuencia importante: “*el flujo justo encima del umbral de aparición de la convección es tridimensional*”, (excepto sobre los ejes, donde las líneas de flujo se mueven sobre un mismo plano). El sistema está formado por cuatro *celdas convectivas*, como las esquematizadas en la Fig. III.15. Las paredes coinciden con las diagonales, y están formadas por fluido que asciende al contrario de lo que sucede en calentamiento homogéneo. Además, estas paredes son incompletas, pues el líquido comienza a ascender cuando ha penetrado unos 10 mm en la región del calefactor. Hemos verificado también, que no existe prácticamente difusión lateral de masa a través de estas paredes en el régimen estacionario.

Para estudiar la forma del flujo, inyectamos una pequeña cantidad de trazador de polvo de aluminio, iluminado mediante un pincel laser, y las trayectorias se obtienen mediante el tratamiento de exposiciones múltiples comentado anteriormente. Estas trayectorias se muestran en la Figura III.18. En ellas, puede apreciarse que el líquido que viaja a lo largo de las diagonales, sube a lo largo de todo su recorrido, mientras que el que viaja por los ejes se comporta como un gran rollo, y sólo asciende en la zona central. La región central, por donde el movimiento del líquido es casi puramente ascendente, coincide con el cuadrado central del planform mostrado en la Fig III.15. Un detalle sobre el que volveremos más adelante, es la presencia de un pequeño *torbellino* o *rulo* en las inmediaciones de la zona central, para valores suficientemente alejados del umbral de la inestabilidad.

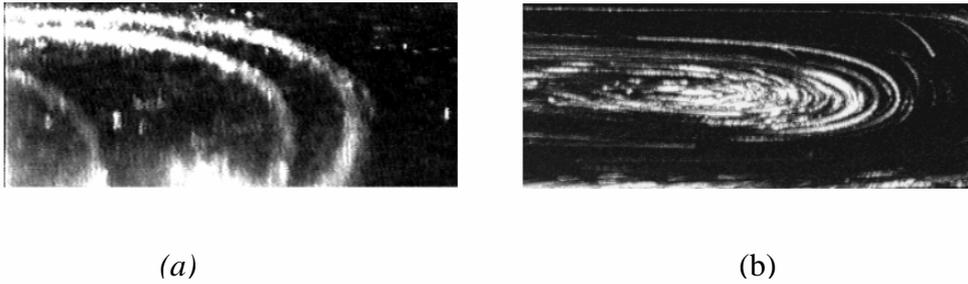


Figura III.18 Perfil de velocidades obtenidos mediante la técnica de sembrado. a) Plano sobre uno de los ejes y b) sobre una de las diagonales.

Hemos determinado también la velocidad *media* del fluido a diferentes alturas, midiendo la velocidad de varias partículas entre dos puntos separados 10 mm, y promediando. Estos perfiles de velocidad se han representado en la Figura III.19. Se han graficado los valores *medios* de la velocidad acompañados del mejor ajuste en cada uno de los casos. El primero (Fig. III.19.a) es cuadrático, mientras que en el segundo, el mejor ajuste es cúbico.

Este hecho coincide muy bien con un trabajo de D. Villers & Platten [], quienes demuestran que un perfil de velocidades dominado por los efectos termogravitatorios tiene la forma:

$$v = \frac{g\alpha}{\nu} \frac{\partial T}{\partial z} d^3 \frac{1}{24} (4z^3 - 3z^2 - 6z + 1) \quad (\text{Ec. III.9})$$

mientras que, cuando dominan los efectos termocapilares se tiene:

$$v = -\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{d}{\nu \rho} \frac{1}{8} (3z^2 + 2z - 1) \quad (\text{Ec. III.10})$$

A partir de estas expresiones y nuestros ajustes, podemos decir que, en las zonas de la celda próximas a las diagonales domina la distribución de velocidades la flotabilidad, mientras que sobre los ejes, los perfiles coinciden muy bien con una distribución de velocidades dominada por la termocapilaridad.

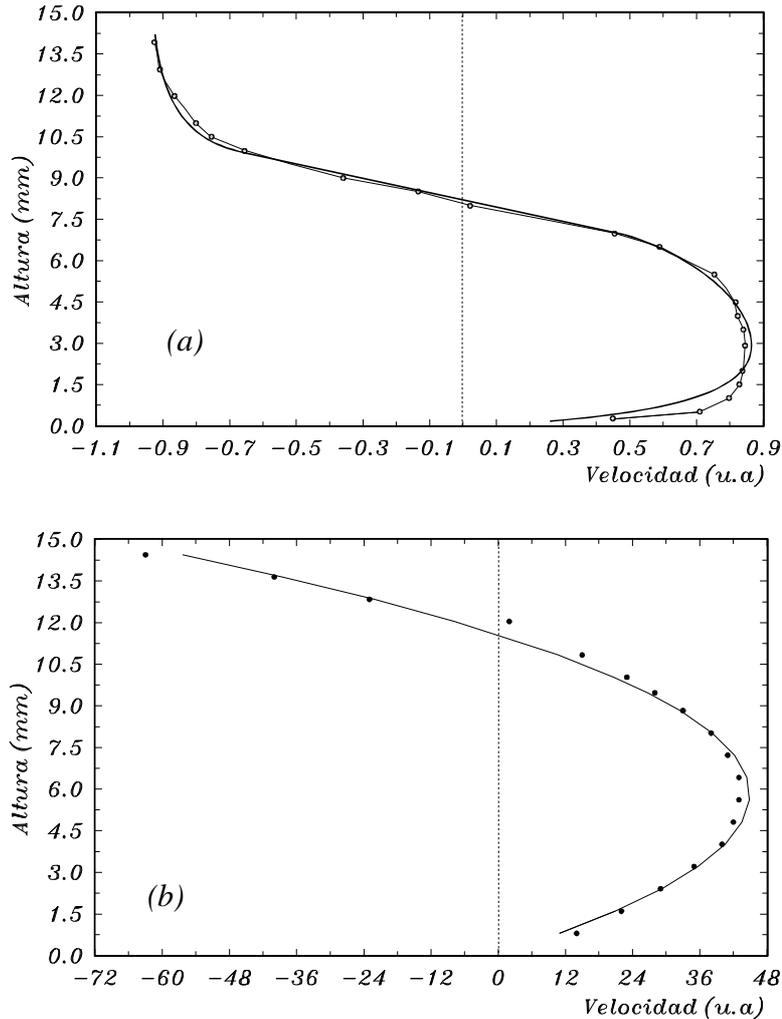


Figura III.19 Perfiles de velocidad correspondientes a dos direcciones diferentes de la celda. a) Sobre uno de los ejes y b) sobre una de las diagonales.

Una vez conocida la forma del flujo y su perfil de velocidades, medimos el perfil de temperaturas en la dirección vertical para valores del parámetro de control alejados del umbral ($\varepsilon \approx 14$), pero aún dentro del régimen estacionario. Las posiciones elegidas a lo largo de uno de los ejes de la celda son: a) el centro, b) la mitad del calefactor y c) fuera de la zona de calefacción. En cada una de ellas, la determinación se ha realizado sumergiendo un termopar, mediante un micrómetro con una resolución de $1\text{ }\mu\text{m}$. En las proximidades del fondo, se determinó la temperatura cada $0,1 \pm 0,01\text{ mm}$ debido al fuerte gradiente en esta zona, mientras que para profundidades menores, la determinación se realizó cada 10 mm .

En el perfil correspondiente al centro de la celda (Figura III.20), destacan dos aspectos: 1) en las proximidades del fondo existe una *inversión* en la forma del gradiente térmico, y 2) por encima de los 10 mm el perfil deja de ser una función suave y presenta fuertes variaciones.

La inversión del gradiente en el fondo de la celda podría ser debida a que el punto de máxima temperatura del fluido coincide con las coordenadas donde las líneas de flujo se aproximan asintóticamente. Existe en esta región, una pequeña cantidad de fluido que queda *atrapada* en la singularidad de las líneas de corriente que llegan desde

los lados: este líquido se encuentra prácticamente en reposo respecto del resto. Este efecto, que se pone fácilmente de manifiesto con una pequeña cantidad de polvo de aluminio, ya fue comentado en su trabajo por Henri Bénard.

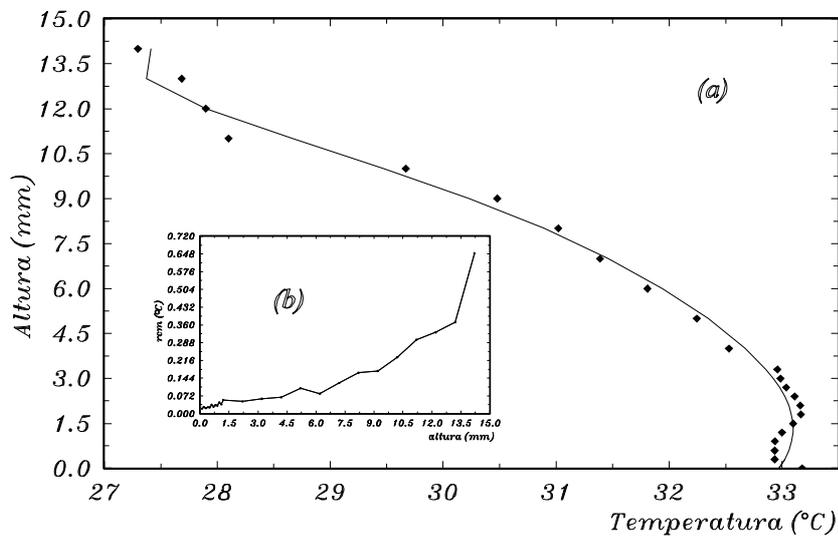


Figura III.20. Perfiles de temperatura en la dirección vertical dentro del fluido en el centro de la celda. (b) Raíz cuadrática media de las fluctuaciones de temperatura.

Las irregularidades del perfil más allá de los 10 mm tienen un origen similar, pues cuando el fluido asciende también aparece una pequeña región –sobre el centro– de similares características a las del fondo. En esta región, la líneas de flujo se separan de la vertical rápidamente, razón por la cual la raíz cuadrática media (rcm) de las variaciones de temperatura crecen de manera importante, como puede verse en la Fig. III.20 b. Las perturbaciones introducidas por el método de medida en esta zona son apreciables, pero la forma cualitativa del perfil es, sin duda, correcta. Sobre las diagonales, en cambio, las perturbaciones resultan demasiado importantes, razón por la cual no se presentan medidas de esa zona.

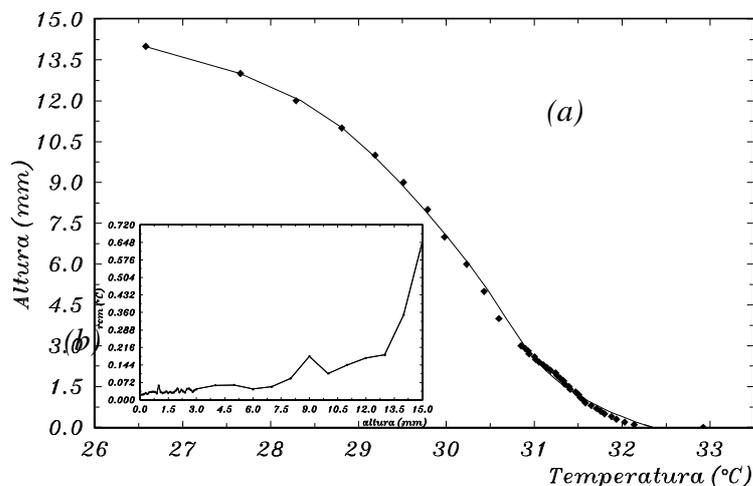


Figura III.21.(a) Perfiles de temperatura en la dirección vertical dentro del fluido a 20 mm del centro. (b) Raíz cuadrática media de las fluctuaciones de temperatura.

En la Figura III.21.a puede verse el perfil de temperatura en la dirección vertical, medido a 20 mm del centro. Su forma en las proximidades de la superficie resulta armónica con el resto, al contrario que en el caso anterior. El mejor ajuste se consigue con un polinomio de grado cinco, que coincide muy bien con la expresión sugerida en la Ref. [] para un flujo convectivo de origen *termocapilar*. En la Fig. III.21.b, puede comprobarse como la rcm de la temperatura en el punto más próximo a la superficie tiene el mismo valor que para el perfil en el centro, pero decae rápidamente a medida que se acerca al fondo. El pico que presenta alrededor de los 9 mm, se debe a que en esa zona la velocidad invierte su signo y resulta más inestable.

Este perfil de temperatura, puede ser comparado ahora con el de velocidades presentado en la Fig.III.19.a, medido en las mismas coordenadas. El número de Reynolds para esta distribución vale aproximadamente 0.2. Hemos tomado el espesor de la capa límite viscosa, como la posición en z donde la velocidad (calculada mediante el mejor ajuste) alcanza su máximo $\delta(z)=37.5\text{mm}$. Con este valor, estimamos el espesor de la capa límite térmica δ_θ , a partir de la expresión []:

$$\begin{aligned} \delta(z) &\approx \sqrt{\frac{\nu x}{U}} & \delta_\theta(z) &\approx \sqrt{\frac{\kappa x}{U}} \\ \left(\frac{\delta_\theta}{\delta}\right)^3 &\approx \frac{\kappa}{\nu} & \frac{\delta_\theta}{\delta} &\approx \sqrt[3]{\frac{1}{\text{Pr}}} \end{aligned} \quad (\text{Ec. III.11})$$

donde U representa la velocidad característica del fluido.

El espesor que resulta de la Ec. (III.11) vale $\delta_\theta \approx 0.3 \text{ mm}$, y coincide muy bien con el obtenido a partir del perfil de temperaturas (Figura III.22) como la coordenada donde se cortan las tangentes del perfil sobre el punto de inflexión y el calefactor.

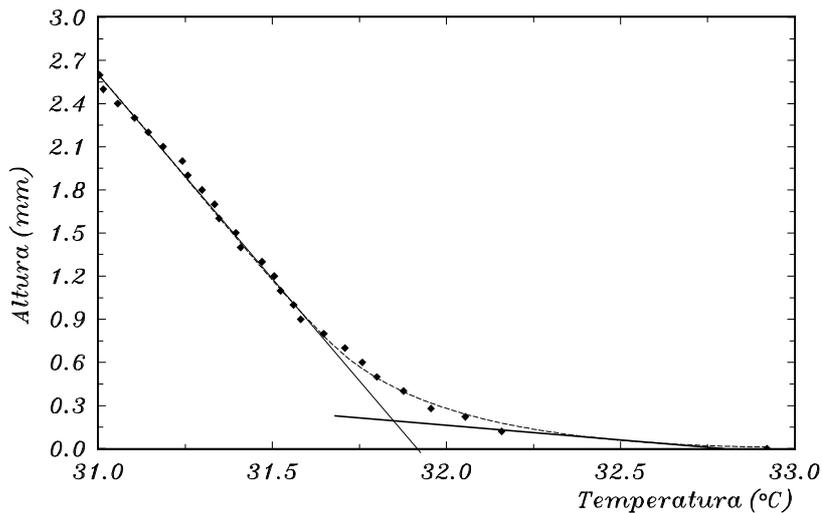


Figura III.22. Detalle del perfil de temperatura en las proximidades del fondo.

La forma del perfil de temperatura en la zona sin calefacción (Figura III.23), es suave en las proximidades del fondo, y coincide muy bien con los obtenidos en calentamiento lateral [41][42].

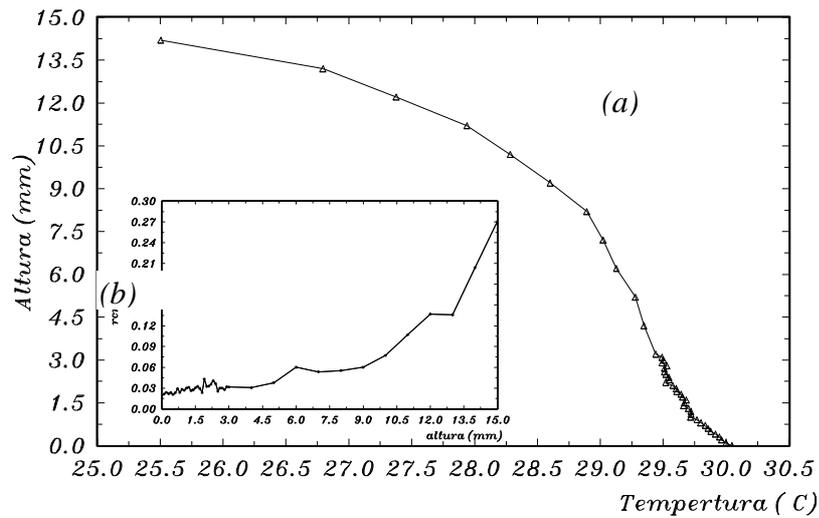


Figura III.23. Perfiles de temperatura en la dirección vertical dentro del fluido en la región sin calefacción y. (b) Raíz cuadrática media de las fluctuaciones de temperatura.

Conocidos los perfiles en el interior del fluido, determinamos también la forma del perfil de temperaturas sobre la superficie. Para ello, utilizamos un sensor infrarrojo, y lo desplazamos según dos direcciones: a) las diagonales y b) los ejes. Estos perfiles pueden verse en la Figura III.24. El perfil de la Fig. III.24.a corresponde a la dirección diagonal y el de la Fig. III.24.b a uno de los ejes. Su forma son una prueba más del carácter *termocapilar* del flujo a lo largo de los ejes —esencialmente lineal lejos del centro y las paredes—, y *termogravitatorio* según las diagonales.

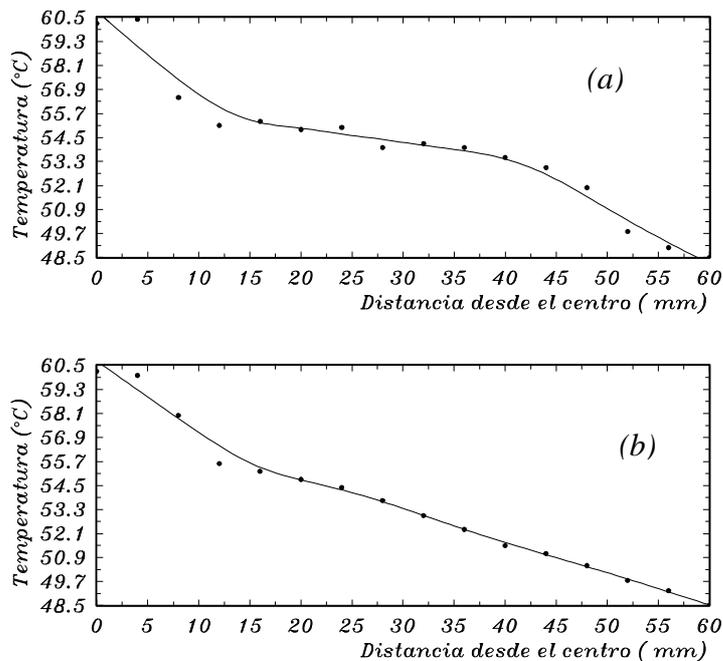


Figura III.24. Perfiles de temperatura sobre la superficie a) según la dirección diagonal, b) según uno de los ejes.

III. Transitorio de formación

Si bien nuestra atención en adelante estará centrada en estados bastante alejados del umbral, la transición desde el estado conductivo hasta el régimen convectivo estacionario es un problema arquetípico de las inestabilidades convectivas. La capa límite en las proximidades del calefactor, cuya densidad es menor que la inmediatamente superior, puede ser compensada por la difusión de densidad y momento; sin embargo, esta situación –claramente inestable– termina por cambiar *bruscamente*, dando lugar a movimientos convectivos. Este mecanismo resulta muy general, y en la actualidad se considera responsable de algunas características de los estados turbulentos.

Para determinar las características de esta "*capa límite térmica*", se hace necesario estudiar como nuestro sistema pasa del reposo a la convección.

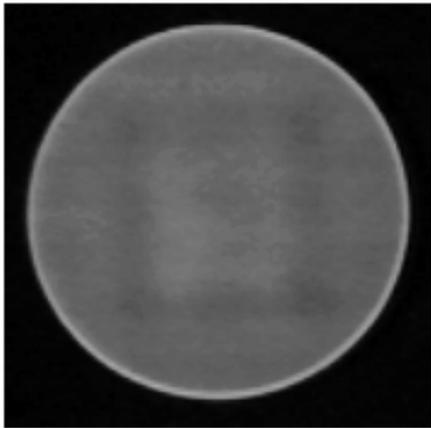
No existen en la literatura muchos trabajos que aborden el desarrollo temporal de los estados convectivos hasta alcanzar el régimen estacionario [43][44], y sus conclusiones pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. El nacimiento de la convección está asociada a un cambio brusco en el número de Nusselt de la capa de fluido.
2. La estructura convectiva desarrollada inicialmente no coincide, en la mayoría de los casos, con aquella que finalmente es alcanzada en el estado estacionario.
3. Existe una fuerte dependencia con las características del ruido que perturba el sistema.

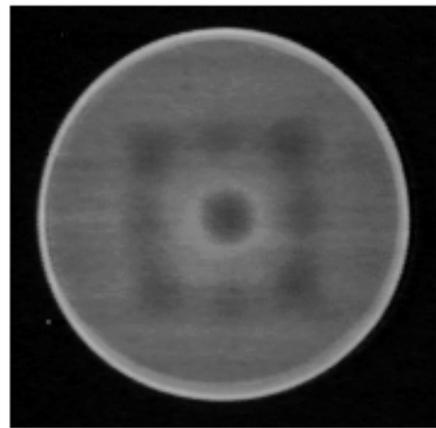
En la Figura III.25, puede verse la manera en que el sistema llega al régimen estacionario (para la celda B). La inestabilidad aparece aquí sobre los límites del calefactor, lo cual no es de extrañar debido a que por las condiciones mecánicas de la celda es imposible garantizar un bajo nivel de ruido en esa zona del calefactor. Hay que resaltar la *simultaneidad* con que aparecen las primeras *plumas* en cada una de las esquinas, e instantes después, en los lados de la celda.

Cuando las plumas llegan a la superficie, se desplazan rápidamente a lo largo de los ejes de la celda, hasta generar un planform *cuadrado*, que describe pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio. Sin embargo, debido al efecto de la tensión superficial, este estado resulta inestable, y, forzada por el líquido que regresa desde la zona sin calefacción, la región central se encoje, hasta desaparecer.

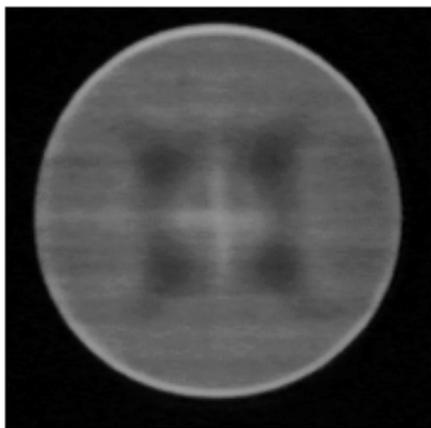
En la Figura III.26, se muestra con más detalle el planform correspondiente al estado cuasiestacionario formado por la *celda convectiva* central. Hemos comprobado que éste depende fuertemente de la rampa de temperatura aplicada al calefactor. Nunca hemos obtenido un transitorio, en el que el líquido comience a ascender por el centro del calefactor en lugar de por los costados. Tal comportamiento, ha sido reportado por A. Garcimartin [37] en un sistema con calentamiento inhomogéneo similar al detallado aquí, pero con un calefactor circular en lugar de cuadrado. Si la rampa de calentamiento es suficientemente suave es posible hacer que la convección aparezca simultáneamente en el centro y los bordes de la celda.



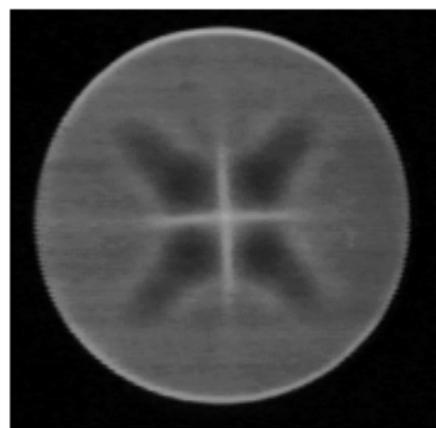
(a)



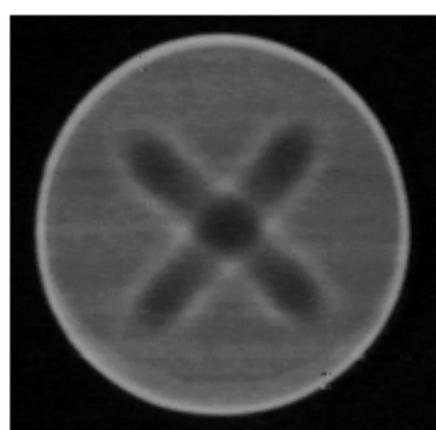
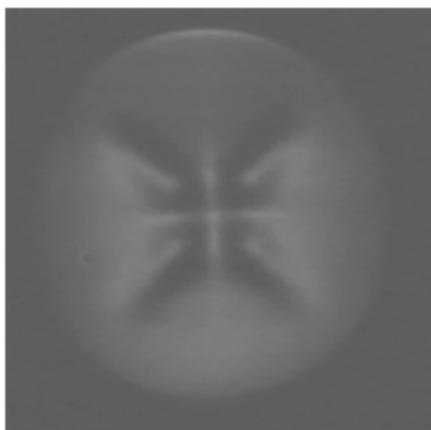
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura III.25 Transitorio de formación de la estructura convectiva.

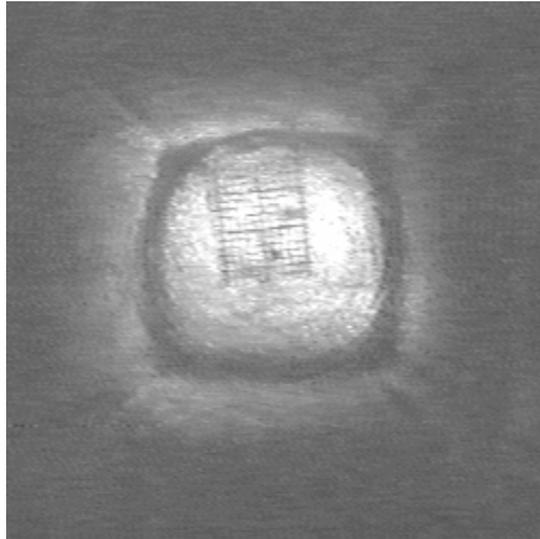


Figura III.26 Detalle de la zona central del transitorio de formación.

Para estudiar el desarrollo temporal y la forma del transitorio, utilizamos la celda cuadrada detallada en el Cap. II (Celda C), que permite observar lateralmente el flujo utilizando polvo de aluminio y el pincel laser. En esta celda las perturbaciones en la periferia del calefactor son menores, pues su ajuste con el resto del fondo es perfecto y, aunque la simetría del calefactor coincide con la de las condiciones de contorno, no aparecen variaciones importantes en los estados que esperamos observar. En la Figura III.27, puede verse el transitorio de formación. Este consiste en estructuras tipo plumas, que nacen en la periferia de la celda y que al llegar a la superficie se desplazan rápidamente hacia un estado de cuasiequilibrio, para colapsar finalmente en el centro de la celda, dando paso así a la estructura estacionaria.

El origen de estas estructuras en un sistema de Bénard-Rayleigh, fue descrito en 1967 por J. Elder [], en términos de una *proto-cap*a adyacente al calefactor que almacena energía, hasta que el ruido la desestabiliza, dando lugar al desprendimiento de estructuras localizadas como las plumas. El mismo autor, corroboró sus hipótesis en celdas de Hele-Shaw, pero hasta ahora que sepamos no se habían observado en sistemas convectivos en tres dimensiones.

Si al aplicar la diferencia de temperatura aparece una capa de fluido caliente de espesor $\delta(t)$, se puede demostrar (utilizando la representación espectral para la perturbación de la temperatura y de la velocidad), que el tiempo crítico para que la capa se rompa está dado por:

$$t_c = \frac{1}{4\alpha^2} \left[\frac{Ra_c}{Ra} \right]^{2/3} \quad (\text{Ec. III.12})$$

donde α representa un factor numérico que vincula ese espesor δ con la forma instantánea del perfil de temperatura para el caso conductivo $\theta_{\text{cond.}} = \text{erfc}(z/\sqrt{\kappa t})$

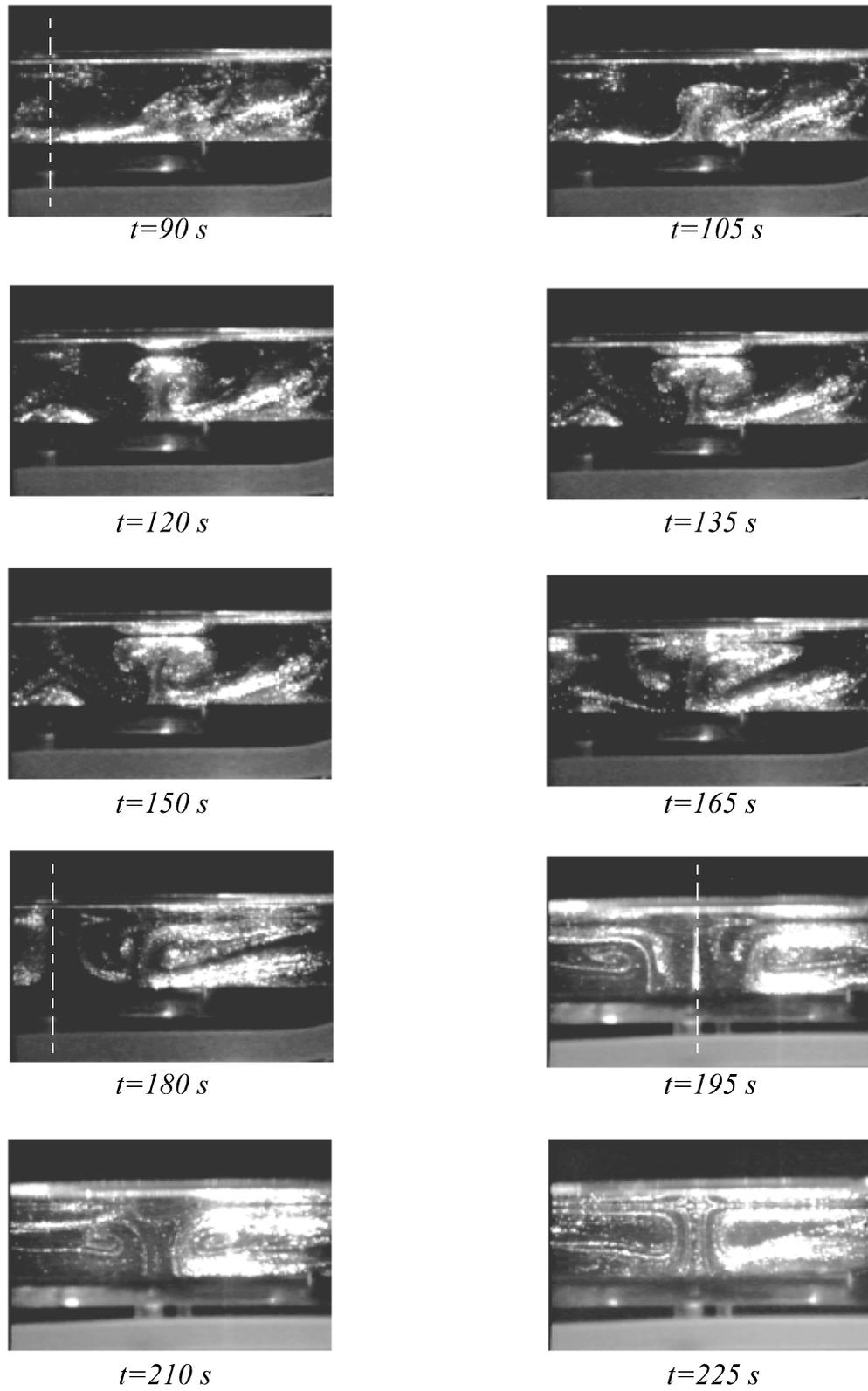


Figura III.27 Transitorio de formación observado lateralmente para la celda de la Fig. II.3.

Los resultados de este modelo coinciden muy bien con los obtenidos numéricamente a partir de las ecuaciones perturbadas de Navier-Stokes. La Figura III.28 –obtenida numéricamente por J. Elder [–] muestra el crecimiento de las perturbaciones; el cambio brusco en su pendiente indica el momento en que comienza la convección.

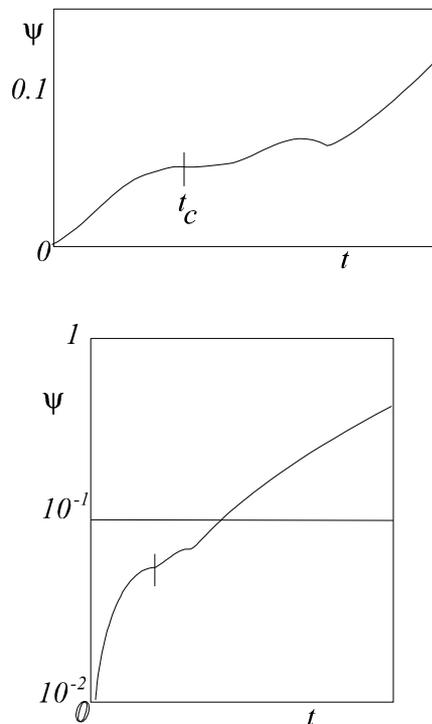


Figura III.29 Crecimiento de la perturbación de la temperatura en función del tiempo [Extraído de la referencia].

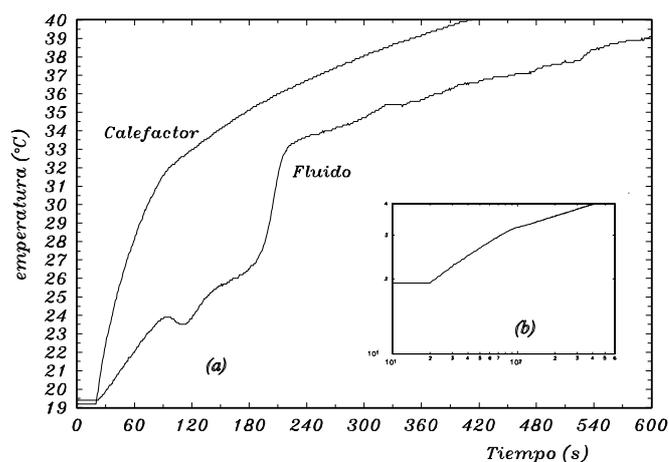


Figura III.28 a) Crecimiento de la temperatura en función del tiempo dentro del calefactor y a 1 mm por encima de la superficie. b) En escala logarítmica puede verse bien marcado el cambio en la pendiente de crecimiento.

Para verificar este comportamiento, insertamos un termopar a 1 mm del fondo, en el interior de la placa calefactora. Debido a su escaso espesor, ésta es muy sensible a las variaciones de temperatura del fluido circundante. Además, se sumergió un termopar a 1 mm de la placa.

Los resultados se representan en la Figura III.29. Se deduce que la temperatura del calefactor sufre un cambio brusco en $t=t_c$, momento de la aparición de las plumas en los límites del calefactor. Este comportamiento, también puede verificarse cuando se sumerge el segundo termopar. Existe también, un segundo cambio en la pendiente de crecimiento, que corresponde al momento en que desaparece el estado cuasiestacionario y el sistema llega al estado en que permanecerá finalmente.

Evidentemente, este tiempo dependerá de la rampa de calentamiento, pero su orden de magnitud coincide muy bien con los resultados predichos en la Ec.(III.12). Así comprobamos que este sistema describe los comportamientos característicos del transitorio de formación detallados al comienzo de la sección, es decir: a) un cambio brusco en el número de Nusselt –representado por el salto en la pendiente de la temperatura –, b) el desarrollo de un estado cuasiestacionario antes de llegar al régimen definitivo, y c) una fuerte dependencia de las perturbaciones.

En el Cap. IV, describiremos cómo se relaciona esta dinámica con los estados dependientes del tiempo.

CAPITULO IV

ESTADOS CONVECTIVOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

En este capítulo centramos nuestro interés en estudiar los estados dependientes del tiempo que surgen al aumentar la T del calefactor por encima del umbral. Comenzamos con un breve repaso de los antecedentes *experimentales* de la convección dependiente del tiempo y de sus causas.

IV.1 Algunos antecedentes:

En los sistemas convectivos, el comportamiento estacionario deja de ser estable para un calentamiento suficiente, dejando paso a regímenes dependientes del tiempo, periódicos o no. El análisis lineal ya no es válido, y se hace necesaria una extensión *no lineal* para poder interpretar los resultados de los experimentos. Estos resultados, se agrupan según el tamaño del sistema en: 1) sistemas con gran relación de aspecto y 2) sistemas con pequeña relación de aspecto. Presentamos a continuación una breve enumeración de los principales resultados desde una perspectiva histórica.

1) Gran relación de aspecto:

Hacia finales de la década de los 50, Townsend [46] puso de manifiesto *cuantitativamente* la importancia de la convección dependiente del tiempo, al determinar el comportamiento de las fluctuaciones de temperatura en una capa de aire, y la dependencia de la transferencia de calor con el número de Rayleigh ($Nu=Nu(Ra)$). En la década de los 60, Willis y Deardorff [47][48] midieron las fluctuaciones de la temperatura en una capa de aire sometida a una diferencia constante de temperatura, y la existencia de una fuerte dependencia entre ese comportamiento y el número de Prandtl. A comienzo de la década de los 70, Krishnamurti [7] confirmó los resultados anteriores y describió una transición intermedia, que involucra el paso de la *bidimensionalidad* a la *tridimensionalidad* de las estructuras convectivas. Sus resultados están resumidos en la gráfica de la Figura

I.13, en la que se muestran como los diferentes umbrales en función del número de Rayleigh se distancian entre sí a medida que el número de Prandtl crece. Todos estos autores encuentran que la dependencia temporal de la variable estudiada no es periódica y las transformadas de Fourier correspondientes tienen un espectro muy ensanchado.

A mediados de la misma década, la irrupción de los conceptos de caos y formación de estructuras (*pattern formation*), introducen un cambio cualitativo en la interpretación de estos problemas. Son de destacar especialmente los trabajos pioneros de Ahlers & Behringer [17] en un sistema criogénico con ^4He ($\text{Pr} \approx 1$), y de Busse [49][50] sobre inestabilidades en estructuras celulares.

Desde la década de los 80 la atención ha estado centrada principalmente en el estudio de la intermitencia espacio-temporal [51] a partir de oscilaciones periódicas, y de "*defectos turbulentos localizados*", cuyo número y tiempo de vida medio crece a medida que aumenta el parámetro de control.

2) Pequeña relación de aspecto:

El análisis del comportamiento temporal en convección con pequeña relación de aspecto es mucho más reciente, motivado en gran medida por la teoría del caos. Ahlers en 1974 [52], demostró experimentalmente –por primera vez de forma incontestable– la presencia de caos en un sistema convectivo con relación de aspecto $\Gamma=5.27$. En esos años diversos grupos obtuvieron: a) la cascada de duplicación de período (Gollub & Benson [53], Libchaber y Maurer [10]), b) la dimensión fractal de los atractores extraños (Malraison *et al* [54]), c) intermitencias tipo I y III (Bergé [14], Dubois *et al* [15]), y d) la estructura de "*lenguas*" de la cuasiperiodicidad (Glazier & Libchaber [55]).

En estos experimentos, la aparición de estados dependientes del tiempo es monoperiódica, y se desestabilizan conservando su espectro de frecuencias discreto. Es presumible entonces una descripción en términos de sistemas dinámicos con baja dimensionalidad.

En 1978 Ahlers & Behringer [17] encontraron resultados que no pueden ser explicados de manera satisfactoria en función de modelos de baja dimensionalidad. Estos autores pusieron de manifiesto que en un sistema convectivo cuya relación de aspecto es $\Gamma=4.73$, las altas frecuencias del espectro de potencias, obedecen una ley del tipo $f^{-\zeta}$, donde ζ está entre dos y cinco (Figura IV.1). Para sistemas con pocos grados de libertad, este comportamiento se espera para $f \gg f_{max}$, es decir, para la zona del espectro en que la frecuencia es mayor que la mayor frecuencia característica f_{max} del sistema.

Según algunos autores [56], este fenómeno podría ser interpretado añadiendo un término estocástico al sistema de baja dimensionalidad. Recientemente Cross & Hohenberg [57], propusieron una "...alternativa *determinística*, invocando el continuo de modos de un fluido real...". Estos autores arguyen que un modelo con pocos grados de libertad es excesivamente simplista, pues persiste un "...resto de interacción a corto plazo..." entre modos de gran número de onda.

El desarrollo de modelos teóricos para explicar las causas de estos comportamientos, ha sido profuso. Desde la concepción más clásica de Landau sobre la ruta hacia la turbulencia hasta la revolución conceptual con las teorías del caos. Pospondremos la discusión de alguno de ellos para más adelante, pero recordemos que su atención está centrada en a) predecir la dependencia de la transferencia de calor con el número de

Rayleigh para todo el dominio experimental estudiado –que abarca 14 órdenes de magnitud (!)– y b) dar cuenta de los mecanismos que controlan la dependencia temporal.

Figura IV.2 Dependencia del espectro de potencias con la frecuencia [Ahlers & Behringer,17].

V.2 Régimen dependiente del tiempo para la celda A

Tras la bifurcación estacionaria que rompe la simetría, el sistema permanece en ese estado hasta que la temperatura del calefactor alcanza los 58.7 °C ($\epsilon \approx 40$), momento en que el planform deja de ser estacionario, y la línea diagonal comienza a sufrir contracciones y elongaciones periódicas.

Este comportamiento fue estudiado en función de la estructura espacial (registrando la longitud del segmento diagonal a intervalos regulares de tiempo), y no de una variable física como la temperatura. Ahora bien, como el planform y la temperatura, pueden interpretarse en función de modos espaciales sencillos, como discutimos en el capítulo anterior, hemos de determinar si la dependencia temporal está causada por: a) *nuevos modos espaciales* temporalmente variables, o b) la desestabilización temporal de alguno/s de los modo/s ya presente/s en el régimen estacionario.

Descartamos la primera hipótesis, pues no se observan nuevos modos espaciales en la transformada de Fourier del planform. La segunda hipótesis implica que la bifurcación estacionaria es de tipo Hopf con su parte imaginaria nula, la cual se hace distinta de cero una vez que el parámetro de control alcanza cierto umbral.

Como la temperatura en el interior del fluido, queda descrita por esos mismos modos espaciales, la desestabilización deberá manifestarse también en su dependencia temporal, cosa que efectivamente sucede. La temperatura en el umbral se hace dependiente del tiempo como se aprecia en la Figura IV.2

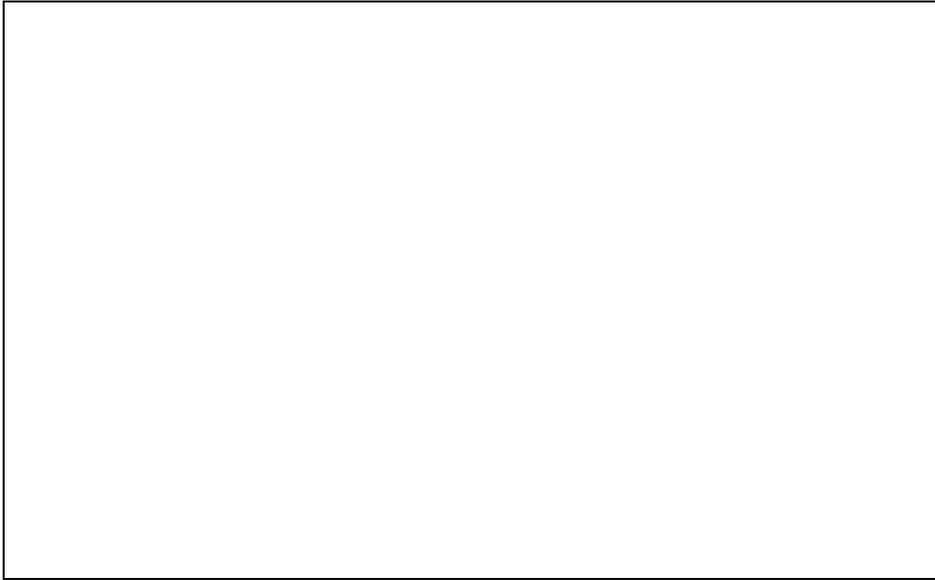


Figura IV.2 Aparición del comportamiento temporal de las temperaturas en el seno del fluido. (● =T1, ■=T2, ▲=T3, ▽=T4)

Al igual que sucedía en el estado estacionario hemos verificado que los termopares no afectan al umbral de los estados dependientes del tiempo.

Hay aspectos de la Figura IV.2, que merecen ser comentados. El primero, es la clara asimetría entre las temperaturas de las celdas cuadradas y las de las celdas pentagonales. Si bien en las celdas cuadradas la temperatura media es esencialmente la misma –la pequeña diferencia entre ellas puede estar ocasionada por los errores sistemáticos del sistema de medida– las temperaturas de las celdas pentagonales son claramente diferentes. Este hecho está asociado a una ruptura de simetría adicional, que se manifiesta en el descentramiento del segmento diagonal, hacia una de las esquinas. De esta manera, estamos midiendo algo que *a priori* podría resultar obvio: la temperatura media en cada una de las celdas convectivas es fuertemente dependiente del volumen de líquido encerrado en ellas.

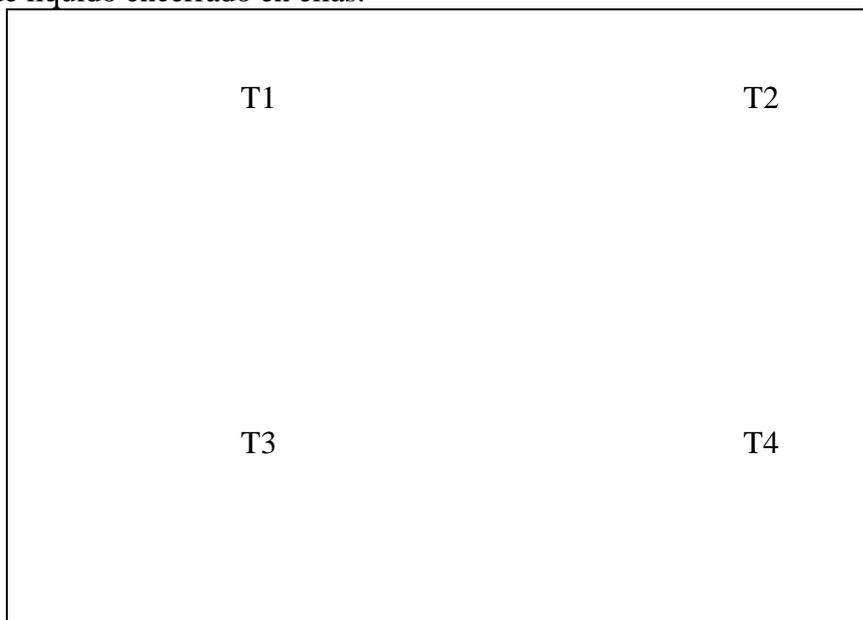


Figura IV.3 Espectro de potencias de las señales de temperatura justo en umbral de aparición del régimen dependiente del tiempo.

En la Figura IV.2, también podemos ver como las oscilaciones en el umbral, aparecen con amplitud apreciable en *sólo una* de las cuatro celdas convectivas, o mejor dicho, el comienzo de la dependencia temporal de la temperatura no es simultáneo en cada una de las celdas convectivas. Desconocemos si esto es causa o consecuencia de la ruptura de simetría adicional comentada en los párrafos anteriores. Aunque en ocasiones, al traspasar el umbral la temperatura comienza a oscilar simultáneamente en todas las celdas, el número de casos donde ocurre lo contrario es importante, razón por la cual, resulta muy difícil medir de manera precisa la temperatura del calefactor en la que se produce la transición. La diferencia en la amplitud de cada una de las oscilaciones, se pone claramente de manifiesto en la Figura IV.3 donde se han representado los espectros de potencias de cada una de las señales.

Si continuamos aumentando la temperatura, la dependencia temporal se hace apreciable en todas las celdas, y la frecuencia dominante en cada una de ellas coincide dentro de la resolución experimental. La media de la temperatura para las celdas cuadradas es esencialmente la misma y lo mismo ocurre ahora con las pentagonales (Figura IV.4). Esto ocurre porque la estructura recupera la simetría respecto de las dos diagonales cuando nos alejamos lo suficiente del umbral, poniendo de manifiesto que la transición es fuertemente sensible a las perturbaciones. Sin embargo, una vez superada esta región, el sistema recupera su estabilidad inicial.

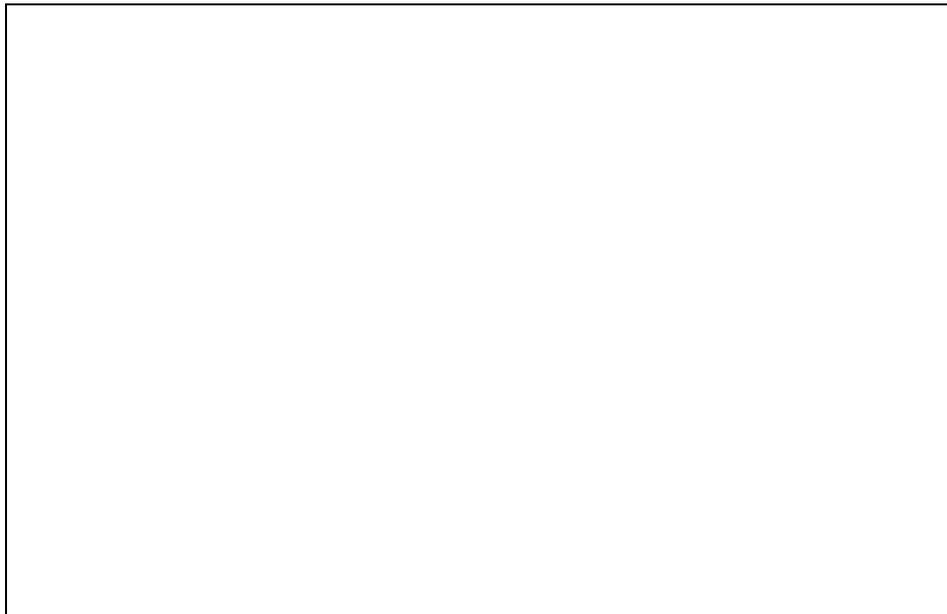


Figura IV.4 Oscilaciones de temperatura en cada una de la celdas convectivas para valores próximos al umbral (●=T1, ■=T2, ▲=T3, ▽=T4)

Como puede verse en la Figura IV.5, las oscilaciones de las celdas enfrentadas se encuentran en fase, pero en celdas adyacentes son las fases las que están enfrentadas ($\sim\pi$). El valor medio de estas diferencias permanece constante, aunque instante a instante sufren pequeñas variaciones. Así, y tal como ha sido esquematizado en la Figura IV.6, puede asociarse la aparición del comportamiento temporal, a los modos diagonales que originaron la primera bifurcación estacionaria.



Figura IV5 Detalle de las oscilaciones de temperatura, donde pueden verse las diferencias de fase entre diferentes registros ($\bullet = T1$, $\blacksquare = T2$, $\blacktriangle = T3$, $\nabla = T4$).

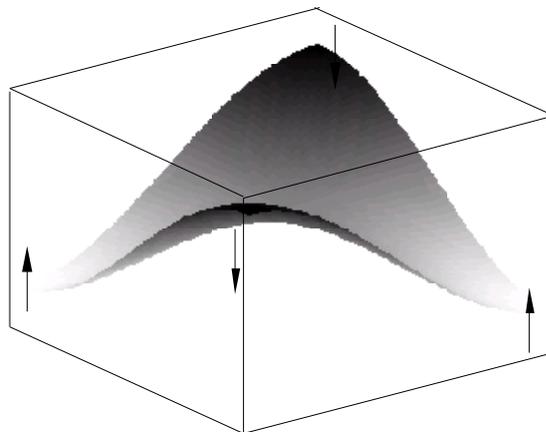
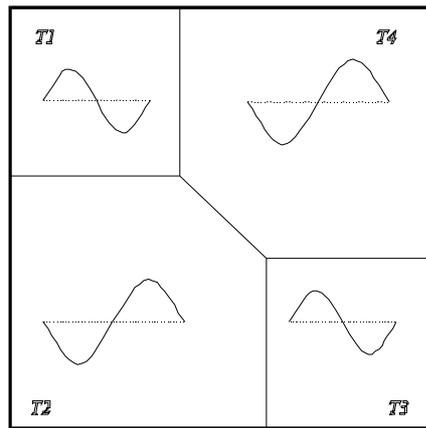
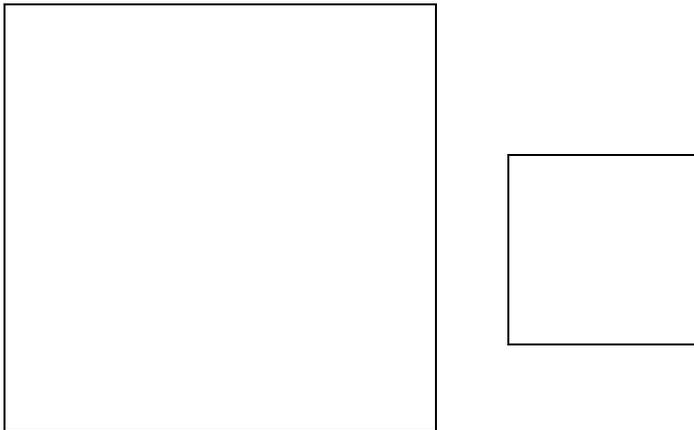


Figura IV.6 a) Representación esquemática de la diferencia de fase entre las temperaturas de cada celda y b) del comportamiento temporal del modo diagonal encontrado en la FFT (Figura III.12).

Las oscilaciones del segmento diagonal continúan si continuamos aumentando la temperatura, hasta que, alcanzado cierto umbral, un nuevo estado aparece, formado por oscilaciones a lo largo de *las dos diagonales*. Ahora, el segmento según una de las diagonales variará su longitud durante cierto período de tiempo, para luego cambiar la dirección diagonal sobre la que variará y así sucesivamente.

Estos comportamientos han sido interpretados por H. Mancini *et al* [31][18], en función de un modelo que dá cuenta de todos los estados dinámicos observados en el sistema. Llamando X a la proyección del segmento diagonal sobre el eje de simetría $X = d \cos(\alpha)$, esta variable evoluciona según un sistema sencillo de ecuaciones diferenciales ordinarias que tiene en cuenta las simetrías del planform :



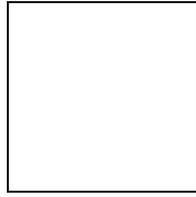
donde μ es un parámetro proporcional a la diferencia de temperatura ΔT . Un estudio topológico de las soluciones de estas ecuaciones, permitió caracterizar los diferentes atractores que recorre el sistema al aumentar el parámetro de control.

La utilización de estas técnicas topológicas resulta muy útil en la construcción de modelos dinámicos que den cuenta de los distintos comportamientos dinámicos que presenta la convección. Las describiremos brevemente aquí, antes de presentar sus resultados.

Si el comportamiento irregular de la señal temporal se debe a un *atractor extraño*, las órbitas *periódicas* inestables estarán "inmersas" dentro del atractor. Estas órbitas, pueden ser extraídas buscando los "retornos próximos" (close return) de la serie temporal [58]. Aquellos segmentos de la serie temporal que cumplen esta condición –una señal incuestionable de determinismo– contienen suficiente información para determinar la evolución temporal de la variable en un futuro no muy lejano. Eligiendo un retardo de tiempo adecuado τ , podemos reconstruir estas órbitas inestables en el espacio $[X(t+\tau), X(t)]$ tal como puede verse en la Figura IV.7.

Las características *cualitativas* de las órbitas que visita el sistema, y el espectro de potencias de la señal temporal, nos permiten asegurar que el modelo propuesto en las Ec. (IV.1) debe ser ampliado [59]. Este sistema, sufre una bifurcación de Hopf cuando $\mu = -v$ generando oscilaciones alrededor de los puntos fijos $(\pm(\mu)^{1/2}, 0)$; sin embargo, las órbitas inestables de la Figura IV.8.a oscilan alrededor de un punto que se desplaza sobre el eje $X(t+\tau) = X(t)$, efecto que no se obtiene de las Ec. (IV.1). Como la frecuencia y el punto donde nace la bifurcación de Hopf no deben cambiar, modificamos el modelo

fenomenológicamente, introduciendo parámetros efectivos $\mu_{ef}=\mu(1+\gamma\cos(\Omega t))$ y $v_{ef}=v(1+\gamma\cos(\Omega t))$ que conservan estas características, de manera que:



(Ec. IV.2)

Las órbitas obtenidas a partir del nuevo modelo (Figura IV.8.b), muestran una gran similitud con las experimentales. La validación de éste, ha sido realizada por G. Mindlin *et. al.* [60], mediante la caracterización topológica de los atractores y no será discutida en el presente trabajo; simplemente recordemos que la extensión del modelo a uno de carácter *paramétrico*, representa muy bien la dinámica que observamos en el sistema.

Figura IV.7 Órbitas inestables obtenidas numéricamente (Ec. IV.3) y del planform

Hemos resumido hasta aquí algunos de los resultados obtenidos a partir de la variable *espacial*, que permiten modelar la dinámica del sistema e incluso predecir comportamientos corroborados experimentalmente a posteriori [32]. A continuación, describimos el comportamiento temporal de la *temperatura* con este y otros métodos.

Superado el umbral de aparición del régimen temporal, se comprueba en el espectro de potencias de las señales temporales, que, si bien hay una clara frecuencia dominante, el ancho de banda de las componentes es importante, lo mismo que la amplitud de los picos de baja frecuencia. Este análisis, que pone de manifiesto el carácter irregular de la señal temporal, es insuficiente para determinar su carácter cuasiperiódico o caótico.

Para ello se determina la dimensión d del subespacio del espacio de las fases en que queda atrapada la dinámica del sistema. Si esta dimensión es *fractal*, denominamos al conjunto de puntos que engloba el subespacio como atractor *extraño* y este es (en la mayoría de los casos) caótico. La desventaja de los métodos que permiten esta determinación, es que (a) debemos tener una idea a priori de las dimensiones del espacio de fases del sistema, y (b) ser capaces de medirlas experimentalmente.

Al disponer en el experimento de *una única* variable temporal, se puede reconstruir un pseudo-espacio de fases $[T_i, T_{i+\tau}, T_{i+2\tau}, T_{i+3\tau}, \dots, T_{i+(n-1)\tau}]$, eligiendo un retardo temporal τ conveniente, y reconstruir el atractor sobre él. Takens [61], demostró que si el espacio de fases del problema tiene N dimensiones, el atractor conserva todas sus propiedades topológicas si es reconstruido sobre un pseudoespacio (embedding space) de dimensión $M=2N+1$. Si aceptamos que nuestro problema puede ser modelado por un sistema de ecuaciones de primer orden con N variables, la dimensión ν del atractor deberá cumplir que $\nu < N$, de manera que si conocemos d tendremos al menos una cota inferior para N .

En un régimen caótico, las coordenadas de dos puntos evolucionan en el espacio de fases, alejándose entre sí a medida que el tiempo avanza, y perdiendo correlación. Sin embargo, todos los puntos permanecen en una región acotada del espacio –el atractor– de forma que se mantiene cierta correlación espacial, que es posible "medir", mediante la función adecuada. Grassberger y Procaccia [62], introdujeron la función:

$$C(r) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} H(r - |x_i - x_j|)$$

(Ec. IV.3)

donde H es la función de Heaviside y r la distancia entre los puntos del espacio de fases. Así, $C(r)$ es proporcional al número de puntos cuya distancia entre sí es menor que r . Se cumple entonces que:

$$C(r) \sim r^{\nu}$$

de manera que esta ley de potencias nos permite estimar la dimensión ν del atractor para valores de r adecuados. Cuando r es muy pequeña la correlación decae abruptamente, pero cuando adquiere dimensiones comparables a las del atractor la dependencia entre

las magnitudes ajusta muy bien con una ley de potencias; si se hace más grande que el mismo atractor, aparece evidentemente un efecto de saturación y encontramos que $C(r) \rightarrow I$. La precisión de la estimación crece con el número de puntos, pero esto incrementa excesivamente el tiempo de cálculo, de manera que usualmente se consideran $P \approx 10^4$ puntos, suficientes en la práctica.

A partir de nuestra señal temporal $T(t)$, reconstruimos las trayectorias en seudoespacios de dimensiones $p=2,3,4,5,\dots$, con τ igual a un cuarto de período característico, y calculamos para cada p el valor de $C(r)$. Determinamos entonces la pendiente de la curva $\log[C(r)] = \nu \log(r)$ y obtuvimos el exponente ν (Figura IV.8).



Figura IV.8 Integral de correlación en función de la distancia entre puntos r , para diferentes dimensiones del seudoespacio de fases

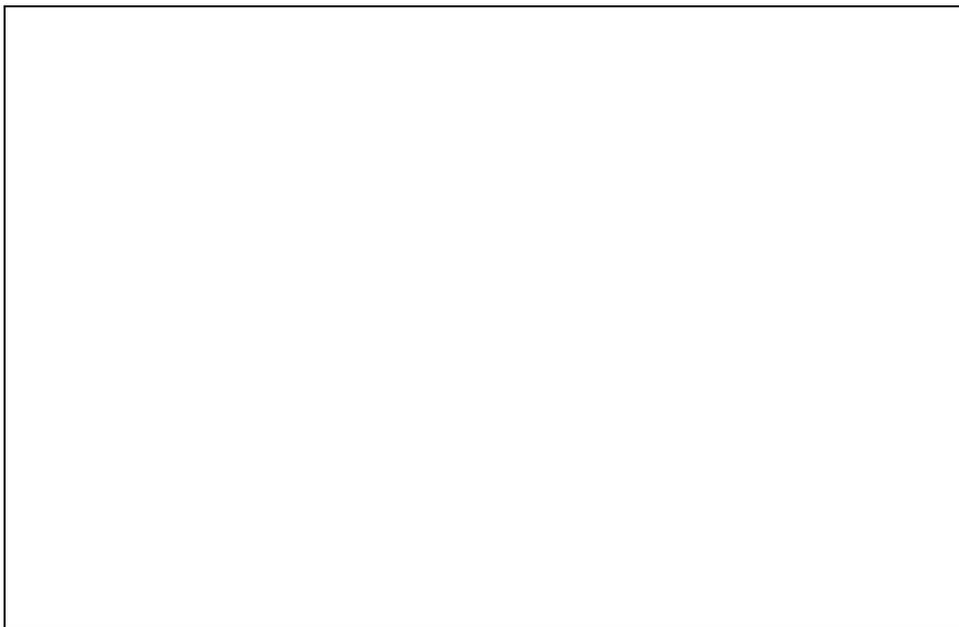


Figura IV.9 Dependencia de ν con la dimensión del seudoespacio para tres señales diferentes a) Temperatura poco ruidosa (o), b) temperatura muy ruidosa (\square) y c) temperatura ambiente (*).

En esta gráfica, se aprecia como, para dimensiones mayores que $p=5$, la pendiente se hace independiente de la dimensión del seudoespacio y satura a $\nu=2.8 \pm 0.05$. Encontramos pues, una cota inferior para N que confirman los teoremas de Takens, pues el carácter asintótico de ν se observa para $M=2N+1 \approx 2\nu+1 \approx 5$. La influencia del ruido en la señal temporal, hace que la tendencia de ν hacia su valor asintótico sea más lenta, como puede verse en la Figura IV.9. Allí hemos comparado la tendencia de la menos ruidosa y la más ruidosa de nuestras medidas de temperatura (según las FFT), y una señal ruidosa obtenida del termopar que determina la temperatura ambiente. La señal ambiente tiene una dimensión que crece monótonamente con la dimensión del seudoespacio, lo que confirma su carácter ruidoso, ya que éste necesita un espacio de infinitas dimensiones para su representación, mientras que la tendencia de las señales de temperatura es más acusada para el caso menos ruidoso.

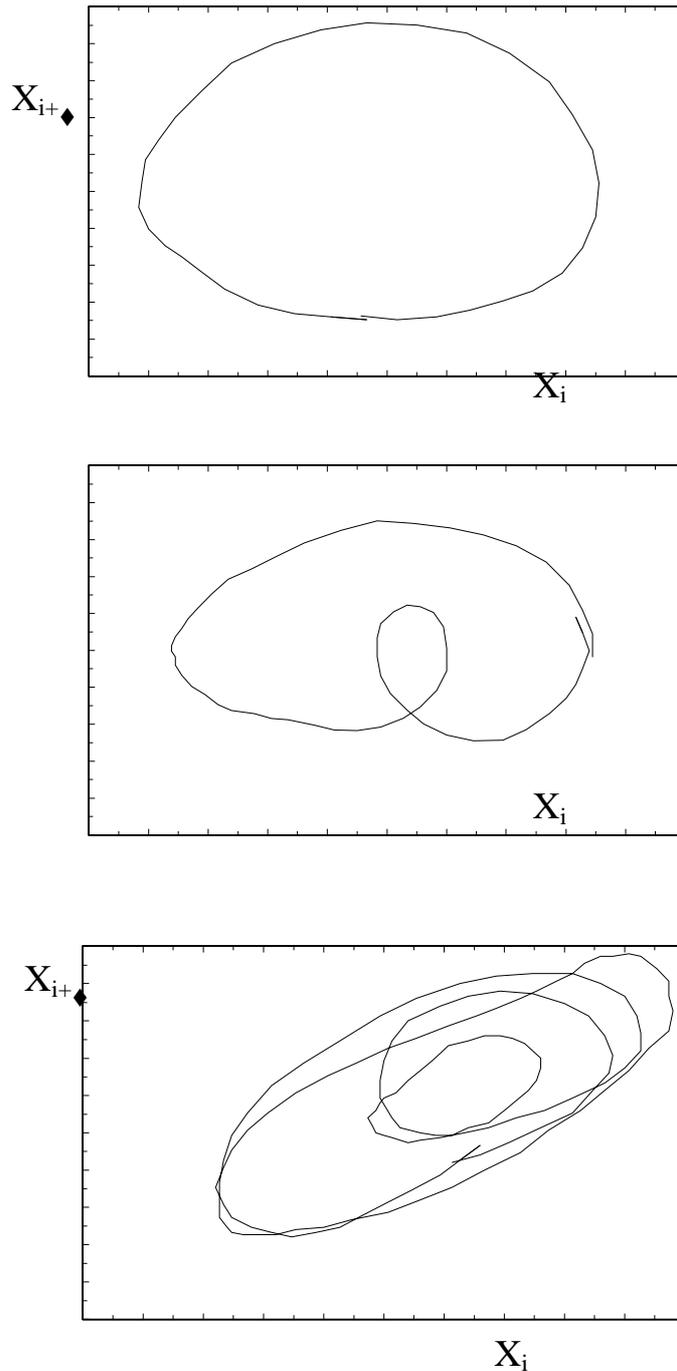


Figura IV.10 Orbitas inestables correspondientes a la señal de la temperatura.

Una vez determinado el carácter caótico de las señales temporales, utilizamos estos resultados para contrastar nuestras afirmaciones con el enfoque topológico utilizado para la señal espacial. Conocida la dimensión del seudoespacio de fases adecuada para la representación de nuestro atractor, verificamos la presencia de órbitas inestables mediante la técnica de *retornos próximos*. Hallamos los segmentos de la señal temporal que permanecen atrapados en el entorno de una órbita periódica inestable, el doble de tiempo que su período característico. Comprobamos la existencia de órbitas de período 1, 2 y 3, cuya proyección sobre un espacio bidimensional se muestra en la Figura IV.10.

Si continuamos aumentando la temperatura del calefactor, la forma del planform pierde totalmente la simetría e intenta dividirse en nuevas celdas, aunque nunca llega a conseguirlo. La temperatura en el interior de las celdas más pequeñas presenta un comportamiento temporal difícilmente distinguible del ruido (Figura IV.11), mientras que la diferencia de fase entre las señales de las celdas restantes varía constantemente con el tiempo. La integral de correlación para estas señales ya no es una herramienta eficaz, debido quizás, a la elevada dimensionalidad que adquiere el sistema.

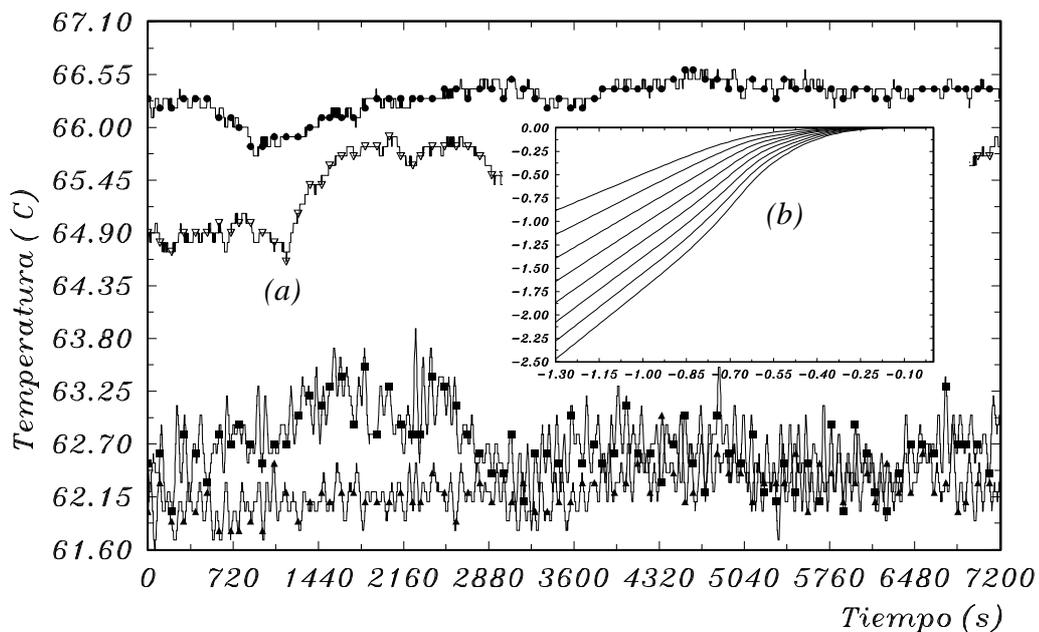


Figura IV.11 a) Comportamiento temporal de la temperatura para valores del parámetro de control muy alejados del umbral. b) Integral de correlación para la señal de temperatura T2.

A pesar de haber constatado el carácter *caótico* de las señales de temperatura próximas al umbral, desconocemos el origen de este comportamiento —que discutiremos en el Capítulo V—, y la manera en que la dinámica de la línea central del planform responde a los comportamientos temporales de la temperatura en el interior del fluido. Una interpretación de la relación entre estas magnitudes, requiere determinaciones más precisas de las variables involucradas, problema que esperamos estudiar en el futuro.

IV.3 Régimen dependiente del tiempo para la celda B.

Al aumentar la temperatura en el sistema con calentamiento inhomogéneo, la estructura convectiva estacionaria no sufre bifurcación espacial alguna, ni se altera la forma del flujo. Por encima de cierta temperatura crítica, esta estructura adquiere la dependencia temporal que discutiremos en los párrafos siguientes.

Cuando la temperatura del calefactor alcanza los 61.5 °C ($\varepsilon \approx 46$), aparece un estado dependiente del tiempo, que se pone claramente en evidencia porque el planform comienza a oscilar. Estas oscilaciones son fácilmente visibles en la imagen de la

superficie de la estructura convectiva, pues el "cuadrado central" aumenta su tamaño hasta alcanzar un área máxima, momento en el que "emite" cuatro "*pulsos de onda*" que viajan hacia las paredes, lo que hace que el "cuadrado" recupere su área original. En la Figura IV.12 pueden verse estos frentes viajando hacia las paredes.

Hemos pues de determinar si estos pulsos se deben a una inestabilidad propia de la superficie, o están relacionados con un régimen dependiente del tiempo de toda la estructura convectiva. Comencemos por analizar cuales son las variables que caracterizan la dinámica temporal.

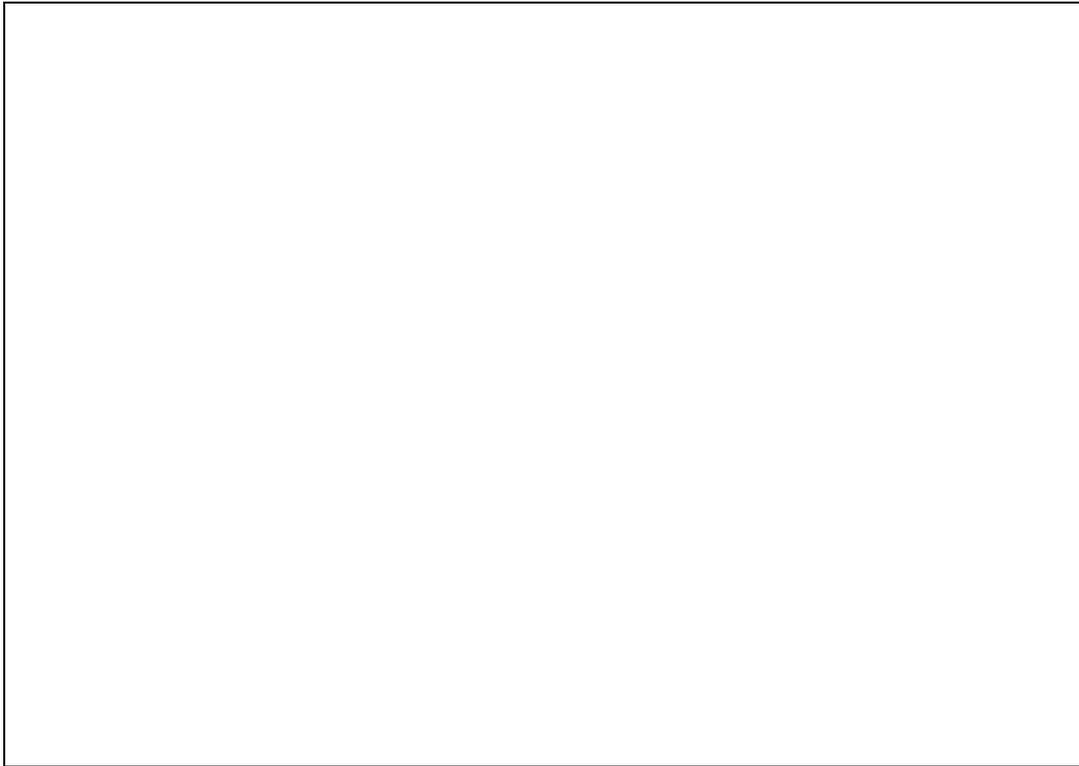


Figura IV.12 Régimen dependiente del tiempo en el sistema con calentamiento inhomogéneo.

IV.2.a Relación del planform con la temperatura.

La clara presencia de oscilaciones en la imagen de la superficie, contrasta con la ausencia total de modulaciones en el planform obtenido al enfocar el fondo de la celda (Figura III.14). Para dilucidar si aquellas se limitan a una inestabilidad de superficie, medimos simultáneamente la temperatura en diferentes puntos del interior del fluido. Estas medidas nos permiten afirmar que las oscilaciones están asociadas a un régimen dependiente del tiempo en la temperatura del fluido, justo en el centro de la celda.

La amplitud de estas oscilaciones es máxima en regiones próximas al calefactor (aproximadamente 2 mm por encima del fondo), de manera que sumergimos un termopar en esta posición y observamos simultáneamente el planform de la superficie a medida que aumentábamos el parámetro de control. Comprobamos entonces que las oscilaciones de temperatura tienen un umbral escasamente menor –solo un 2%– que las oscilaciones del planform. Como esta diferencia se encuentra dentro del error experimental, presumimos que los umbrales coinciden.

Sin embargo, no existe razón a priori para que estos umbrales coincidan. Para verificar si la diferencia está originada por nuestro método de medida, utilizamos un

termopar colocado en una horquilla, como se muestra en la Figura II.17.b, y medimos simultáneamente la temperatura en la superficie mediante un sensor infrarrojo, a la vez que observamos el planform.

Las oscilaciones en el interior del fluido comienzan a los $T_c = 61.5 \pm 0.5$ °C, mientras que las variaciones temporales de la temperatura en la superficie, sólo aparecen cuando esta temperatura alcanza los $T_c = 62.5 \pm 0.2$ °C. Esta diferencia, aunque escasamente por encima de nuestra resolución experimental, indica que estos umbrales son diferentes. Aunque puede estar motivada por efectos disipativos, no podemos concluir que éste sea el único motivo de una posible diferencia. Esperamos realizar determinaciones más exactas en un futuro inmediato.

Por otra parte, las oscilaciones del planform surgen a la vez que las de la temperatura superficial, poniendo de manifiesto la alta sensibilidad de la deformación superficial con la temperatura.

Una vez determinado el umbral, variamos el parámetro de control y comprobamos que la transición es supercrítica, es decir, que no presenta histéresis.

IV.2.b El planform y la deformación de la superficie.

Hemos resaltado hasta aquí, las ventajas de los métodos ópticos para estudiar este tipo de sistemas. Sin embargo, hay que tener en cuenta todas las no linealidades intrínsecas del propio método. Por ejemplo se podría deducir erróneamente que la velocidad de los pulsos de onda varía cuando se acercan a las paredes del recipiente.

En la Figura IV.13 está esquematizada la forma en que obtenemos las secuencias espacio temporales a partir del planform. Una vez enfocada una imagen adecuada de la superficie, capturamos en instantes sucesivos (a intervalos variables entre 0.1 y 1 s) una línea de puntos paralela a uno de los lados del calefactor, que atraviese el centro del planform, y construimos con ella una nueva imagen. En esta imagen espacio temporal, las oscilaciones de la región central aparecen como un trazo brillante que oscila a medida que el tiempo avanza, mientras que las ondas se presentan como trazos más claros que nacen cuando la amplitud de la oscilación central es máxima, y llegan hasta los límites de la celda. El tiempo se representa en vertical avanzando hacia abajo. La pendiente de los trazos representa la velocidad de las ondas que permanece prácticamente constante hasta las inmediaciones de las paredes donde se anula e incluso invierte su sentido, tal como queda de manifiesto en la Figura IV.13.b.

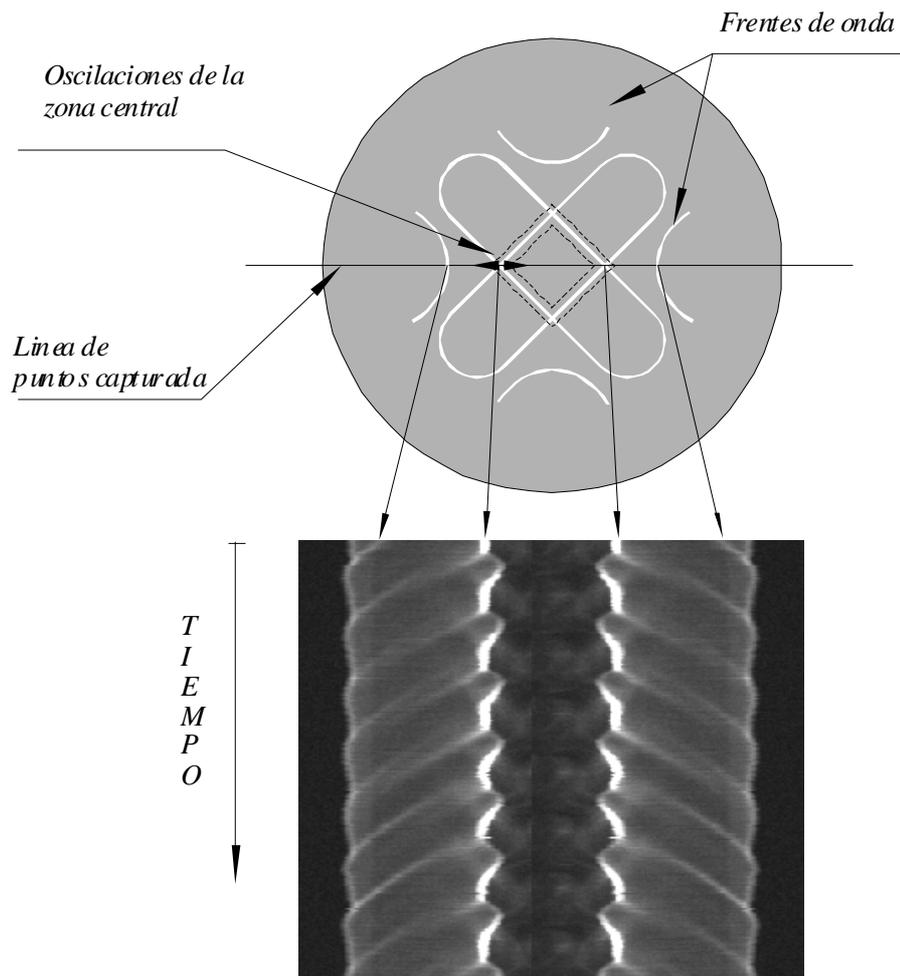


Figura IV.13 a) Representación esquemática de la obtención del diagrama espacio temporal presentado en (b).

Este último efecto, sólo aparente, es consecuencia de una no linealidad del método de observación, ya que las ondas viajan con velocidad constante en todo momento. Por otra parte, estos pulsos de onda –representados por líneas brillantes– no son paredes de fluido más *frío*, sino una deformación de la superficie que se desplaza con el flujo, de modo que, la cuantificación de la velocidad o de la deformación de la superficie, mediante la ombroscopía, resulta irrealizable en la práctica.

Para soslayar estas dificultades, utilizamos un pincel laser, cuya reflexión sobre la superficie responde *linealmente* a las deformaciones de la superficie en cualquier dirección radial. En la Figura IV.14 presentamos una secuencia de dicha deformación, tomada en instantes sucesivos, desde el nacimiento de un pulso en la zona central, hasta su desaparición en las paredes. Se puede comprobar, que las líneas brillantes asociadas a los pulsos (Fig. IV.14.b) corresponden a pequeñas *depresiones*, que se desprenden de la cima que forma el vértice de la protuberancia central.

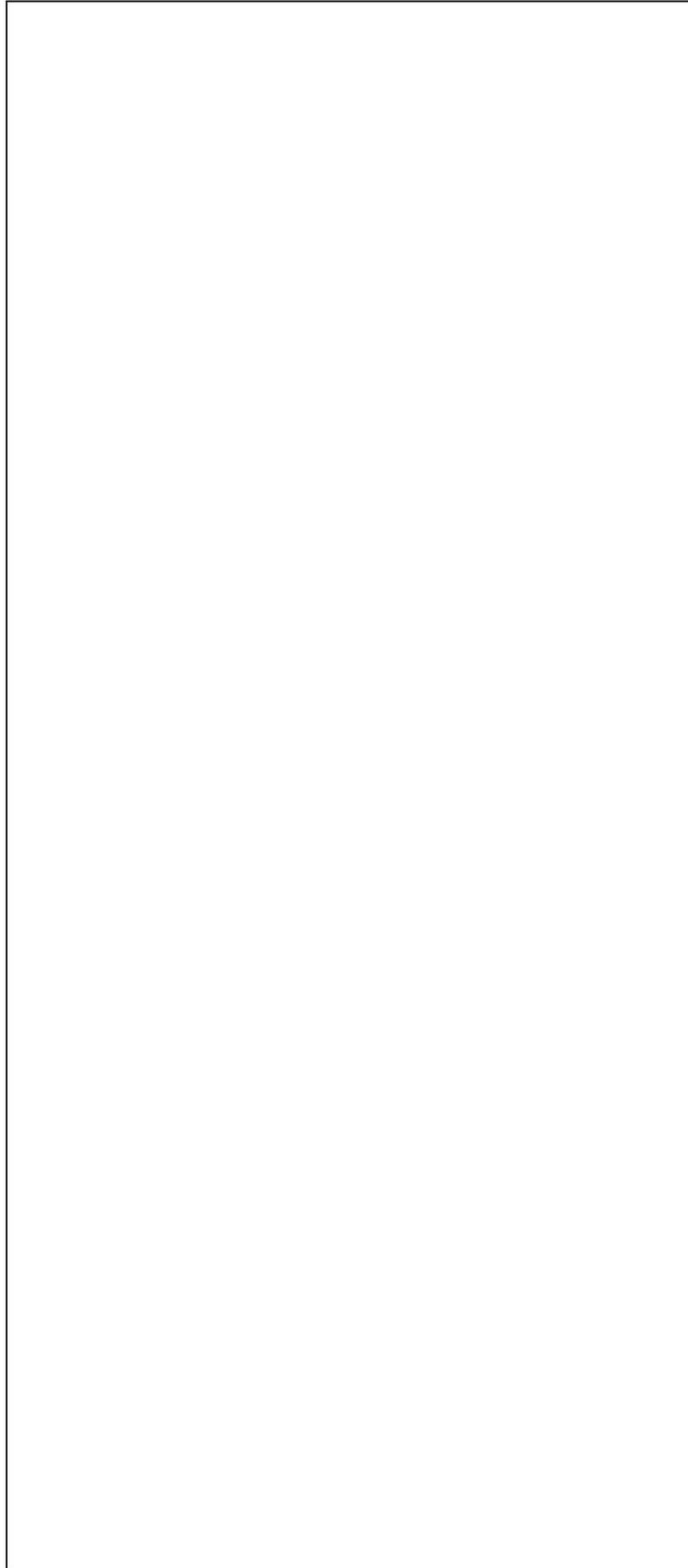


Figura IV.14. Deformación de la superficie capturada en instantes de tiempos sucesivos.

Dado que los pulsos son pequeñas depresiones, esperamos que éstas se encuentren a una temperatura más elevada que el resto; para verificarlo, medimos simultáneamente la estructura espacio-temporal y la señal I/R de la temperatura en la superficie. En la imagen espacio-temporal de la Figura IV.15.a, la zona oscura a la derecha de la región central indica la posición del sensor infrarrojo. En la Figura IV.15.b, se comparan la señal temporal del sensor infrarrojo, y la de un punto de la imagen adyacente a la sombra del sensor. El acuerdo de ambos perfiles es perfecto, una vez corregida la diferencia de fase debida al desplazamiento espacial.

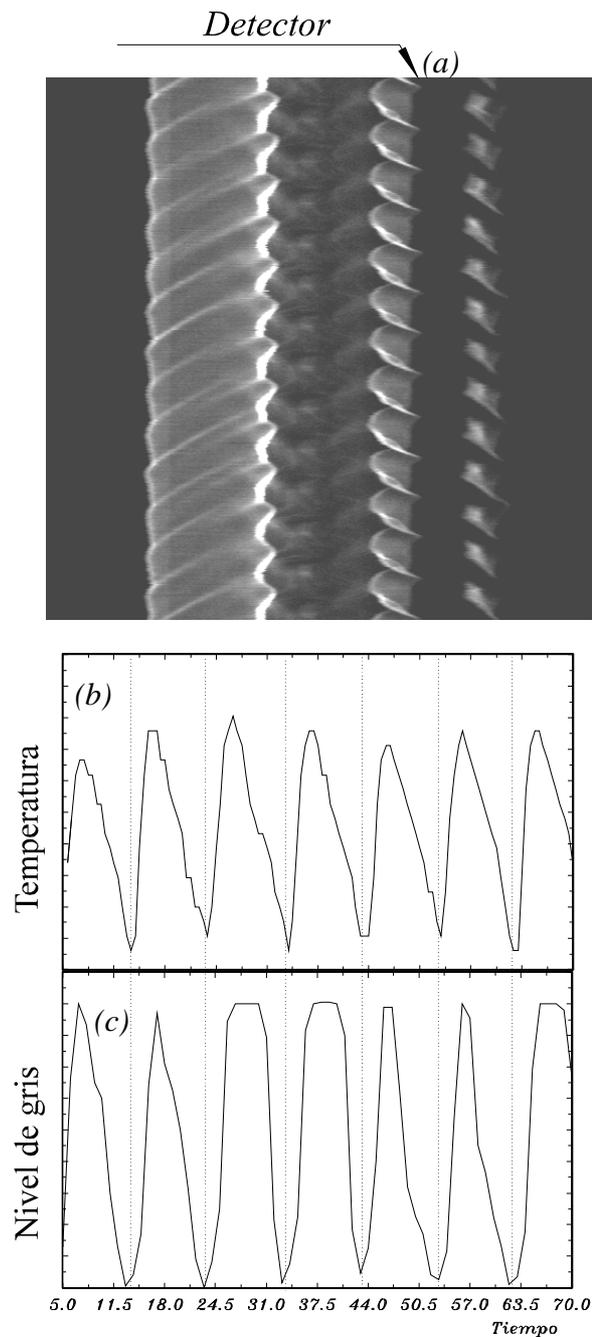


Figura IV.15 Comparación entre la señal del planform y la del sensor infrarrojo. (a) Imagen espacio temporal del planform. (b) Señal de la temperatura obtenida por el sensor colocado en (a). (c). Señal temporal del planform

La protuberancia central, además de aumentar su diámetro, se eleva por encima de la posición de equilibrio, para regresar rápidamente a su posición original tras emitir el pulso. Esta deformación está generada principalmente por el empuje, mientras que los pulsos de onda se deben a que su entorno más inmediato se halla *más caliente* que el resto de la superficie, por lo que generan una depresión debido al efecto termocapilar.

Aunque la profundidad de la capa de fluido nos induciría a pensar que en este experimento domina el primer efecto, el régimen dependiente del tiempo está claramente ligado al efecto Marangoni.

IV.2.c Oscilaciones y flujo

La señal espacio-temporal del planform, presenta un comportamiento esencialmente periódico, aunque difícil de cuantificar adecuadamente. Sin embargo, la temperatura puede ser medida con suficiente precisión. En lo que sigue centraremos nuestra atención en la distribución espacial de las oscilaciones, su relación con el flujo de base y la dependencia con el parámetro de control. Su origen será discutido en el próximo capítulo.

En las proximidades del umbral, la temperatura a 1mm del fondo presenta oscilaciones monoperiódicas. En la Figura IV.16, hemos representado además de la señal temporal, su espectro de potencias que tiene un pico muy nítido – en adelante denominado f_1 – junto con sus armónicos $2f_1$, $3f_1$, Para estudiar la dependencia espacial de estas oscilaciones desplazamos primero el termopar, paralelamente al fondo sobre los ejes y las diagonales de la celda. Los resultados se encuentran esquematizados en la Figura IV.17 .

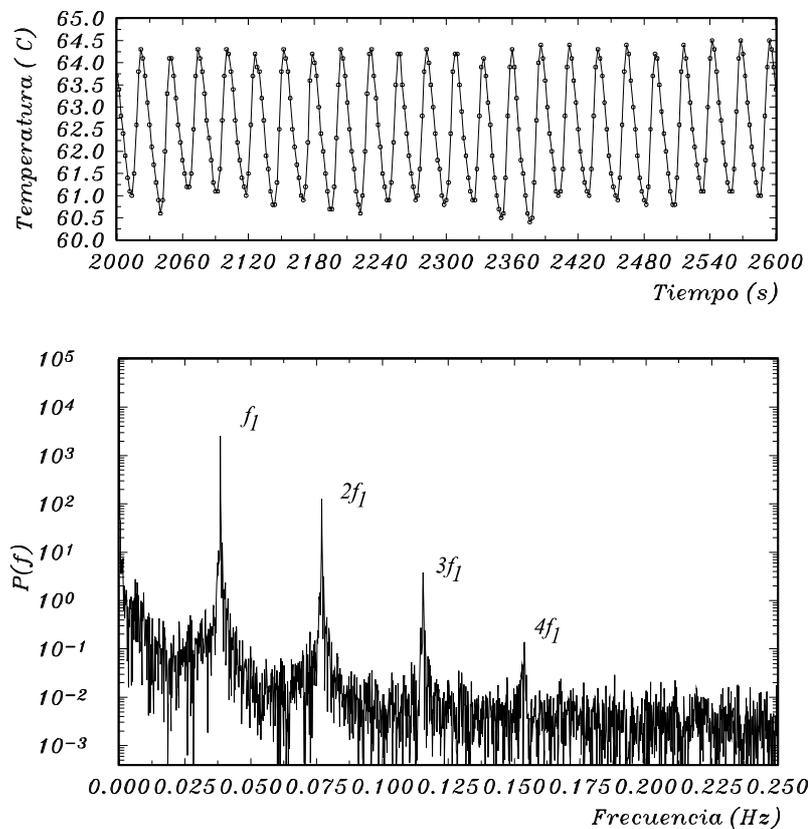


Figura IV.16 Oscilaciones de la temperatura a 1 mm del fondo y su espectro de potencias.

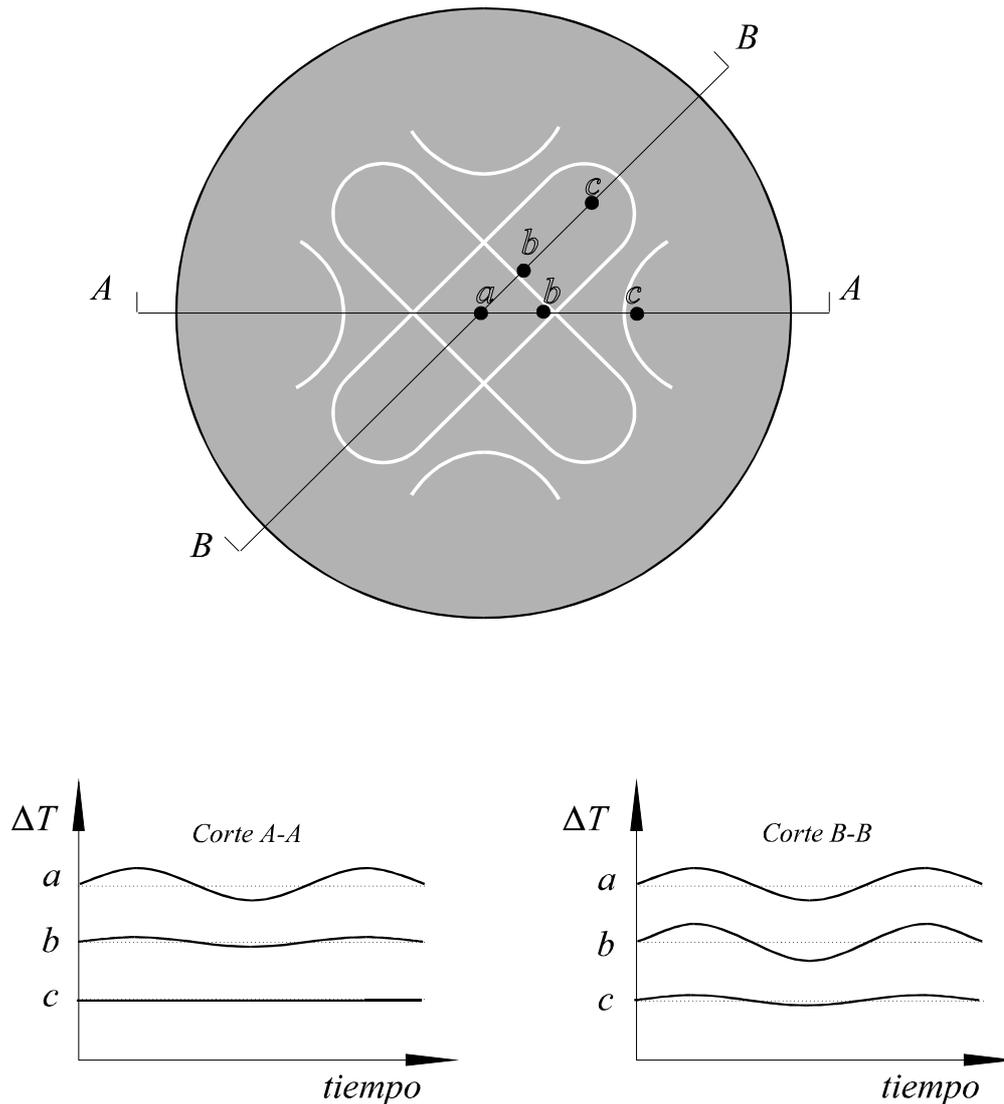


Figura IV.17 Representación esquemática de las oscilaciones de temperatura para diferentes posiciones espaciales.

Resulta claro que la dependencia temporal de la temperatura solo es apreciable en una región próxima al centro de la celda. Al alejarnos del centro, su amplitud decae rápidamente en dirección axial, mientras que lo hace más lentamente a lo largo de las diagonales. En cualquier caso, esta amplitud cae abruptamente cuando superamos los 2 mm desde el fondo, excepto en el centro donde decae lentamente. Aumentando aún más esta distancia, el régimen deja de ser monoperiódico, y el espectro de potencias correspondiente presenta una nueva frecuencia –en adelante f_2 – de aproximadamente un orden de magnitud menor que f_1 . En la Figura IV.18, se encuentran las señales temporales a diferentes profundidades y su espectro de potencias. La resolución espectral de la transformada de Fourier rápida (FFT) –calculada mediante el algoritmo usual de Cooley-Tukey, con diferentes tipos de ventanas para eliminar los efectos de borde–, es de $\Delta f = 1/N\Delta t$, donde N es el número total de muestras (7200 en este caso) y $\Delta t = 2$ s el intervalo de muestreo, de modo que $\Delta f = 1.388 \cdot 10^{-4}$ Hz

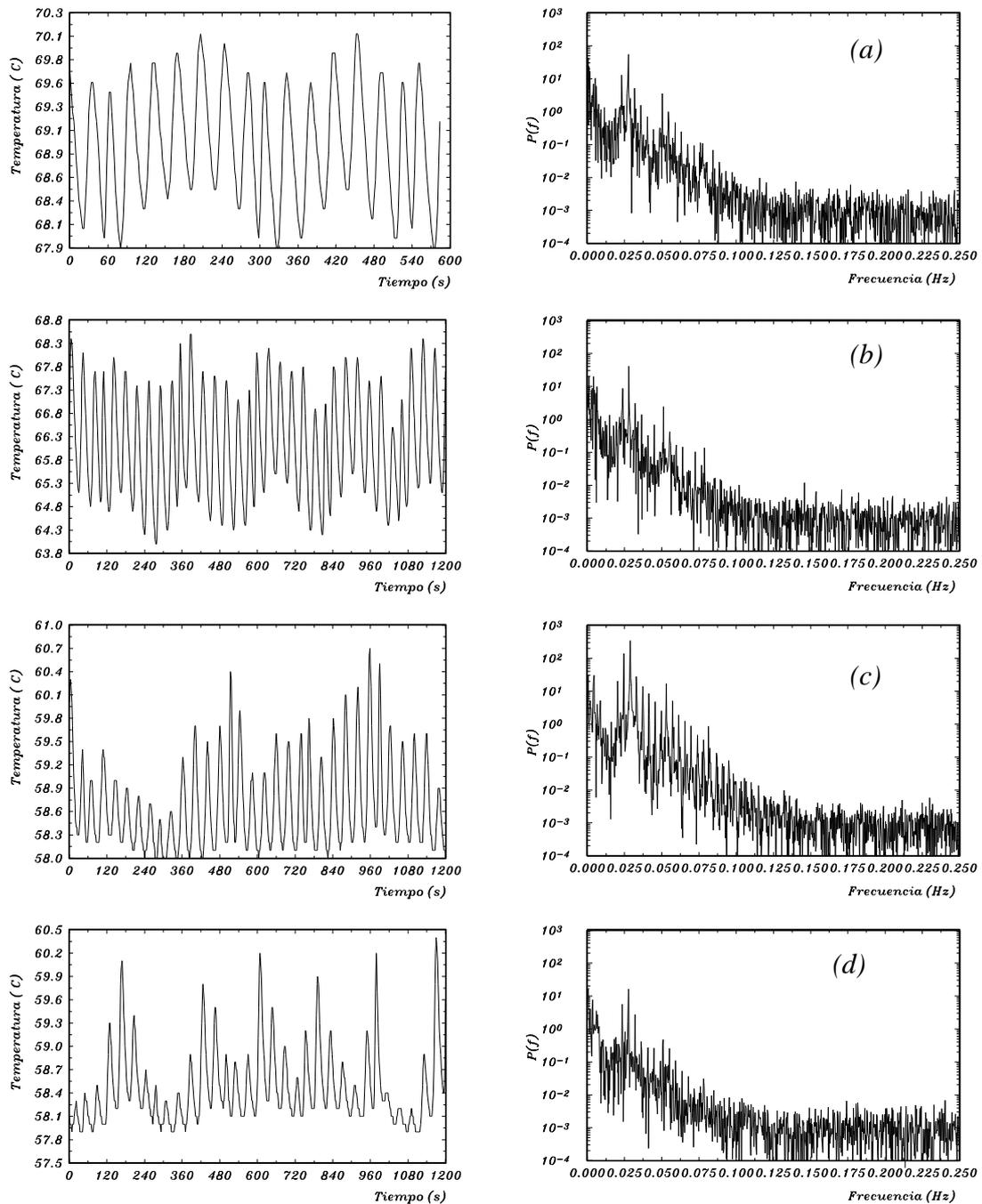


Figura IV.18 Señal temporal de la temperatura a diferentes alturas y su correspondiente espectro de potencias. (a) 2mm, (b) 5 mm, (c) 9mm, (d) 13 mm.

En la Figura IV.19 se aprecia que, mientras f_1 decrece monótonamente con la altura, f_2 presenta un máximo en aquella región en la que el perfil de temperaturas medias se hace irregular (Figura III.20). Resulta llamativo que, estando la deformación de la superficie directamente acoplada a f_1 , no resulte afectada por la segunda frecuencia. Parece pues, que esta deformación se comporta como un filtro pasa-alto prácticamente insensible a las variaciones de baja frecuencia.

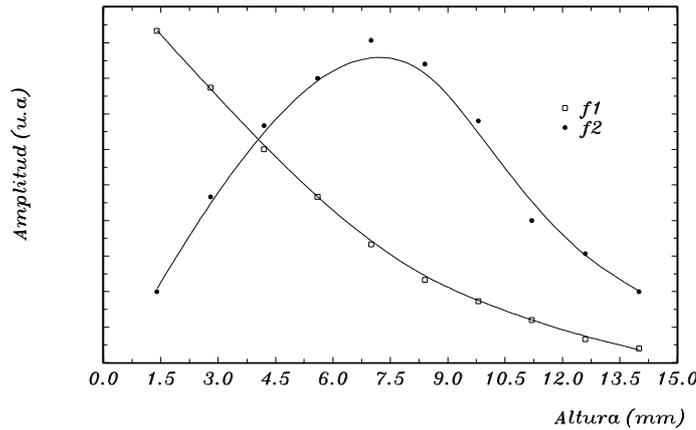


Figura IV.19 Dependencia de la amplitud de f_1 y f_2 con la distancia al fondo.

Nos encontramos pues en un régimen cuasiperiódico sin pasar por uno monoperiódico, como sucede en los sistemas convectivos. La cuasiperiodicidad, presenta dos comportamientos bien diferenciados según f_1/f_2 sea racional o no. En el primero de los casos, se produce un enganche o sincronismo de frecuencias (mode locking) que da lugar a una señal temporal de período $p_L=1/f_L$, siendo $f_L=f_1 - f_2$. Su espectro de potencias, además de los picos f_L, f_1 y f_2 , también tiene los armónicos nf_L . En el segundo de los casos, la señal temporal no presenta un período de oscilación definido (aunque tampoco tiene forma irregular) y el espectro de potencias muestra las dos frecuencias principales y sus diferentes armónicos en posiciones $f=m_1f_1 + m_2f_2$, donde m_1 y m_2 números enteros. El número y amplitud de estos picos, es directamente proporcional a la "no linealidad" del acoplamiento entre las frecuencias.

Un método un tanto arbitrario de clasificar la influencia de cada componente con la altura, consiste en analizar el número de picos armónicos del espectro de potencias en función de la altura. El resultado se resume en la Tabla IV.1. Nótese que el número de picos (por encima de la cota de amplitud 10^{-1}), es máximo al alcanzar los 10 mm aproximadamente.

Como la señal en las proximidades de la superficie es bastante irregular hemos utilizado sensores infrarrojos sobre la zona central, observándose que el grado de acoplamiento entre las frecuencias es mucho menor en las proximidades de la superficie que a 10 mm del fondo.

Antes de continuar analizando estas oscilaciones, recordemos como éstas dan lugar a un comportamiento cuasiperiódico. Una órbita cuasiperiódica de N-frecuencias es aquella para la cual las variables del sistema pueden expresarse como :

$$g(t) = F(f_1t, f_2t, \dots, f_Nt) \tag{Ec. IV.4}$$

donde t denota al tiempo, y F es una función periódica de todas las frecuencias f_1, f_2, \dots, f_N inconmensurables, es decir aquellas para las cuales :

$$m_1f_1 + m_2f_2 + \dots + m_Nf_N = 0 \tag{Ec. IV.5}$$

no tiene solución para ningún m_i entero, excepto que todos sean cero.

Profundidad	Frecuencia	m_1	m_2
1 mm	0.0323	1	0
1 mm	0.0646	2	0
1 mm	0.0969	3	0
2 mm	0.0323	1	0
2mm	0.0036	0	1
2mm	0.0646	2	1
4 mm	0.0323	1	0
4 mm	0.0036	0	1
4 mm	0.0287	1	-1
4 mm	0.0359	1	+1
7 mm	0.0323	1	0
7 mm	0.0036	0	1
7 mm	0.0287	1	-1
7 mm	0.0359	1	+1
7 mm	0.0072	0	2
7 mm	0.0395	1	+2
10 mm	0.0323	1	0
10 mm	0.0036	0	1
10 mm	0.0287	1	-1
10 mm	0.0359	1	+1
10 mm	0.0072	0	2
10 mm	0.0395	1	+2
10 mm	0.0646	2	0
10 mm	0.0682	2	+1
10 mm	0.0610	2	-1
10 mm	0.0108	0	3
13 mm	0.0323	1	0
13 mm	0.0036	0	1
13mm	0.0287	1	-1
13mm	0.0359	1	+1
13mm	0.0072	0	2
13mm	0.0395	1	+2

Tabla IV. Relación entre frecuencias a diferentes alturas $f=m_1f_1 + m_2f_2$

La función $g(t)$ puede ser desarrollada en una serie de Fourier:

$$g(t) = \sum C_{m_1, m_2, \dots, m_N} \cdot \exp\{-2\pi i [m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_N f_N] t\} \quad (\text{Ec. IV.6})$$

de manera que su espectro de potencias estará formado por una serie de funciones delta en las posiciones $m_1 f_1 + m_2 f_2 + \dots + m_N f_N$.

Ahora bien, el movimiento de estos osciladores dará lugar a una trayectoria que forma una superficie toroidal. Supongamos que intervienen sólo dos frecuencias (Figura IV.20), En ese caso la trayectoria se representará con un vector posición:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{l}$$

donde el movimiento alrededor del eje mayor $\mathbf{R}(t)$ con una frecuencia ω_1 , y otra ω_2 sobre el eje menor $\mathbf{l}(t)$.

Este movimiento puede caracterizarse determinando los puntos de intersección de la trayectoria con un plano Σ que corta al toro. Mediante esta "aplicación estroboscópica", se obtiene una sección de Poincare de la dinámica. La expresión

analítica de esta aplicación se obtiene tomando la deriva temporal $v(t)$ de la función $g(t)$, y eligiendo el ángulo de fase del primer oscilador ($\omega_1 t_n = 2\pi n$) para generarla, de manera que la sección de Poincare estará descrita por las expresiones:

$$g_{n+1} = \gamma(g_n, v_n)$$

$$v_{n+1} = \Gamma(g_n, v_n)$$

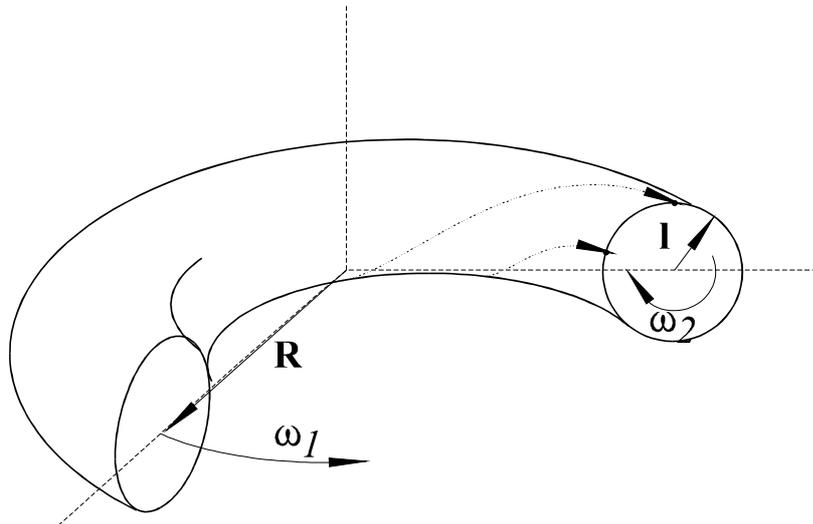


Figura IV.20 Construcción de la sección de Poincare de un toro T^2

Si renormalizamos el eje vertical usando coordenadas polares, obtenemos una ecuación en diferencias:

$$\tan \theta_n = \frac{v_n / \omega_1}{g_n} \tag{Ec. IV.7.a}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{Ec. IV.7.b}$$

Esta es la *aplicación circular* (circle map), estudiada por Arnold [63] y cuya forma más general es:

$$\theta_{n+1} = \left[\theta_n + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi\theta) \right] \tag{Ec. IV.8}$$

siendo k un factor que indica la no linealidad del acoplamiento y Ω la relación entre frecuencias. Cuando $k=0$, la aplicación es lineal, mientras que si $0 < k \leq 1$ el mapa continúa siendo invertible pero con una rica variedad de estados. Se define el número:

$$W = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\theta_i - \theta_0}{i} \quad (\text{Ec. IV.9})$$

conocido como "*número de enrosque*" (winding number), que coincide con Ω cuando el sistema sea lineal ($k=0$), mientras que en el régimen no lineal ($0 < k \leq 1$) W no será siempre igual a Ω . A cada racional $W=p/q$ le corresponderá un intervalo finito de valores $[\Omega_{W,1}, \Omega_{W,2}]$, de manera que el número de enrosque queda "capturado" en un intervalo de relación entre frecuencias.

En la práctica, fijando una de las frecuencias y variando la restante, la función $W(\Omega)$ formará un conjunto autosimilar conocido como "*escalera del diablo*" (Figura IV.21.a), y tanto como incrementemos la no linealidad k , aumentará el ancho del intervalo "capturado", dando lugar a un diagrama conocido como "*las lenguas de Arnold*" (Figura IV.21.b).

A pesar de que años antes Peixoto había demostrado que un sistema con dos frecuencias es estructuralmente inestable, Arnold describe una rica dinámica en función de la no linealidad para el mapa circular. Estos estados fueron verificados en una gran variedad de experimentos, en especial en sistemas convectivos tipo Bénard-Rayleigh [55]. En 1982 P. Bergé [64], observó la transición al caos tras un régimen "biperiódico", y le caracterizó mediante la ruptura de la sección de Poincare del toro que forman las trayectorias en el espacio de las fases, confirmando que un sistema con dos frecuencias puede llegar al caos sin sufrir una nueva bifurcación de Hopf, como habían conjeturado Curry & Yorke [13].

En 1971, Ruelle & Takens [8], originaron "una revolución epistemológica" al sugerir que la transición a la turbulencia no se producía por un número *infinito* de bifurcaciones de Hopf como había sugerido Landau en 1944, sino que por el contrario, bastaba un número *finito* de bifurcaciones para que esto sucediera. Tal *sugerencia* fue precisada en 1978 por Newhouse, Ruelle y Takens [12], quienes *demonstraron* que no sólo era posible sino *genérico*, que tres bifurcaciones de Hopf bastan para atraer el sistema a un atractor extraño estructuralmente estable.

Estas ideas dominaron el campo conceptual de la transición a la turbulencia hasta 1985, cuando Grebogi, Ott & Yorke [65] demostraron que *son posibles* órbitas cuasiperiódicas estables tras la 3° y 4° bifurcación de Hopf. De este trabajo solo queremos destacar aquí la propuesta de una aplicación para $N=3$ de la forma :

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= [\theta_n + \omega_1 + (2\pi)^{-1} \varepsilon P_1(\theta_n, \psi_n)] \bmod 1 \\ \psi_{n+1} &= [\psi_n + \omega_2 + (2\pi)^{-1} \varepsilon P_2(\theta_n, \psi_n)] \bmod 1\end{aligned}\quad (\text{Ec. IV.10})$$

donde la función P_i es una $(N-1)$ función vectorial de las variables del sistema.

Ellos encontraron *numéricamente*, cuatro tipos posible de atractores: (a) cuasiperiodicidad de tres frecuencias, (b) cuasiperiodicidad de dos frecuencias, (c) periódico con una frecuencia y (d) caótico. Esta clasificación, se basa en el cálculo de los exponentes de Lyapunov de las Ec. (IV.10). Cuando η es suficientemente pequeño, el sistema se comporta fundamentalmente como cuasiperiódico con tres frecuencias, mientras que, cuando crece, el sistema solo es estable con dos frecuencias, y para η grandes el sistema es caótico.

El número de trabajos experimentales en que se ha observado cuasiperiodicidad con tres frecuencias, es mucho menor que para dos frecuencias o para el modelo de Curry & Yorke. Algunos se han llevado a cabo en convección [66], aunque la gran mayoría fueron realizados en sistemas que permiten un alto grado de control sobre sus parámetros, como en circuitos electrónicos [67]. Sin embargo no conocemos ningún trabajo en el que la dinámica muestre tres frecuencias espontáneamente. En los trabajos mencionados arriba se utilizan siempre frecuencias externas controladas, para obtener el régimen cuasiperiódico deseado.

No es sencillo determinar en cual de estos regímenes se encuentra nuestro sistema contando tan solo con *una* variable temporal, como por ejemplo la temperatura. Necesitamos una herramienta que nos ayude a decidir si el sistema se encuentra en un régimen cuasiperiódico o caótico. La más común de ellas –la sección de Poincare–, exige el muestreo estroboscópico de la señal temporal. Esto exige una gran precisión en la medida de al menos una de las frecuencias presentes en el sistema.

Este método fue llevado a la práctica por P. Bergé [64] en un sistema de Bénard-Rayleigh con pequeña relación de aspecto. En él pudieron identificar espacialmente los dos osciladores, medir su variación temporal y derivarla analógicamente; la sección de Poincare se determinó directamente a partir de estas señales. En nuestro caso, no ha sido factible implementar esta técnica, pues no se pueden separar espacialmente los osciladores. Debido al tiempo finito de muestreo, además, la derivada numérica resulta inadecuada para obtener un mapa estroboscópico adecuado.

Por otra parte, la herramienta utilizada por Grebogi, Ott & Yorke [65], difícilmente puede ser calculada con una precisión razonable en la mayoría de las situaciones experimentales. También hemos comprobado que la integral de correlación, tampoco entrega resultados fiables para la cantidad típica de puntos de nuestras medidas.

Descartados estos indicadores, utilizaremos: 1) el espectro de potencias de la señal temporal, que debería presentar un cambio en su ancho de banda cuando se alcance el caos y 2) la función de autocorrelación de la señal temporal, con los criterios que detallamos a continuación.

Por definición, la función de autocorrelación de una señal temporal $h(t)$ es :

$$A(t) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T h(\tau)h(t + \tau)d\tau \quad (\text{Ec. IV.11})$$

donde el intervalo T es muy grande respecto del período característico de la oscilación. $A(t)$ indica el grado de semejanza de una señal temporal consigo misma, en función del intervalo de tiempo transcurrido entre observaciones. Una de las ventajas de esta función es que puede ser calculada muy rápidamente, inclusive en tiempo real, a partir de la FFT de la señal en cuestión.

Si una señal es periódica, $A(t)$ también lo es, mientras que, para señales caóticas o aleatorias, $A(t) \rightarrow 0$ para algún valor de $t > t_c$ siendo t_c algún tiempo característico. Hemos calculado la forma de esta función para diferentes tipos de señales temporales con el fin de compararla con nuestra señal temporal. En la Figura IV.22.a puede verse la función de autocorrelación de una señal temporal monoperiódica, mientras que en el segundo (Figura IV.22.b), la señal es ruido blanco que hace que $A(t)$ decaiga abruptamente a cero. En la Fig IV.22.c, hemos tomado como señal temporal una de las variables del modelo de Lorenz; el decaimiento, aunque menor que para el caso del ruido, es mucho más rápido que uno exponencial. Finalmente, en la Figura IV.22.d, la señal temporal corresponde a la temperatura en una de las cuatro celdas convectivas de la celda A (Figura IV.1). En este caso, la función decrece algo más lentamente que en el caso anterior, aunque siempre más rápido que un decaimiento exponencial.

Una vez discutida la función de correlación, se procede como sigue: 1) calcular la función de autocorrelación para un intervalo de tiempo correspondiente a más de 200 veces el período característico de oscilación. 2) Verificar que el amortiguamiento (es decir la envolvente de la función) es menor que el exponencial con un tiempo crítico de 100 veces el período típico de oscilación. Hemos verificado la fiabilidad de este criterio, que es mucho más restrictivo que los usualmente utilizados en la literatura para caracterizar el caos por medio de la autocorrelación [68].

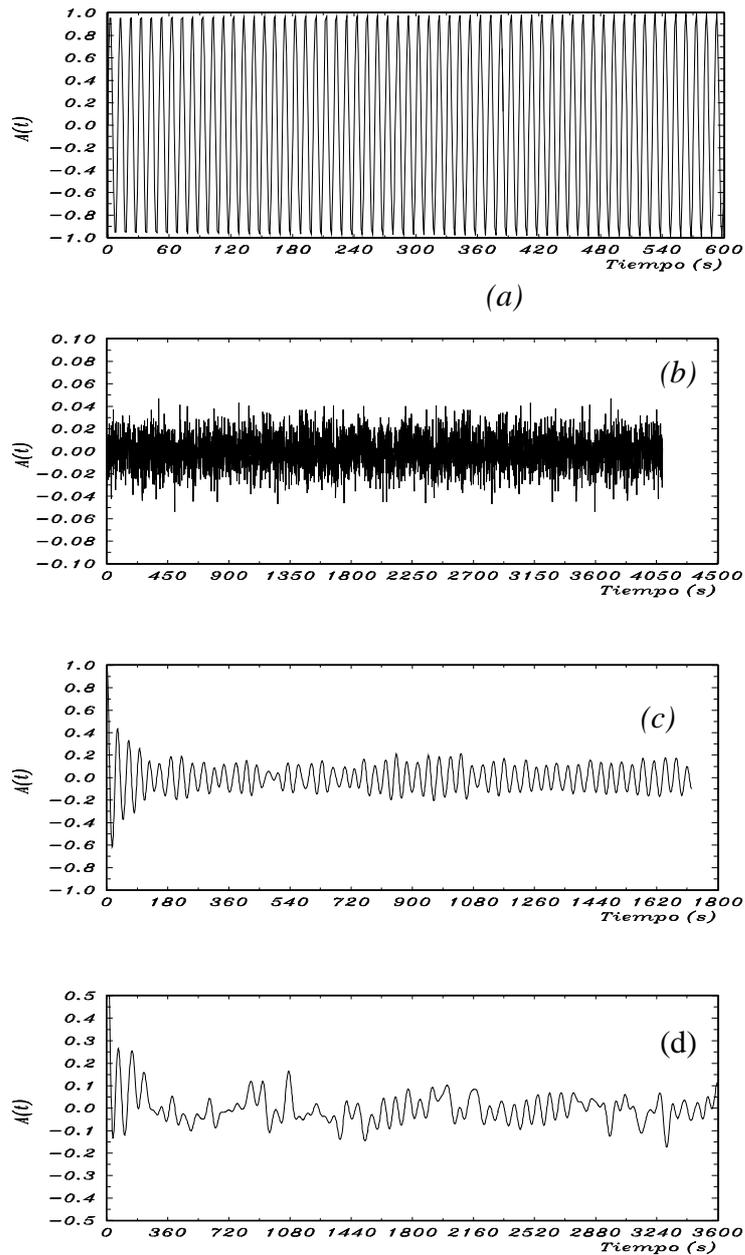


Figura IV. 22 Función de autocorrelación para diferente tipo de señales temporales (a) Señal periódica, (b) ruido blanco, (c) modelo de Lorenz y (d) señal temporal de la Fig..IV.1.

Comprobamos así que la señal temporal de la temperatura a diferentes alturas, tiene diferentes grados de correlación. Su comportamiento puede verse en la Figura IV.23. En las regiones próximas al fondo, la señal está altamente correlacionada y no es caótica; una vez superados los 10 mm la señal a largo plazo se vuelve altamente descorrelacionada. Este comportamiento no es extraño, pues como ya comentamos, por encima de los 10 mm la región central de la estructura convectiva es muy sensible a las perturbaciones, de manera que el ruido propio y el inducido por el termopar, son, sin duda, responsables de esta modificación. Como el grado de acoplamiento no lineal entre las frecuencias aumenta con la distancia al calefactor, podríamos variar el parámetro η de la Ec. (IV.10), a pesar de tener un control externo de esta cantidad. A medida que nos

alejamos del calefactor, nos moveríamos hacia arriba en el gráfico de las lenguas de Arnold (Figura 21.b), y podríamos observar un cambio en el *número de rotación* de las dos frecuencias. Para esta profundidad, y dentro de nuestra resolución experimental, no encontramos tal comportamiento.

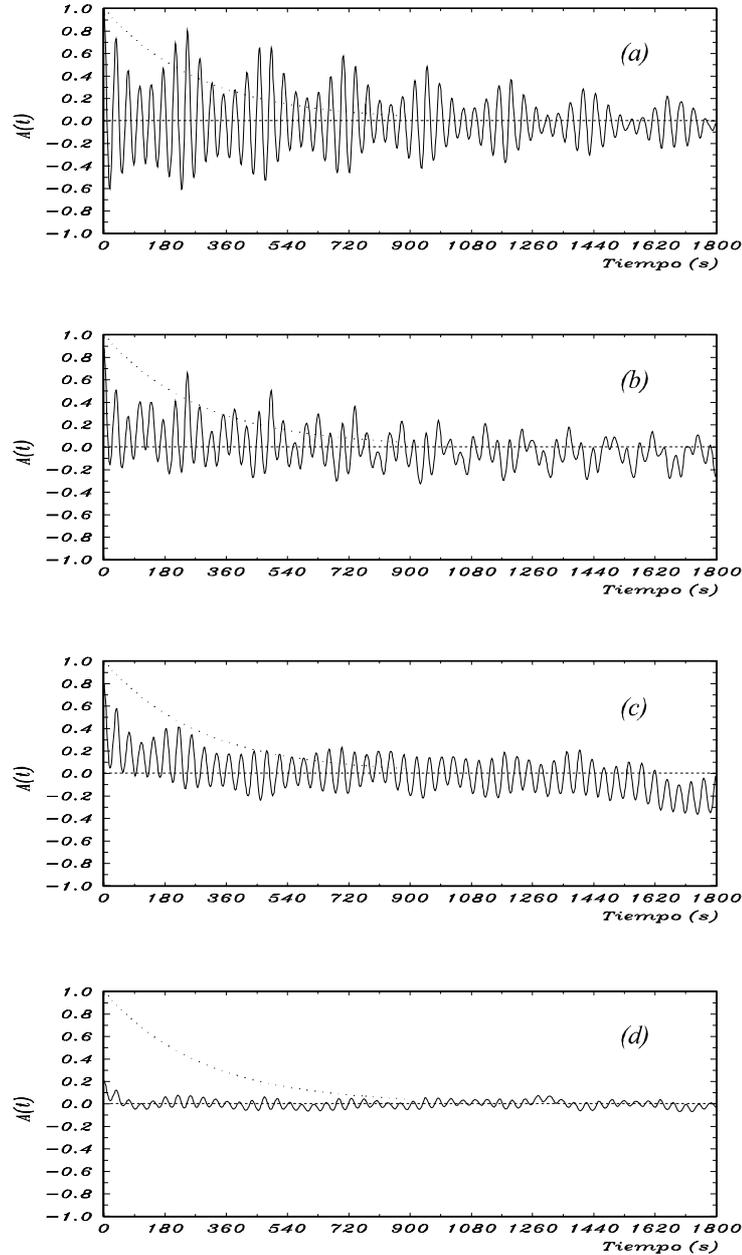


Figura IV.23 Función de correlación para diferentes alturas. (a) 2mm, (b) 5 mm, (c) 11mm y (d) 13 mm.

Una vez corroborado que en el umbral el régimen es cuasiperiódico, comenzamos a elevar la temperatura del calefactor. Hemos colocado nuestro termopar 7mm por encima del calefactor, pues a esta altura, las dos frecuencias están bien marcadas en el espectro de potencias, y la función de autocorrelación no es excesivamente sensible al ruido. En la Figura IV.24 se muestran algunas señales temporales en función de la temperatura del calefactor, y en la Figura IV.25 los espectros de potencias correspondientes.

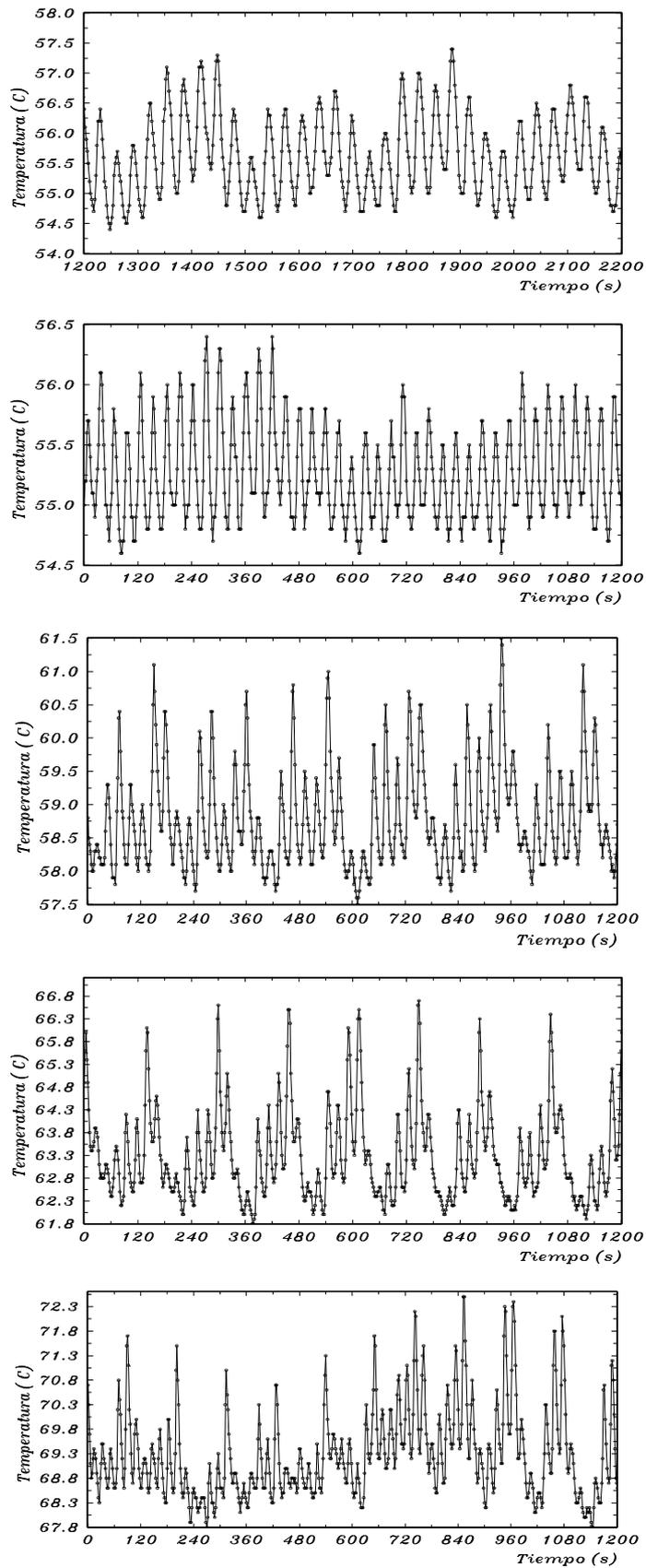


Figura IV:24 Señal temporal para diferentes valores de la temperatura del calefactor

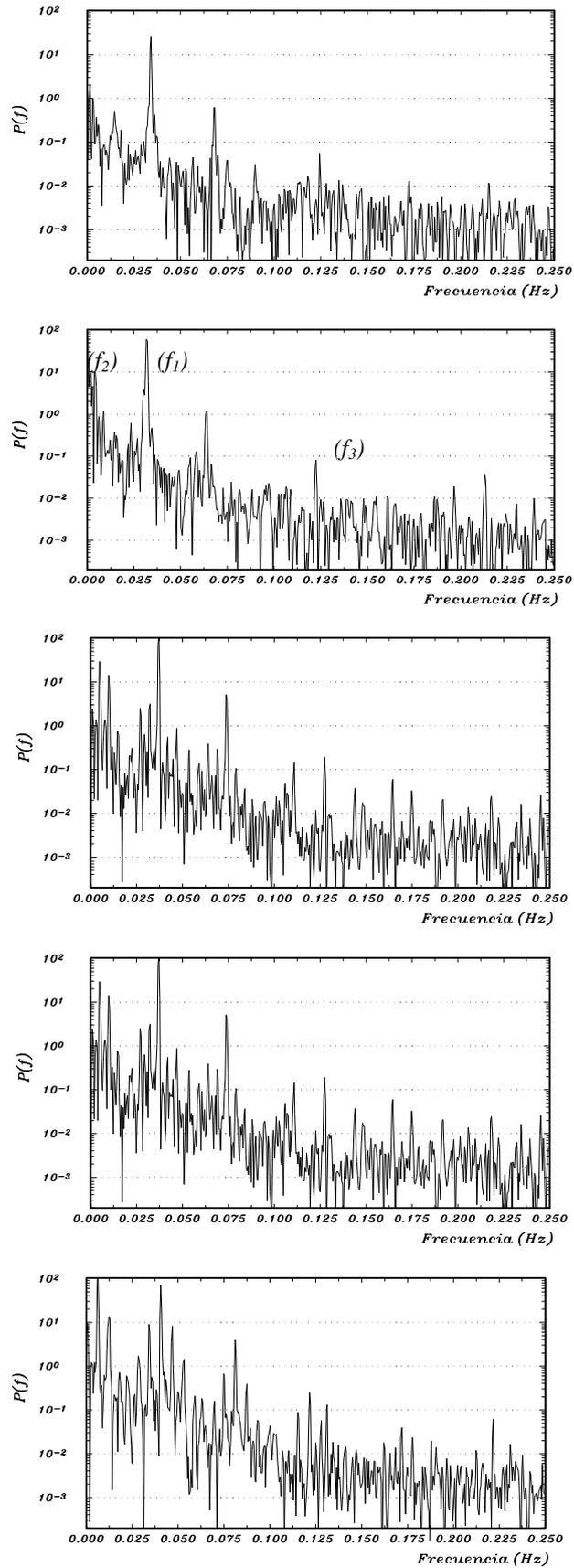


Figura IV.25 Espectros de potencias correspondientes a las señales temporales de la Figura IV.24

En la primera de las transformadas de la Figura IV.25, destaca una de las frecuencias (f_1), sobre la otra (f_2) –dos órdenes de magnitud menor–, y aparece un nuevo pico por encima del ruido, que denominaremos f_3 . Este nuevo pico parece indicar que, para valores de la temperatura del calefactor cercanos al umbral, el sistema sufre una nueva transición a un régimen *cuasiperiódico con tres frecuencias*, pues no existe ninguna terna de números (m_1, m_2, m_3) tales que la (Ec. IV.5) se haga cero. Hemos verificado que estas tres frecuencias son necesarias y suficientes para describir el espectro de potencias, generando todas las combinaciones posibles hasta $m_i = 5$ y contrastándolas con la posición de los picos del espectro de potencias. Comprobamos además, que f_2/f_1 , f_3/f_1 , f_3/f_2 varían con ΔT , lo cual también indica que son inconmensurables. Al aumentar la temperatura, la función de autocorrelación (Figura IV.26) indica que el sistema se mantiene en un régimen cuasiperiódico.

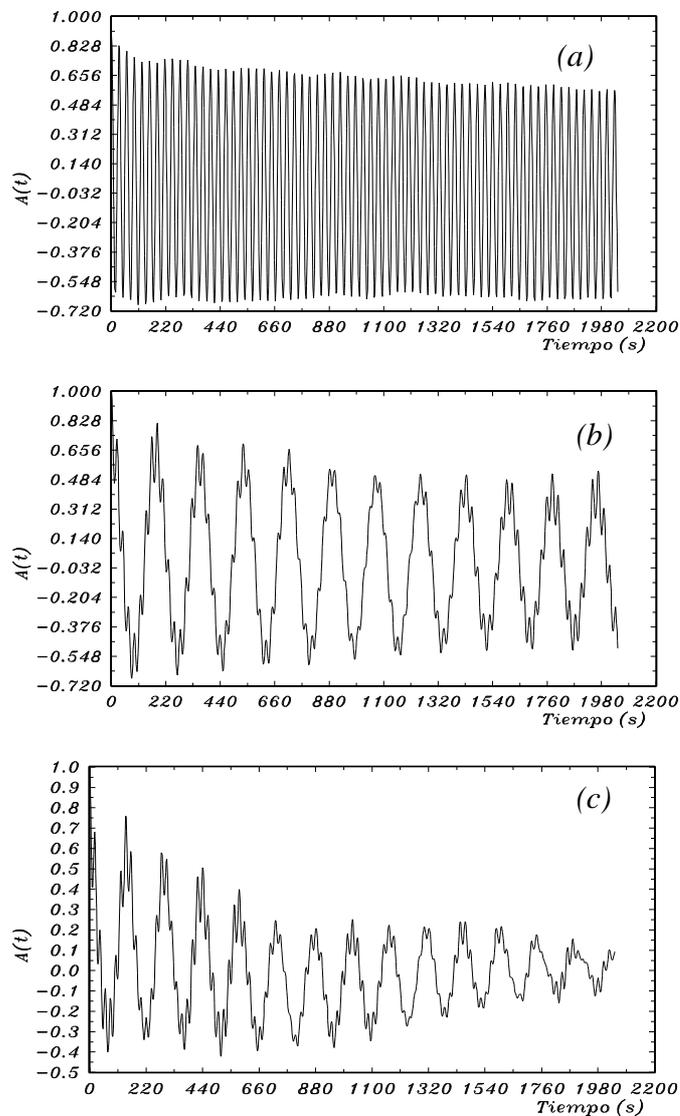


Figura IV.26 Función de autocorrelación. (a) $\varepsilon = 0.1$, (b) $\varepsilon = 0.25$ y (c) $\varepsilon = 0.47$

Cuando aumentamos la temperatura del calefactor, la amplitud de f_1 en el espectro de potencias permanece prácticamente constante, mientras que f_2 se hace

dominante y f_3 también crece. Como también crece la amplitud de la señal temporal, hemos calculado la raíz cuadrática media de ellas en función del parámetro de control. Debido al carácter irregular de las señales, se calcula la rcm para diferentes intervalos de tiempo y luego se promedia. Los resultados se muestran en la Figura IV. 27, en función del parámetro $\varepsilon' = (\Delta T / \Delta T_{co} - 1)$, donde ΔT_{co} es la diferencia de temperatura umbral de las oscilaciones. El crecimiento es claramente no lineal, y, si bien el exponente que mejor lo ajusta es 0.47 ± 0.05 , las barras de error de los puntos son tan importantes que podemos suponer que la raíz cuadrática media de las oscilaciones es proporcional a $(\varepsilon')^{1/2}$

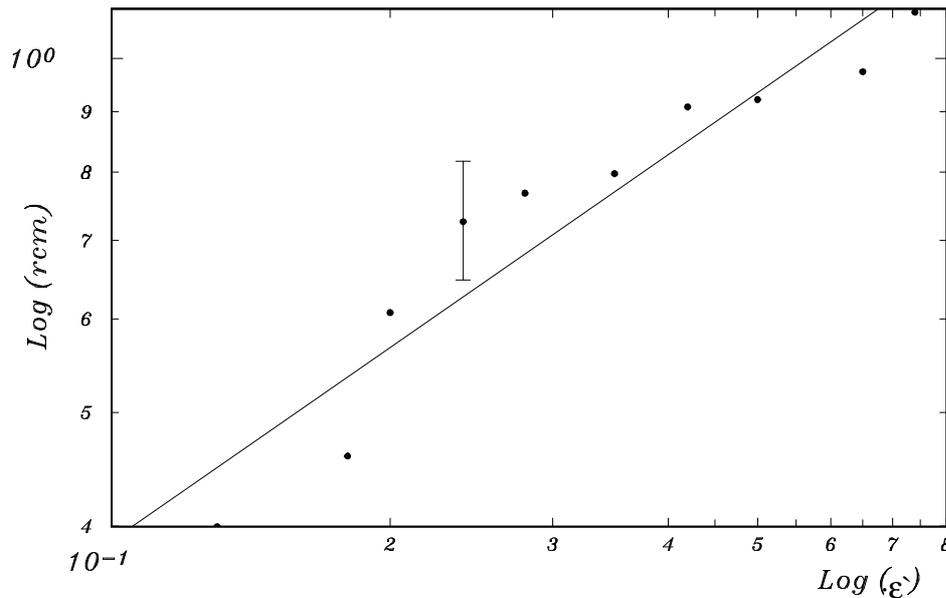


Figura IV.27 Crecimiento de la raíz cuadrática media (rcm) de las oscilaciones en función del parámetro de control.

Debido a que los tiempos de decaimiento de $A(t)$ disminuyen lentamente al aumentar la temperatura, no es posible estudiar señales muy alejadas del umbral, pues se dañaría la celda. Conseguimos bajar el umbral de oscilación, usando silicona de 100 cSt, alcanzándose así valores mayores de ε con la misma temperatura máxima de ruptura.

En la Figura IV.28 se recogen las oscilaciones de la temperatura para silicona de 100 cSt y su espectro de potencias en función de la temperatura del calefactor. Destaquemos que el orden de magnitud de las frecuencias que aparecen, coincide con las presentes para 350 cSt, aunque su amplitud es mucho menor.

Con esta silicona, comprobamos como aumenta el acoplamiento entre las diferentes frecuencias al alejarnos del umbral, y no aparece una banda ancha alrededor de ninguna de las componentes. La función de autocorrelación (Figura IV.29), decae más rápidamente a medida que aumenta la temperatura del calefactor. Este decaimiento, llega a ser pronunciado sólo para valores muy alejados del umbral, existe un intervalo de temperaturas del calefactor, para las cuales no es posible afirmar sin ambigüedad que el sistema se encuentre en un régimen caótico. Desconocemos por tanto, el valor exacto de la temperatura del calefactor para la cual el sistema se vuelve caótico.

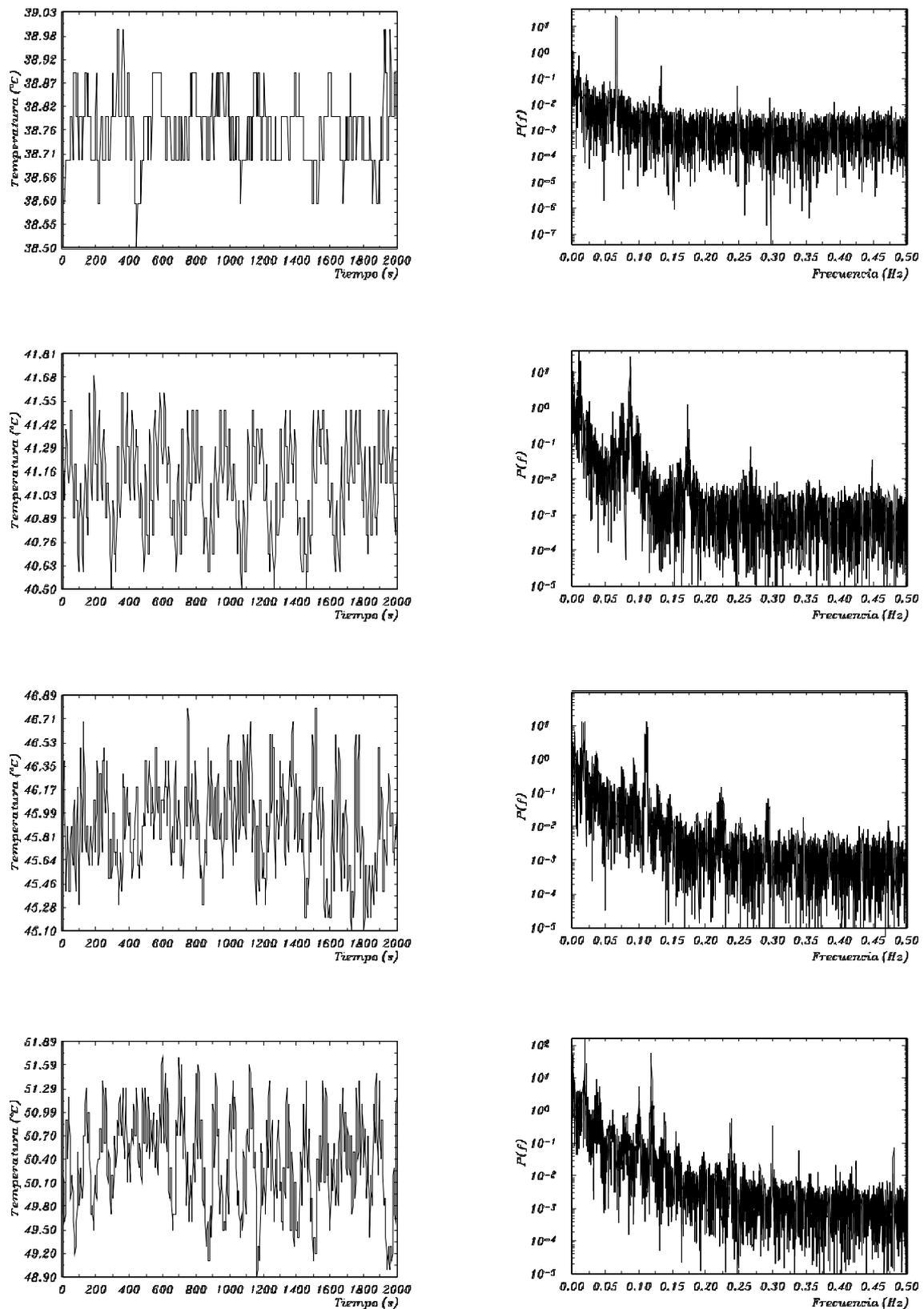


Figura IV. 28 a) Oscilaciones de temperatura cuando el fluido era silicona de 100 cSt y b) su espectro de potencias

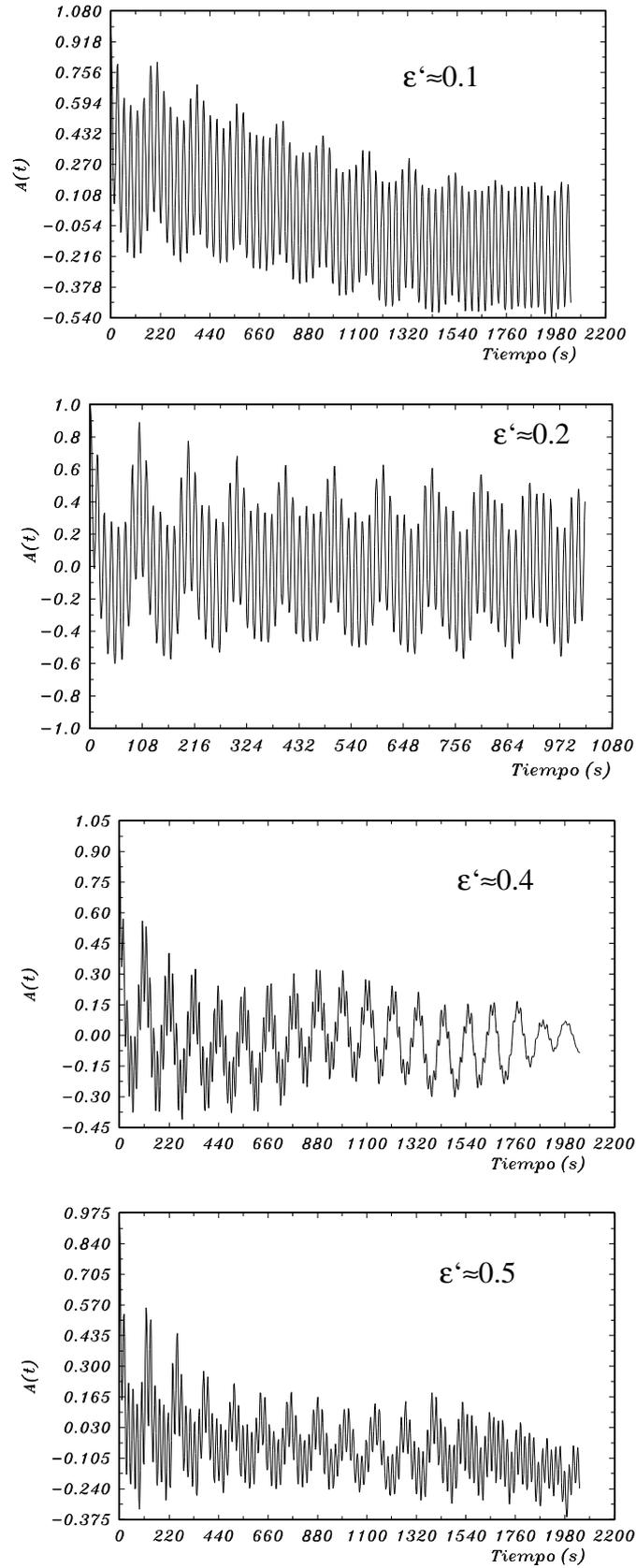


Figura IV.29 Función de autocorrelación en función del parámetro de control para silicona de 100 cSt.

IV.2.d Dependencia de la frecuencia con la temperatura:

Una vez determinado el esquema básico de la transición al caos en nuestro sistema (Figura IV.30), estudiamos la dependencia de las frecuencias en función del parámetro de control. Esta dependencia, nos permitirá establecer relaciones que serán útiles en el próximo capítulo cuando discutamos el origen de la dinámica observada en función de su comportamiento hidrodinámico.

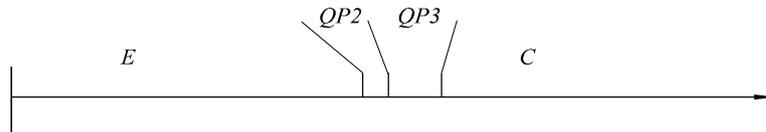


Figura IV.30 Esquema de las inestabilidades que atraviesa el sistema hasta llegar al caos. E=régimen estacionario, QP2=cuasiperiodicidad con 2 frecuencias, QP3=cuasiperiodicidad con 3 frecuencias, C=caos

Como mencionamos en párrafos anteriores, las relaciones f_2/f_1 , f_3/f_1 , f_3/f_2 dependen del parámetro de control. Esta dependencia, podría dar lugar a regiones en el espacio de los parámetros en las que se produzca una *sincronización de frecuencias* (mode locking), pues cada una de ellas tiene tasas de crecimientos diferentes. Tal comportamiento, sin embargo, no ha sido observado en los experimentos a pesar que las relaciones entre frecuencias pueden escribirse *a pares* – en forma racional p/q . Este hecho ha sido reportado en otros sistemas experimentales [69].

Existe una región donde se cumple que $f_3 \cong 3f_1$, y se puede hablar de *cierto grado de "sincronismo"*. En la Figura IV.31 se puede confrontar $P(f)$ antes de llegar a ella y cuando nos hallamos en dicha región. Las diferencias cualitativas son claras: en el primer caso el número de picos indican la presencia de tres frecuencias (Figura IV.31.a), mientras que en el segundo el número de picos disminuye notablemente (Figura IV.31.b).

En las inmediaciones de esta región del espacio de parámetros, podríamos esperar una *ventana* en la cual un toro T^3 se transforma en uno T^2 , es decir, donde el sistema *regresa* a un estado cuasiperiódico de dos frecuencias.

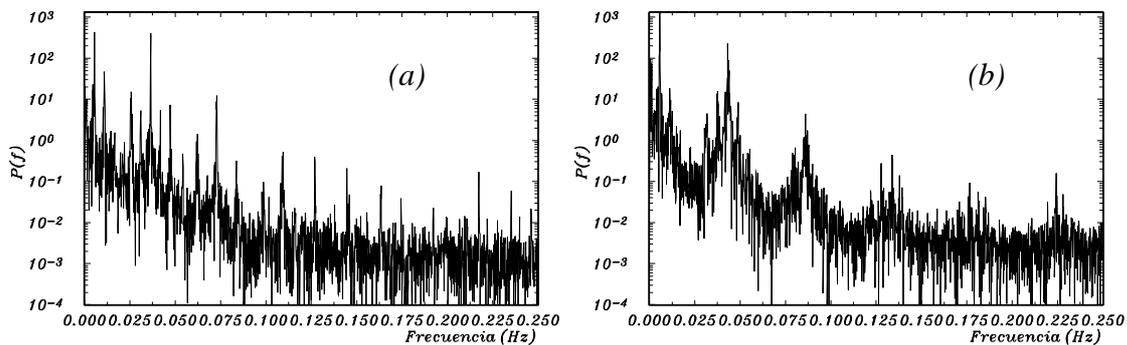


Figura IV.31 Espectro de potencias para las señales donde se cumple: a) $f_3 \neq 3f_1$ y b) $f_3 \cong 3f_1$

La dependencia de estas frecuencias en función del parámetro de control $\varepsilon' = (\Delta T / \Delta T_{c0} - 1)$, pueden verse en la Figura IV.32. Es interesante destacar que entre ellas existe prácticamente un orden de magnitud de diferencia, lo cual no es usual en sistemas

que muestran comportamientos cuasiperiódicos similares. Además, la tasa de crecimiento de las dos siliconas es diferente, aunque son del mismo orden de magnitud.

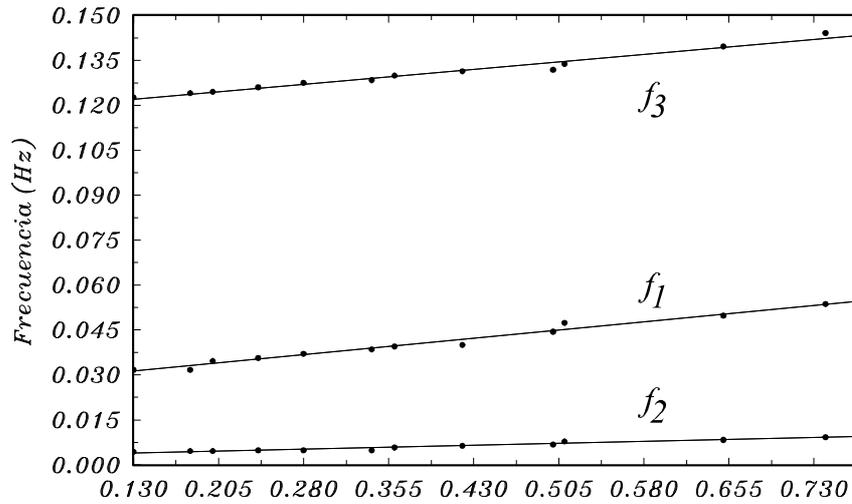


Figura IV.32 Dependencia de la frecuencia con el parámetro de control $\epsilon' = (\Delta T / \Delta T_{co} - 1)$ para la silicona de 350 cSt.

El exponente es diferente para cada frecuencia y su mejor ajuste se muestra por separado en la Figura IV.33.

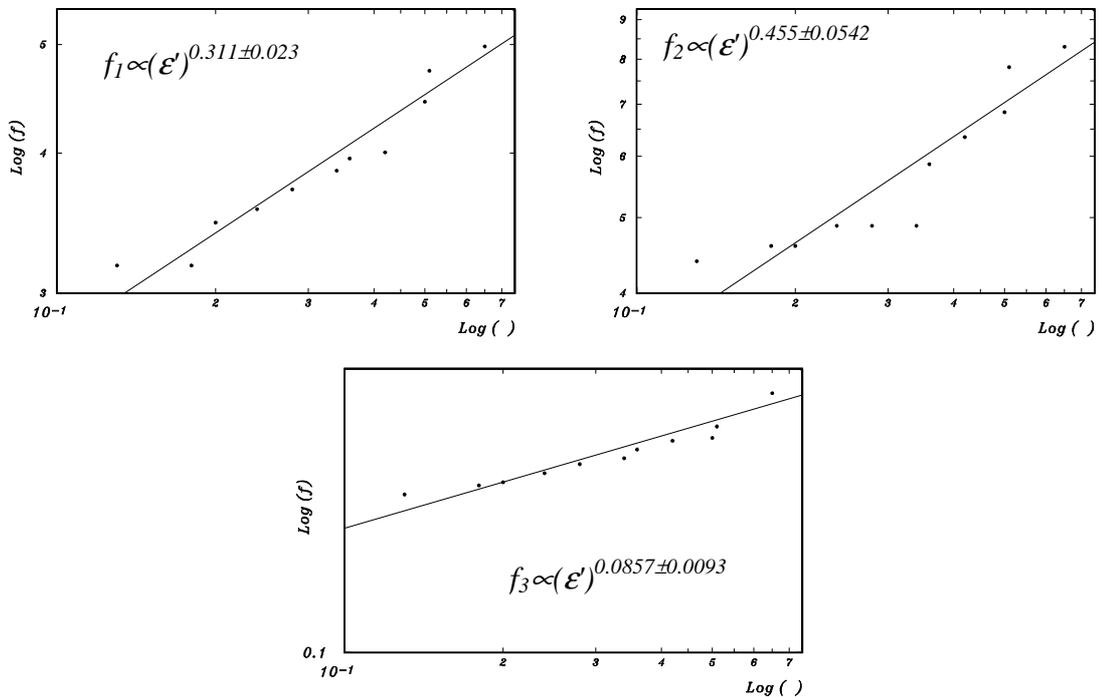


Figura IV.33 Dependencia de las frecuencias con el parámetro ϵ'

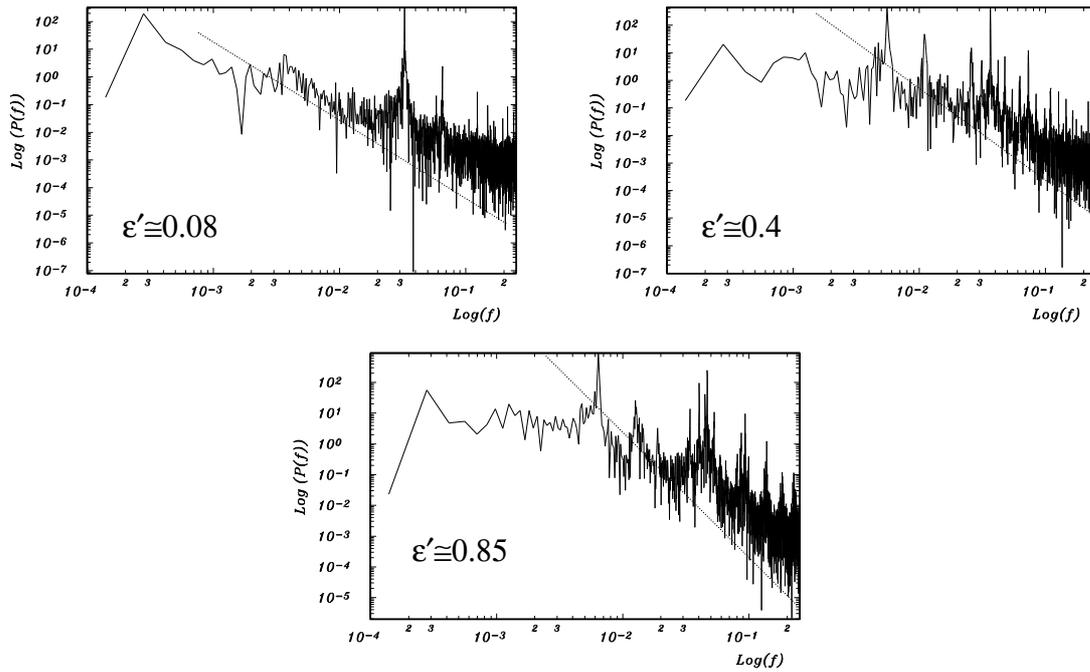


Figura IV.31 Espectros de potencia en función del parámetro de control.

La Figura IV.34, es una representación Log-Log que pone de manifiesto que las componentes del espectro tienen subyacente una ley $f \propto (\epsilon')^\gamma$ (o bien $f \propto \Delta T^\gamma$). Para obtener un valor aproximado de este exponente hemos promediado la transformada de Fourier para varios segmentos de la señal temporal, lo que reduce estadísticamente el ruido, y obtuvimos el valor de γ promediando los exponentes encontrados para $P(f)$ suavizados mediante promedios pesados sobre diferentes números de puntos vecinos. Los valores obtenidos se recogen en la Figura IV.35.

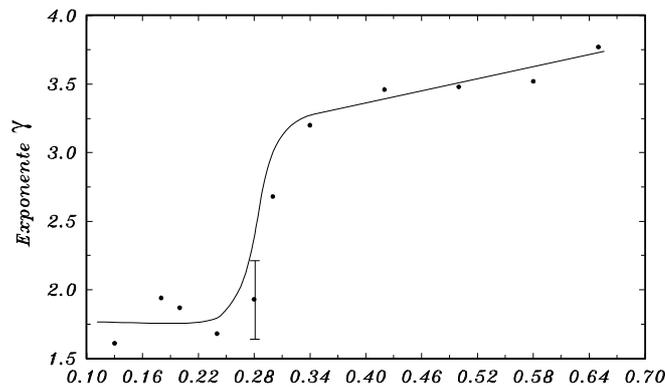


Figura IV.35 Dependencia de γ con la temperatura

En esta gráfica existen dos regiones bien diferenciadas: para valores próximos al umbral γ es prácticamente constante, mientras que luego de un cambio brusco en su magnitud, crece suavemente cuando nos alejamos de él. Esto concuerda con la transición al caos que observamos mediante $A(t)$, ya que la zona donde γ cambia coincide con aquella donde $A(t)$ es muy irregular. Tal coincidencia sugiere la posibilidad de que la transición al caos se deba –al menos en parte– a la aparición de ruido $1/f$. Esta posibilidad resulta difícil de cuantificar no sólo por la imprecisión experimental, sino también por la falta de acuerdo entre diferentes autores [70] sobre este fenómeno.

IV.2.e Oscilaciones y superficie

Discutiremos en esta sección el aspecto quizás más novedoso de nuestro sistema convectivo, esto es, el acoplamiento de la dinámica temporal generada en el interior del fluido con la dinámica de la superficie. Descartadas las ondas capilares –cuya longitud de onda característica es dos órdenes de magnitud menor que las observadas aquí–, parece que los pulsos que se desplazan *"por la superficie"* podrían ser "ondas de superficie" o estar asociados a un fenómeno de "arrastre difusivo" debido al flujo principal. En otras palabras: ¿son estos pulsos, *ondas hidrotermales* como las propuestas por Smith [71]?

La respuesta a esta pregunta no es sencilla y es, en la actualidad, motivo de discusión. Solo hemos podido encontrar algunos resultados que arrojan algo de luz sobre esta cuestión. Una detallada discusión se puede encontrar en la referencia [41].

Sabiendo que las depresiones de la superficie coinciden con la presencia de fluido más caliente, utilizamos una pequeña cantidad de polvo de aluminio para comprobar que la velocidad media del flujo en la superficie coincide con la de la deformación, medida mediante el análisis espacio-temporal del perfil generado por el pincel laser (Figura IV.36).

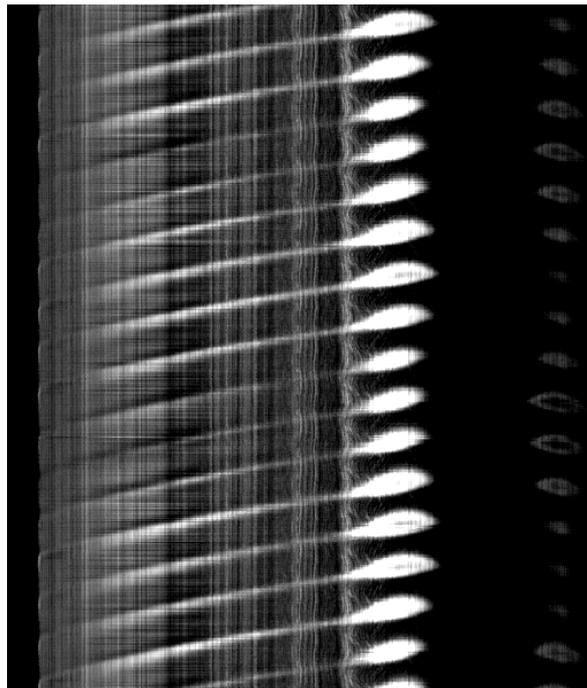


Figura IV.36 Imagen espacio-temporal de la deformación de la superficie.

Para determinar si el pulso está asociado a un fenómeno disipativo, debemos verificar que la velocidad del *"frente de temperatura"* coincida con la velocidad del flujo y la deformación. Para ello hemos utilizado dos sensores infrarrojos separados una distancia calibrada, que miden la temperatura de la superficie en dos puntos simultáneamente. Una vez obtenida la señal temporal para un intervalo de tiempo de más de 2000 períodos de oscilación, hemos calculado la función de correlación cruzada (cross-correlation function):

$$Cc(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} T_1(t)T_2(t + \tau)dt \quad (\text{Ec IV.12})$$

donde $T_{1,2}$ es la temperatura en cada uno de los sensores. Por definición $Cc(\tau)$ mide el grado de "igualdad" entre una señal y su réplica desplazada temporalmente. Así, la Ec. (IV.12) tiene un máximo que corresponde a la diferencia temporal de llegada de la señal a cada uno de los sensores. La forma resultante de esta función para una secuencia de datos se muestra en la Figura IV.37.

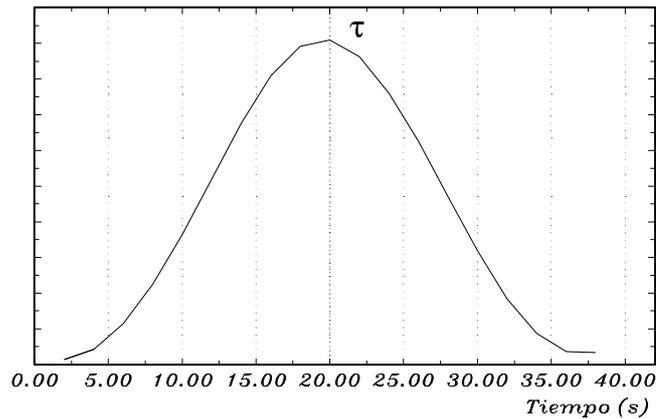


Figura IV.37 Función de correlación cruzada para dos sensores infrarrojos espaciados 20 mm entre sí.

Debido a que la resolución temporal de esta función está fijada por el intervalo de muestreo (2 s en nuestro caso), el error en la determinación del valor máximo es muy elevado. Para mejorarlo, determinamos esta diferencia de tiempo calculando la pendiente de la función en el espacio de fase del "espectro cruzado" (cross spectrum). Esta pendiente es igual a $2\pi\tau$ [72], y a partir de ella podemos determinar τ con mayor precisión. La curva correspondiente a la Figura IV.37 puede verse en la Figura IV.38.

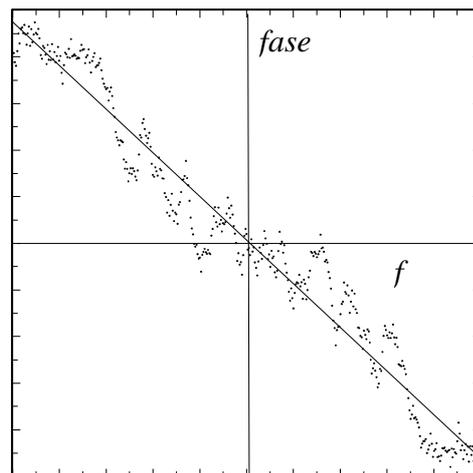


Figura IV.38 Espectro cruzado para la misma señal que en la Figura IV.37.

De esta manera, hemos calculado la velocidad del frente colocando los sensores en diferentes posiciones en la celda. La coincidencia con la velocidad anterior es excelente considerando que todas las medidas están afectadas de un error relativo del 10%.

La aparición de las oscilaciones no altera de forma significativa los perfiles de temperatura *media* a lo largo de los ejes y de las diagonales (Figura III.24). La raíz cuadrática media de las oscilaciones a lo largo de los ejes, decae suavemente (excepto en el centro y los bordes), mientras que sobre la diagonal, su valor es mucho menor y desaparecen casi completamente más allá de los 40 mm como se observa en la Figura IV.39. Esta evolución, muestra que los pulsos –cuya forma coincide con un frente hiperbólico como los mostrados en el Cap. III– tienen también una distribución espacial de temperatura definida, cuya amplitud es máxima sobre los ejes.

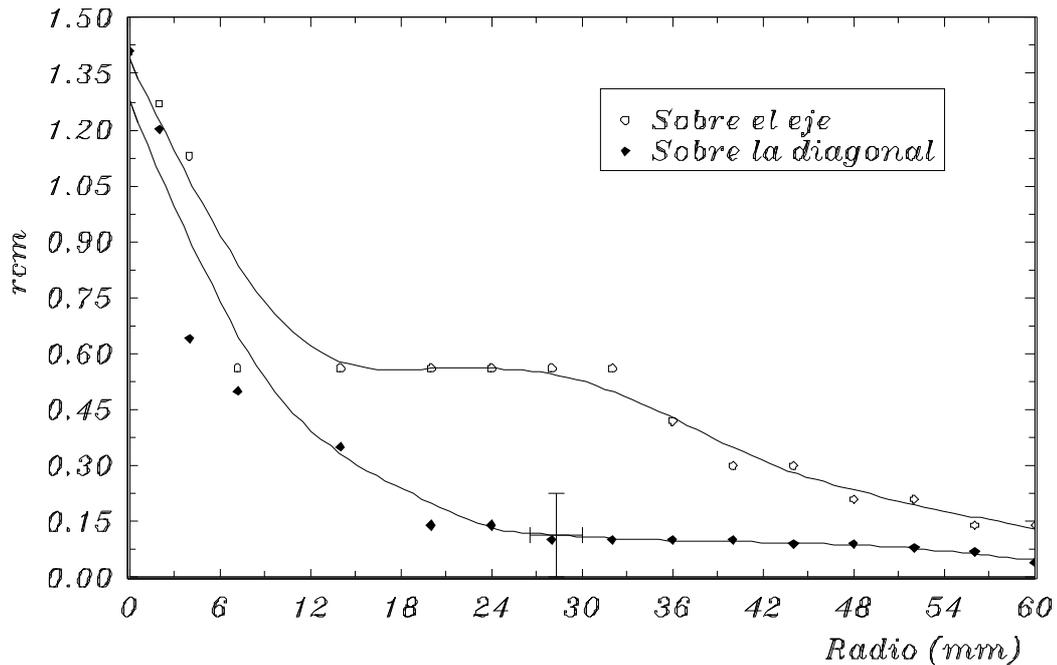


Figura IV.39 Raíz cuadrática media de las oscilaciones a lo largo de los ejes y las diagonales

Para analizar la dinámica de la superficie, centramos nuestra atención en la señal temporal de la temperatura medida a 20 mm del centro, y también en uno de los "vértices del cuadrado central" del planform. Ambas señales están comparadas en la Figura IV.40. Resulta claro que para valores próximos al umbral, las oscilaciones de temperatura presentan una forma prácticamente armónica, mientras que, a medida que crece la temperatura del calefactor, adquieren una forma semejante a oscilaciones de relajación. Lo mismo ocurre para el planform: para valores alejados del umbral llega suavemente a su máxima elongación, y recupera rápidamente su posición original para comenzar nuevamente el ciclo.

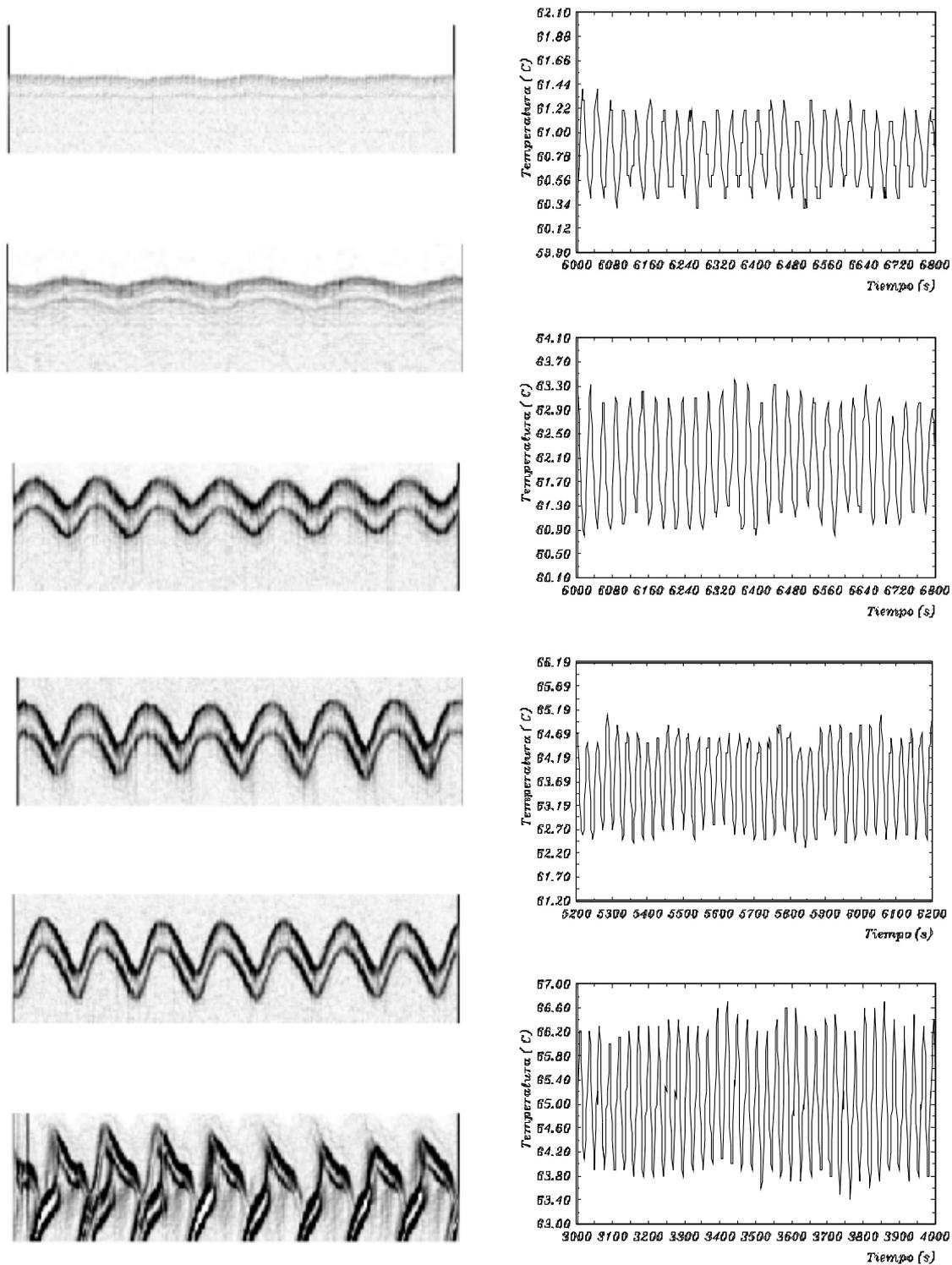


Figura IV.40 Oscilaciones del planform y la temperatura en función del parámetro de control.

Hemos comparado estas oscilaciones con las de un oscilador de Van der Pool en la Figura IV.41. Para valores del parámetro de control próximos al umbral, el sistema describe órbitas prácticamente circulares. Por el contrario, cuando el parámetro de control crece las trayectorias del espacio de las fases se comportan como oscilaciones de relajación.

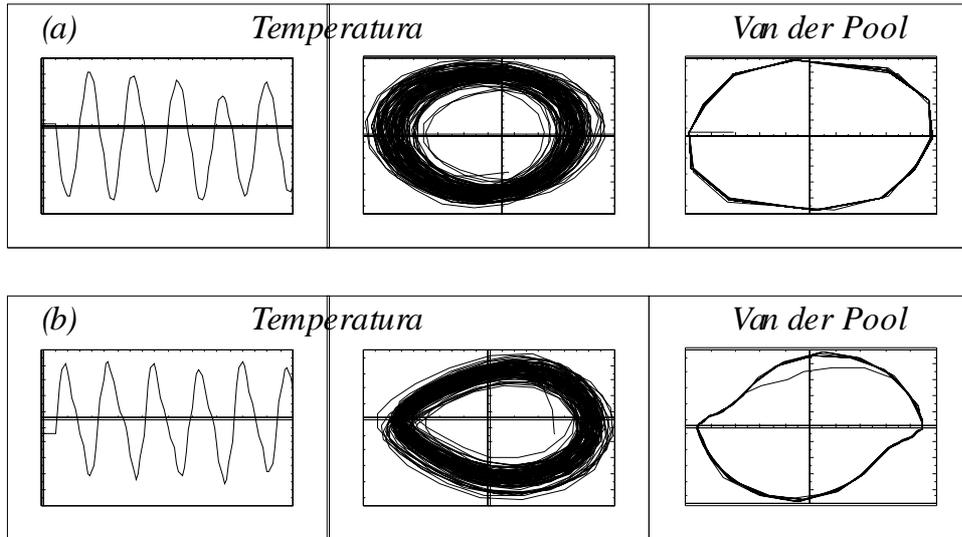


Figura IV.41 Comparación entre las órbitas de la señal temporal de la temperatura y las de un oscilador de Van der Pool (a) Cerca del umbral y (b) lejos del umbral .

Esta comparación es sólo cualitativa y no pretende de ningún modo *modelar* la dinámica temporal de la superficie. No debemos olvidar que las oscilaciones generadas por un oscilador de Van der. Pool son el resultado de un suministro *continuo* de energía, mientras que las oscilaciones de la superficie aparecen a consecuencia de las oscilaciones en el flujo.

Los espectros de potencia de las señales temporales en función del parámetro de control, muestran la presencia de f_1 , que coincide exactamente con el valor obtenido con el flujo. Sin embargo, $P(f)$ cerca del umbral no muestra la presencia de f_2 , ni f_3 de manera que la superficie actúa como un *filtro pasabanda* (Figura IV.42).

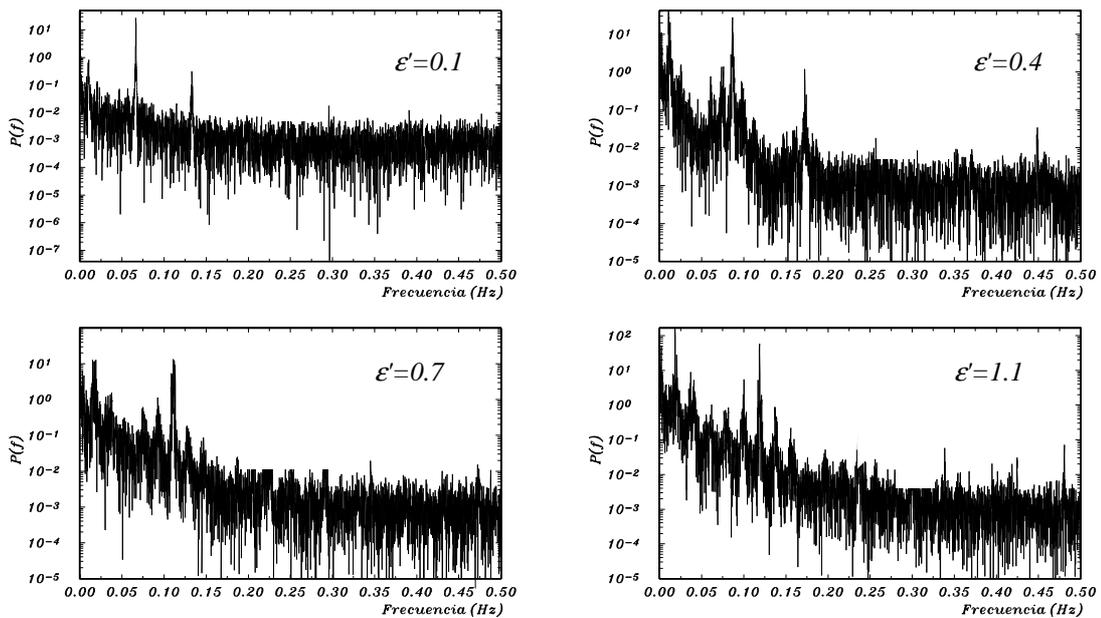


Figura IV.42 Espectros de potencia en función del parámetro de control

Si continuamos aumentando la temperatura, existe un cambio brusco en la deformación de la superficie. El planform pierde su simetría respecto al centro, dando paso a estructuras desordenadas (Figura IV.43) de difícil interpretación. A partir de aquí la frecuencia que resalta en el espectro es f_2 , aunque f_1 continúa presente y f_3 no aparece.

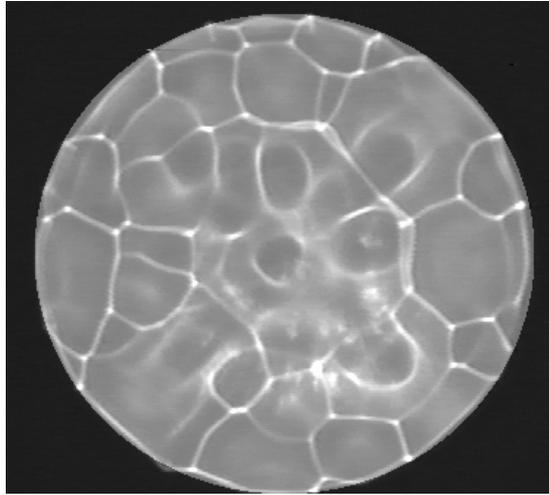


Figura IV.43 Planform de la superficie para valores del parámetro de control muy alejados del umbral.

Este comportamiento coincide con la región donde se produce la transición al caos, lo que también ocurre para la señal de la temperatura analizada mediante la función de autocorrelación, aunque de un modo más brusco, como se aprecia en la Figura IV.44

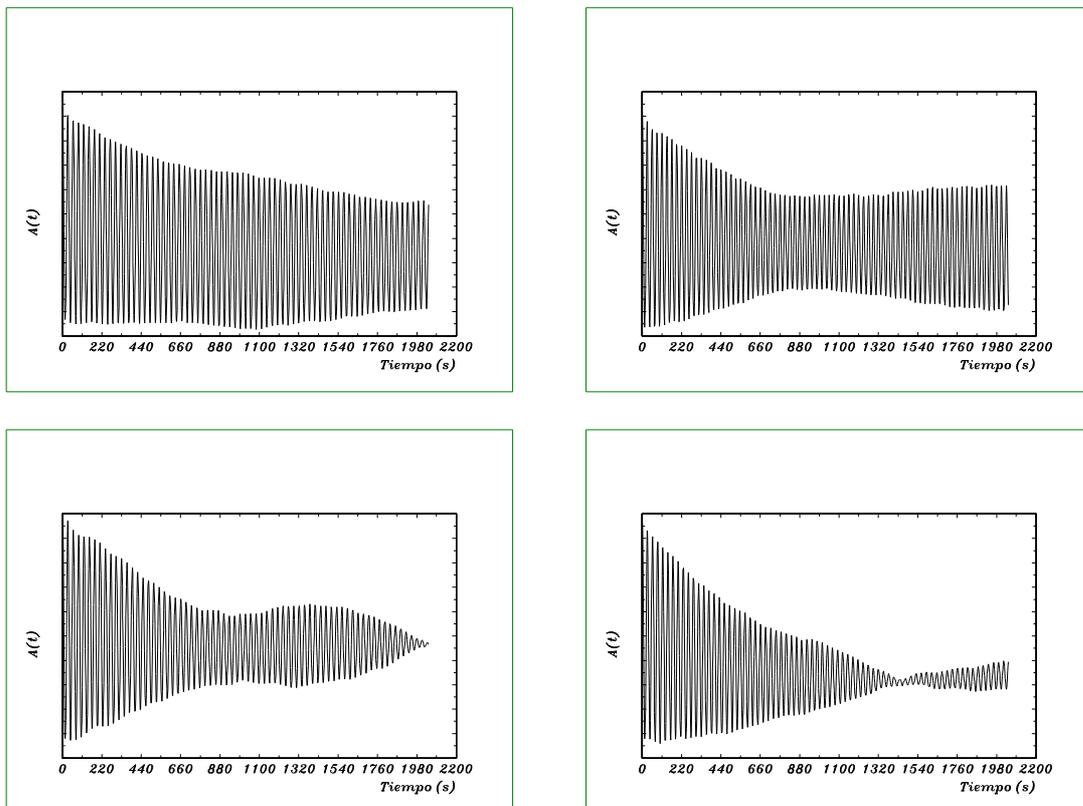


Figura IV.44 Función de autocorrelación para la temperatura.

Finalmente, hemos estudiado como crece la r_{cm} de las oscilaciones de temperatura en función del parámetro $\varepsilon' = \left(\frac{\Delta T}{\Delta T_{c,0}} - 1\right)$, con objeto de compararla con la señal del flujo. Las barras de error que acompañan a cada punto se hacen más grandes a medida que ε' aumenta, pues la señal se torna muy irregular por la fuerte influencia que tienen los torbellinos apreciables en el aire. Aun así, la comparación de este crecimiento con el encontrado para las oscilaciones del flujo (Figura IV.27), muestra que *la amplitud de las oscilaciones de superficie crece más lentamente que la del flujo*. Este hecho, unido a la ausencia del pico de alta frecuencia f_3 en el espectro de potencias, implica que la energía correspondiente a este pico no afecta de manera apreciable la dinámica de la superficie.

En el próximo capítulo discutiremos cuál es el origen de estos osciladores y su acoplamiento.

CAPITULO V

COMPARACION ENTRE LAS CONFIGURACIONES USADAS EN LOS EXPERIMENTOS

Hasta aquí hemos detallado una serie de fenómenos dependientes e independientes del tiempo en dos configuraciones convectivas diferentes. Este capítulo recoge las semejanzas y diferencias que se observan entre estos sistemas, lo que nos permitirá ahondar en aquellos fenómenos temporales que los caracterizan.

Se han elegido sistemas con baja relación de aspecto, porque la interpretación de los resultados experimentales es más sencilla, debido a los escasos "*osciladores*" activos en el sistema. Estos osciladores, están agrupados en dos clases bien diferentes de inestabilidad: la desestabilización de las propias *celdas convectivas*; o la del acoplamiento térmico entre el calefactor y el fluido.

Si bien hacia fines de la década de los 70, algunos autores [73] creían que "...sólo la primera clase de fenómenos es de interés intrínseco...", en la actualidad el segundo mecanismo ha atraído nuevamente la atención, dada su importancia en la turbulencia.

En capítulos anteriores, vimos que nuestros sistemas pierden estabilidad dando paso a un comportamiento temporal, cuyo espectro de frecuencias está formado por un número pequeño de componentes. Los estados que pudieron ser interpretados en función de un modelo de baja dimensionalidad (para la celda A), fueron contrastados con los *espectros espaciales*, permitiendo comprobar la presencia de un número finito de *modos espaciales* activos, así como su relación con el planform observado. Sin embargo, el carácter irregular de la señal temporal de la temperatura, cuyo espectro sigue una ley de potencias (Figura V.1), nos indica que sobre estos modos, existe una dinámica subyacente que no puede ser explicada por ellos, y cuya interpretación es aún un tema abierto. Las medidas simultáneas de la temperatura y la estructura espacial, permitirían quizás, dilucidar la paradoja sobre el origen del comportamiento exponencial del espectro de frecuencias (Figura V.1) planteada en el capítulo anterior. ¿Es el

comportamiento temporal de la estructura espacial, producto de una desestabilización intrínseca de las celdas convectivas, o del acoplamiento térmico con el medio?

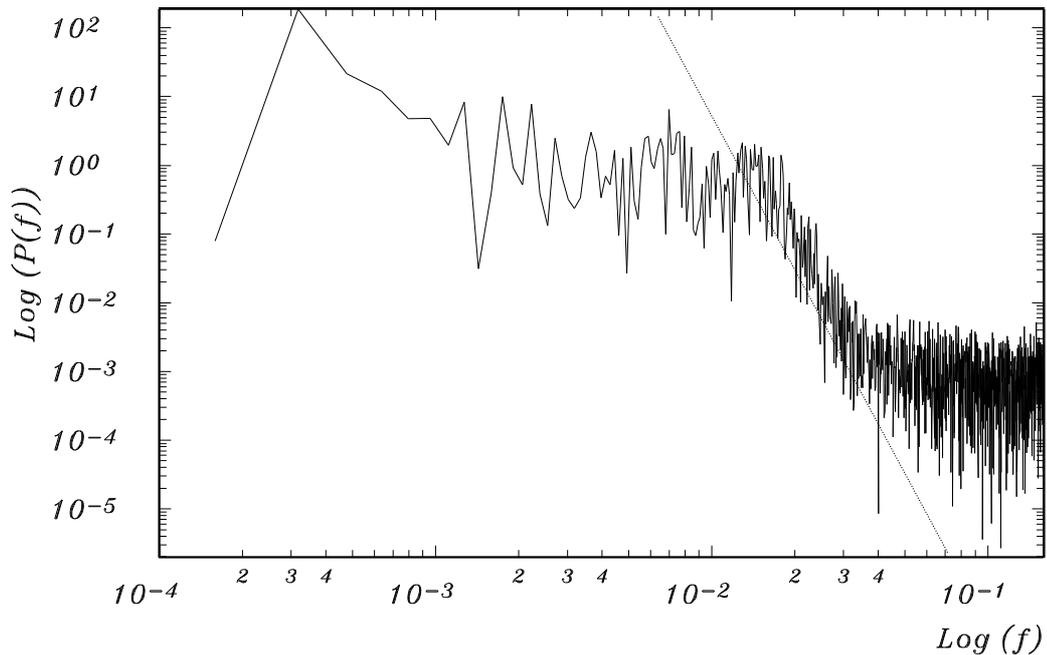


Figura V.1 Espectro de potencias para la señal temporal de la Fig IV.4

Para responder a esta pregunta, se construyó la celda B. La sección efectiva de calentamiento es la misma en las dos celdas, pero ahora las condiciones de contorno son diferentes, tanto térmica como geoméricamente. De esta forma, si el origen de la oscilación está asociado a las celdas convectivas, su comportamiento debería verse radicalmente afectado, mientras que en caso contrario, no deberán existir diferencias importantes, pues la *capa límite térmica* es esencialmente la misma en ambos casos.

Con este nuevo sistema experimental hemos comprobado, primero, que los umbrales de aparición del régimen dependiente del tiempo, difieren tan solo un 5% entre sí, lo que efectivamente evidencia que su origen es esencialmente el mismo, y debe estar vinculado con la capa límite térmica.

Por otra parte, esta afirmación es válida para la componente del espectro que hemos denominado f_1 , pero en la celda B, también intervienen en la dinámica otras dos frecuencias claramente diferenciadas, cuyo origen también desconocemos y pretendemos encontrar.

En ocasiones anteriores [64], se observaron oscilaciones en la capa límite mediante técnicas interferométricas difíciles de ser implementadas en un sistema como el nuestro. Sin embargo, las modulaciones de las propiedades del líquido en las proximidades del fondo, deberían ser detectables por un sistema óptico tan sensible como la ombroscopía. Para mejorar la calidad de la imagen obtenida desde el fondo mejoramos el pulido del calefactor y filtramos la señal que llegaba al detector desde la superficie. Una imagen obtenida por este método puede verse en la Figura V.2

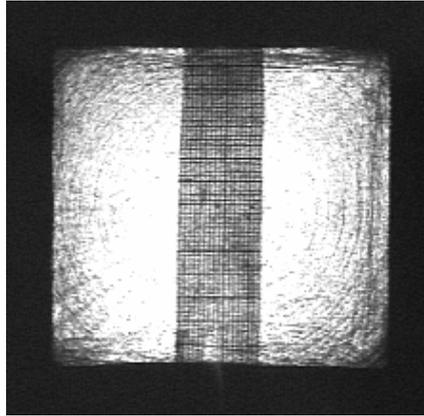
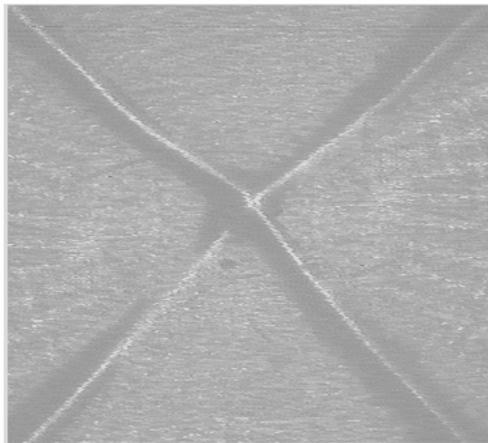


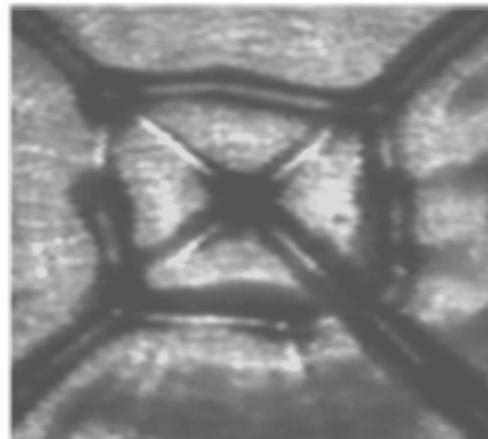
Figura V.2 Imagen del fondo de la celda con calentamiento inhomogéneo luego de filtrada la señal de la superficie. La escala central está para comprobar posibles aberraciones.

Con este filtrado hemos podido comprobar que las oscilaciones de temperatura, están asociadas a una inestabilidad de la capa límite térmica, como mostramos en la Figura V.3. En esta imagen, además de la lente térmica que produce la inhomogeneidad del fluido caliente que asciende por las diagonales (Figura V.3.a), aparecen cuatro frentes paralelos a los lados del calefactor, que no están presentes en el régimen estacionario.

La imagen de la Figura V.3.b, corresponde a valores del parámetro de control bastante alejados del umbral; por eso, los frentes han perdido bastante de su correlación inicial. Sin embargo, éstos nacen *casi* simultáneamente en cada una de las celdas convectivas, y son arrastrados por el flujo principal hacia el centro de la celda. La relación entre estos frentes y la señal temporal de la temperatura es inequívoca, y hemos determinado que la frecuencia f_l está unívocamente relacionada con ellos.



(a)



(b)

Figura V.3 Inestabilidad oscilatoria de la capa límite del fluido. a) Régimen estacionario, b) régimen dependiente del tiempo.

Determinamos también la dependencia de la inestabilidad en función del parámetro de control, analizando la señal espacio-temporal de una línea de puntos paralela a uno de los lados y que pasa por el centro de la celda. Varias de estas señales pueden observarse en la Figura V.4. Los pulsos de onda viajan hacia el centro a velocidad esencialmente constante, y con dispersión prácticamente nula (nótese que su

origen espacial se hace evidente mediante la deformación que sufren las líneas verticales producidas por las imperfecciones del fondo). El origen de los frentes se aleja del centro a medida que el parámetro de control aumenta, y el contraste del frente respecto de su entorno, también se hace más pronunciado indicando un aumento en su amplitud. La transformada de Fourier bidimensional de esta señal para valores próximos al umbral, indica la presencia de un *único* modo espacio-temporal. Sin embargo, si continuamos aumentando la temperatura del calefactor, aparece un nuevo efecto sobre los pulsos. Ahora, éstos no llegan siempre a la misma posición espacial, sino que ésta cambia en el tiempo, y además, la amplitud de cada pulso también presenta esta modulación (Figura V.4.f).

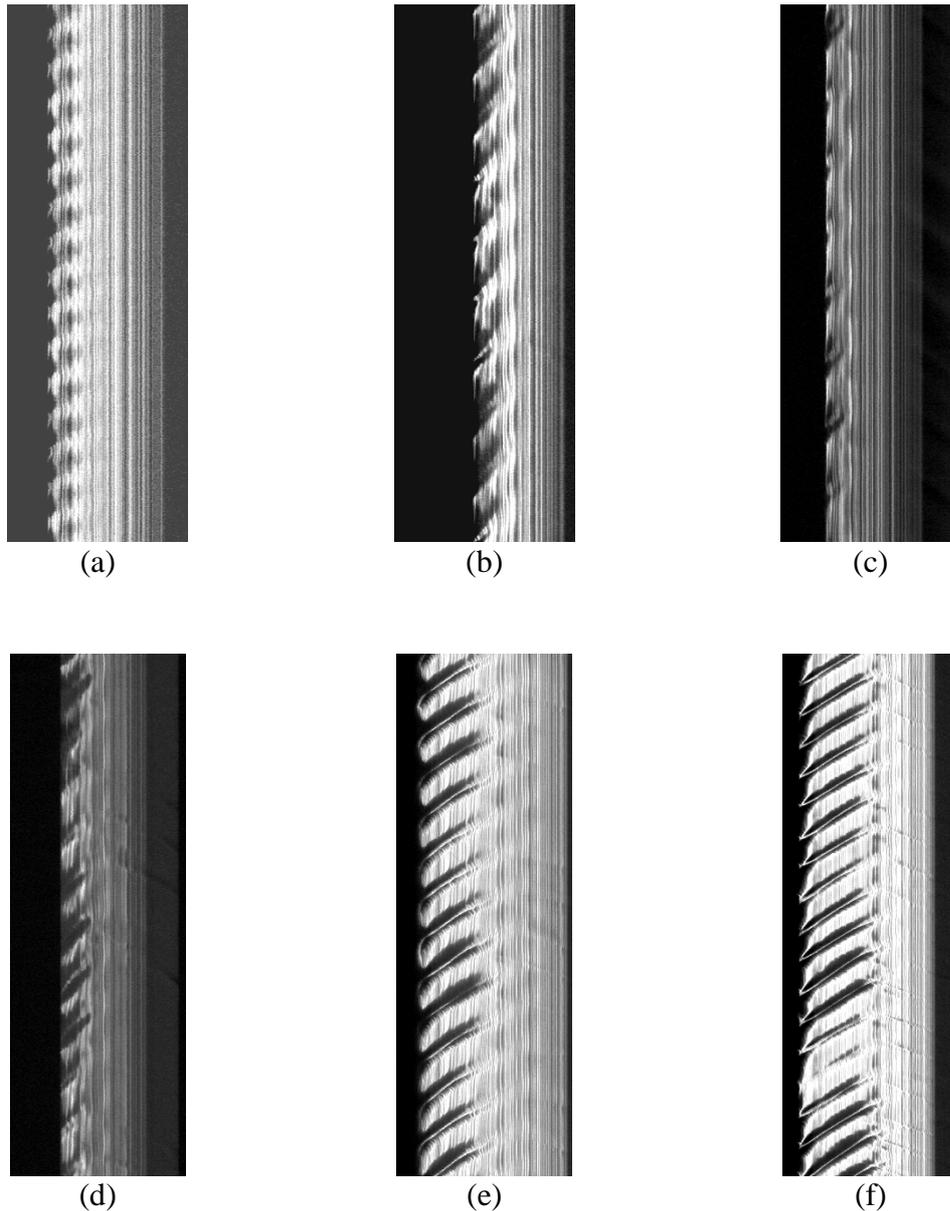


Figura V4 Representación espacio-temporal de los frentes en función del parámetro de control (a) $\varepsilon'=0.02$, (b) $\varepsilon'=0.14$, (c) $\varepsilon'=0.55$, (d) $\varepsilon'=0.87$, (e) $\varepsilon'=0.94$ y (f) $\varepsilon'=1.11$

El comienzo de esta modulación coincide con la región del espacio de parámetros donde la presencia de f_2 se hace dominante. Esta segunda frecuencia está directamente asociada a la modulación de los pulsos que dan origen a f_1 . En la Figura V.5, se aprecia que la amplitud de la inestabilidad que nace sobre la capa límite está modulada a medida que transcurre el tiempo.

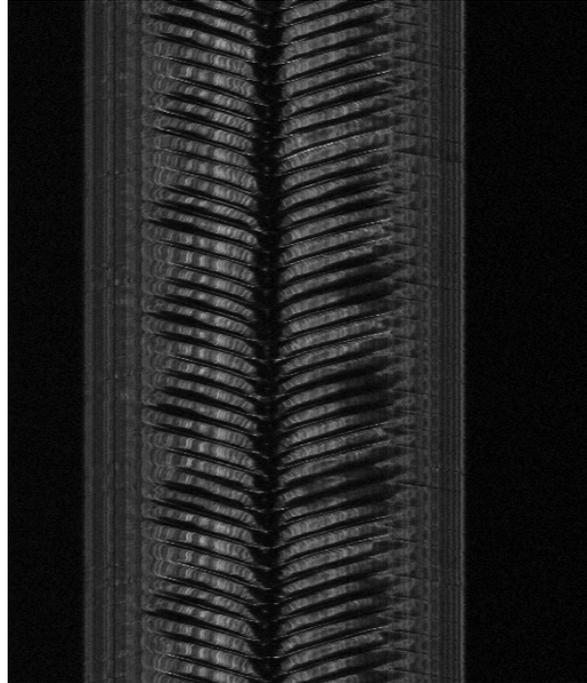


Figura V.5 Detalle de la señal espacio temporal donde se aprecia claramente la modulación de los frentes.

Las oscilaciones de temperatura asociada a estos frentes, se hallan sumergiendo un termopar a 15 mm del centro y determinando la temperatura cada 0.1 mm en las regiones próximas al fondo de la celda y cada 1 mm para distancias mayores de 30 mm. Verificamos, entonces, que los frentes están asociados al desarrollo de una región de fluido más caliente que es arrastrado por el flujo. Pudimos comprobar también que la raíz cuadrática media de las oscilaciones presenta un máximo a unos 2 mm del fondo, y su valor representa un 8% de la diferencia de temperatura a que está sometido el fluido (Figura V.6).

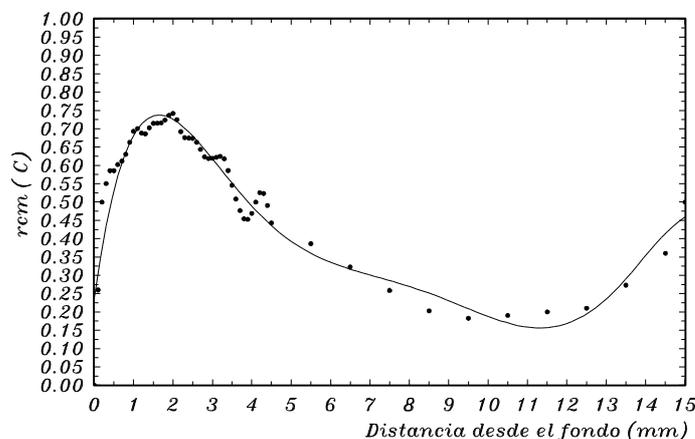


Figura V.6 Raíz cuadrática media de las oscilaciones de temperatura a diferentes profundidades.

Puesto que la hipótesis más plausible supone la desestabilización de la capa límite térmica, revisemos algunos trabajos sobre el origen e influencia de la capa de fluido adyacente a la superficie calefactora. Por su sencillez, el modelo propuesto por L. Howard [74] es, sin duda el más atrayente para una primera verificación experimental. Este modelo, bajo el supuesto fundamental de que la capa adyacente al calefactor se comporta como un medio esencialmente conductivo, asume que la energía que entrega el calefactor se almacena en la capa, hasta que una pequeña perturbación hace que se libere de forma abrupta. Luego, la capa térmica recupera su espesor original, y da comienzo un nuevo ciclo. Con este sencillo modelo Howard demuestra que:

$$\bar{T} = \Delta T \left[(1 + 2\xi^2) \cdot \operatorname{erfc}(\xi) - 2\pi^{-1/2} \xi \cdot e^{-\xi^2} \right] \quad (\text{Ec. V.1.a})$$

$$\text{Nu} = \frac{d}{\sqrt{\pi \kappa t_c}} = \frac{d}{\delta} = \left(\frac{Ra}{Ra_\delta} \right)^{1/3} \quad (\text{Ec. V.1.b})$$

$$\xi = \frac{z}{2\sqrt{\kappa t_c}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi z}}{\delta}, \quad \delta \equiv \sqrt{\pi \kappa t_c} \quad (\text{Ec. V.1.c})$$

donde t_c representa el tiempo que tarda en romperse la capa, T es el perfil de temperaturas promediado a lo largo de la coordenada espacial para este tiempo y δ el espesor de la capa límite térmica.

La principal dificultad de este modelo radica en la determinación de t_c . El propio Howard, utilizando argumentos "...correctos en espíritu..." (sic), considera este tiempo corresponde a aquel que tarda la capa límite térmica en alcanzar el valor crítico $Ra_\delta = 10^3$, justificando su elección en que de esta forma se consigue recuperar la relación $\text{Nu} = 0.1 Ra^{1/3}$. La otra conclusión importante de este modelo es que la raíz cuadrática media de las fluctuaciones de la temperatura alcanzan una magnitud de aproximadamente $0.091 \Delta T$. En otras palabras, la máxima amplitud de la rcm es del orden del 9% de la diferencia de temperatura a la que está sometida la capa límite.

Esta teoría fue utilizada por M. Dubois & P. Bergé [77] para explicar las oscilaciones *monoperiódicas* en un sistema tipo Bénard-Rayleigh. En sus cálculos estiman el espesor de la capa límite a partir de la ecuación Ec. V.1.c, tomando como tiempo crítico el de oscilación, observado por métodos ópticos. La coincidencia entre el espesor calculado y el observado por técnicas interferométricas es muy buena, por lo que responsabilizan a este mecanismo como origen de la oscilación.

Este modelo, ha sido sugerido como el responsable de las oscilaciones en nuestro sistema por H. Mancini [18], tomando también como tiempo crítico, el período de oscilación del planform y calculando a partir del él el espesor de la capa límite, y comparandolo con el espesor de la capa límite térmica obtenido a partir del perfil de velocidades medias.

Recordemos también los resultados discutidos en la sección **III.3** dedicada al transitorio de formación. La interpretación dada por Elder [45], coincide con la "imagen" desarrollada por Howard para justificar la rápida pérdida de energía una vez que se alcanza el tiempo crítico. Tal como sugiere el propio Elder, su desarrollo de la "protocapa" y el realizado por Howard serían análogos, de manera que el tiempo crítico de desarrollo de la pluma en transitorio de formación, debería coincidir, al menos en su orden de magnitud, con el tiempo característico t_c .

En nuestro experimento hemos podido verificar que efectivamente ocurre esto, pues el tiempo característico del transitorio de formación (ver Sec. III.3), coincide con el período de oscilación del régimen dependiente del tiempo. Recordemos que esa determinación fue realizada en la celda con paredes laterales de vidrio, de manera que para medir las oscilaciones, utilizamos un haz laser que atraviesa la celda justo por encima del calefactor. En la imagen de la Figura V.7, pueden verse las variaciones -prácticamente monoperiódicas- de la posición espacial de la “mancha” (spot) proyectada sobre una pantalla lejana. Estas oscilaciones desaparecen cuando el rayo se aleja del calefactor, indicando que su origen está localizado dentro de una capa de fluido muy próxima a éste.

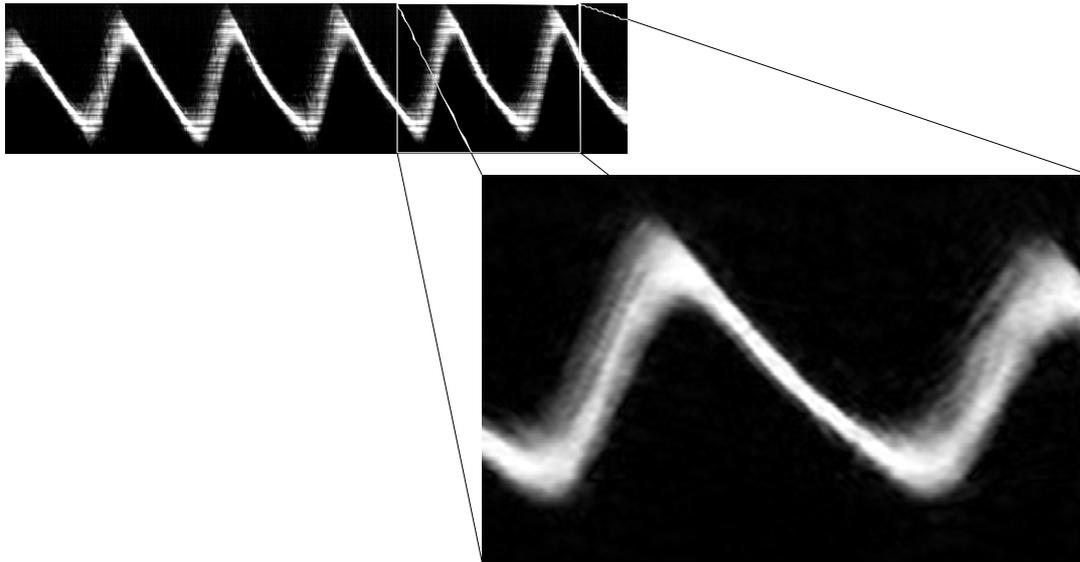


Figura V.7 Variación periódica de la posición de un haz de luz que atraviesa la capa límite.

Otro detalle interesante de la Figura V.7 es la modulación que sufre el espesor del trazo generado por el laser. Esta modulación, muestra el efecto de lente térmica en el seno del fluido, pues cuando la señal “cae”, el trazo se estrecha indicando que la “lente térmica” tiene un efecto convergente, mientras que cuando “sube” el trazo se ensancha como si estuviera atravesando una lente divergente.

Las oscilaciones asociadas por M. Dubois & P. Bergé al mecanismo de Howard, no corresponden a la formación de estructuras localizadas como las plumas, sino a la oscilación de la capa límite en su conjunto. La observación de los frentes de la Figura V.3 no es suficiente para decidir si este fenómeno se desarrolla en forma de inestabilidades *dentro* de la propia capa y es arrastrado hasta el centro de la celda, o bien, si se trata de plumas que se desprenden abruptamente de ella.

Para observar este mecanismo, inyectamos pequeñas gotas de silicona coloreada, justo en las afueras del calefactor. Estas gotas, son rápidamente arrastradas por el flujo principal y describen con precisión las líneas de flujo en un plano perpendicular a la superficie calefactora. Su forma depende de la proximidad al fondo con que son inyectados; cuando se colocan casi tocando el calefactor, no resultan afectadas hasta llegar al centro de simetría. Sin embargo, cuando se inyectan entre 1 y 2 mm por encima de la superficie, describen claramente la aparición de plumas térmicas (Figura V.8).

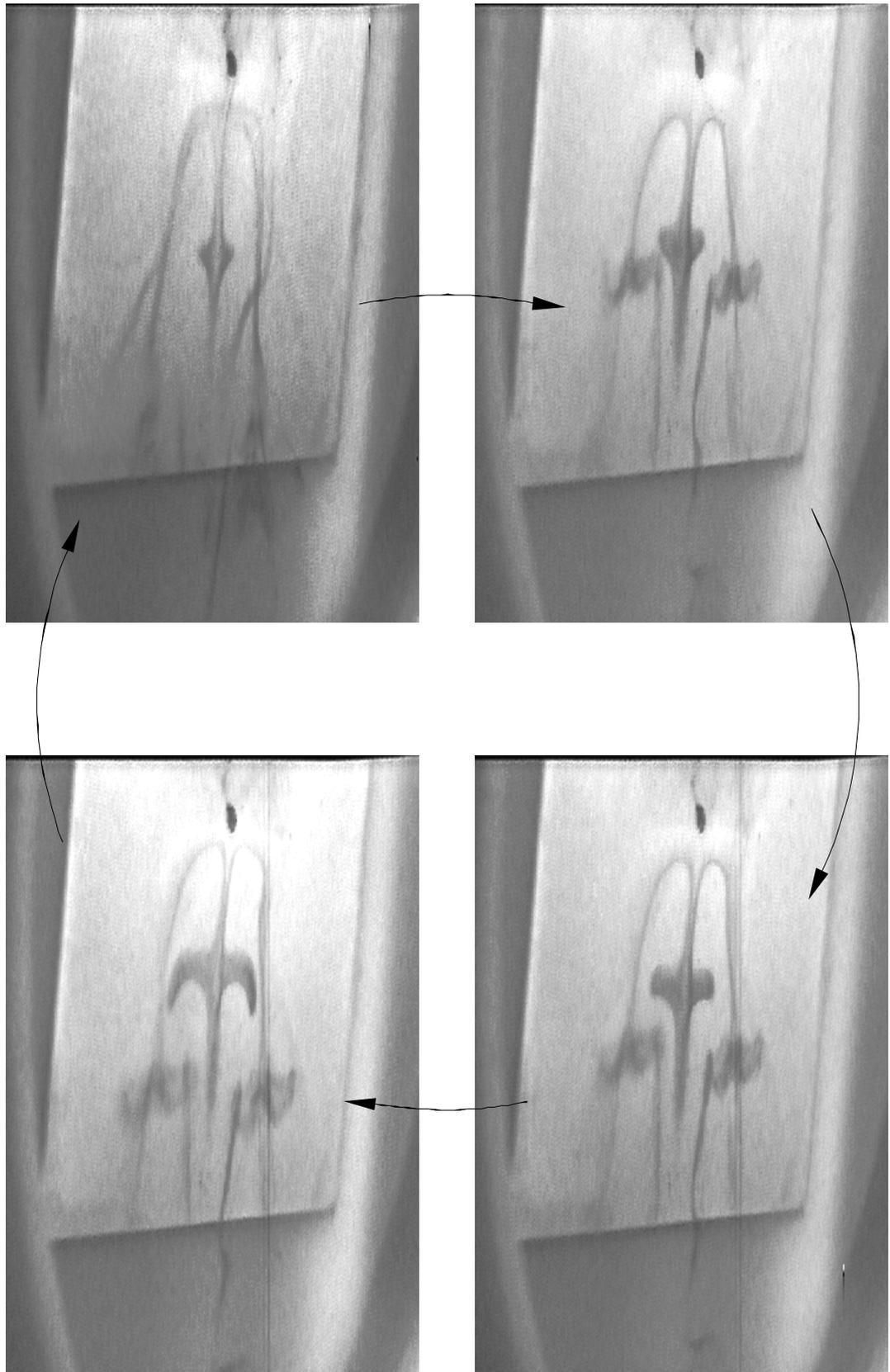


Figura 1.8 Desarrollo de plumas térmicas en el sistema con calentamiento inhomogeneo.

Una forma alternativa de observar el desarrollo y estructura de estas plumas, consiste en utilizar la celda con paredes laterales de vidrio, sembrando el fluido con una pequeña cantidad de aluminio para visualizar las líneas de flujo. Las imágenes resultantes se encuentran en la Figura V.9

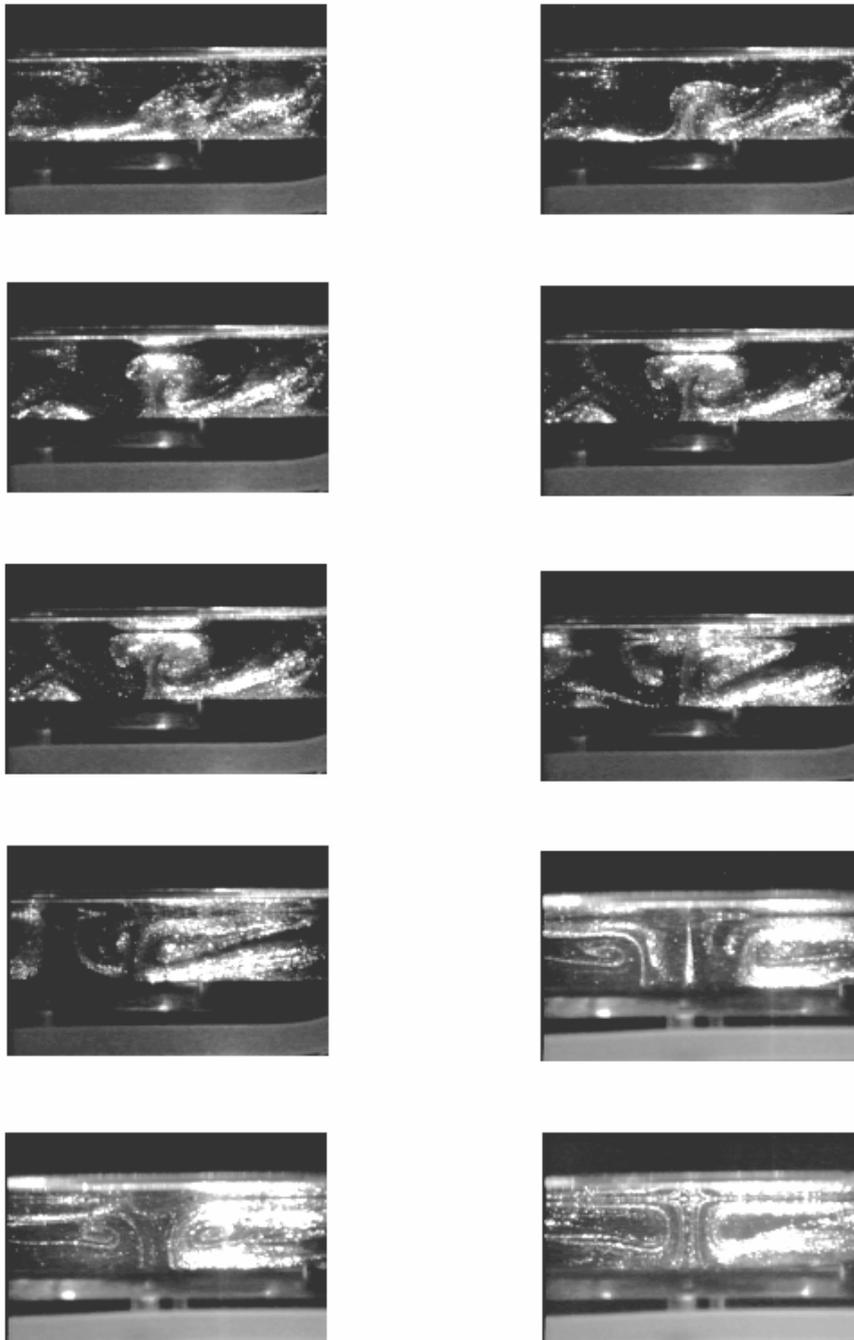


Figura V.9 Desarrollo de las plumas térmicas con calentamiento inhomogéneo.

En estas imágenes, pueden apreciarse las plumas desarrollándose en las proximidades del centro de la celda, “rompiendo” la capa límite antes de llegar a él. La “burbuja” de líquido caliente que asciende, llega rápidamente a la superficie. Estas secuencias corresponden a la región donde el planform de la superficie pierde totalmente su correlación espacial.

Además de estas observaciones, debemos hacer notar que la rcm de las oscilaciones de temperatura (Figura IV.6), tienen un valor máximo que representa aproximadamente el 8% de la diferencia de temperatura en la capa límite, valor que está muy próximo al 9.1% predicho por las Ecs. (V.1).

Una observación cuidadosa del desarrollo de estas plumas nos permite interpretar también el origen de las otras dos frecuencias presentes en el sistema.

La primera de ellas, f_2 , tiene su origen en el acoplamiento entre la generación de las plumas y el flujo de base en el sistema antes de su desarrollo. El flujo sobre la superficie donde se desarrolla la inestabilidad no altera en esencia la generación de estas estructuras, pero afecta, sin duda, los tiempos característicos de su desarrollo.

No resulta sencillo poder descifrar la manera en que el flujo perturba el modelo de Howard, pero sí hemos podido verificar que una de sus hipótesis no es aplicable. En efecto, este autor sostiene que el tiempo que tarda en desarrollarse y desprenderse la pluma es nulo comparado con el tiempo crítico t_c . En el experimento, esto no ocurre, pues la pluma permanece ligada a la capa límite a través de una vena fluida (el “tallo” del “hongo”) desde que nace, y nunca llega a cortarse hasta que es atrapada por el líquido que asciende en el centro de la celda. Así pues, la recuperación de la capa límite para que pueda desarrollarse una nueva pluma no es *instantánea*. En las proximidades del umbral, las plumas no alcanzan la superficie antes de llegar al centro de la celda; cuando nos alejamos del umbral, en cambio, sí llegan a la superficie, e incluso una nueva pluma ya está desarrollándose en las cercanías de la primera antes que ésta desaparezca,.

Se ha sugerido la posibilidad [18], de que esta segunda frecuencia esté asociada al tiempo característico que tarda el fluido en recorrer toda la celda convectiva, lo que equivaldría al primer mecanismo comentado al comienzo de esta sección. Para verificar esta hipótesis, colocamos un anillo de metacrilato en el interior de la celda, para modificar su relación de aspecto. Si f_2 depende del flujo en la celda, esta frecuencia debería verse alterada con las nuevas paredes. Sin embargo, el espectro de potencias de la Figura V.10 demuestra que esto no sucede, pues la única frecuencia que resulta alterada es f_1 , que como hemos visto, está generada por las plumas y no por el flujo.

Descartada esta hipótesis, la segunda posibilidad implicaría una modulación periódica de la capa límite, como la observada por M. Dubois & P. Bergé. Esta ha sido discutida también en trabajos teóricos que destacan la importancia de la capa límite como medio de acoplamiento entre las diferentes estructuras localizadas en las celdas [75] [76]. Aunque no contamos con argumentos concluyentes para inclinarnos por ella, creemos que es una buena aproximación de lo que realmente ocurre. El hecho de que la velocidad de desprendimiento de las plumas sea finita, y que se observe en ocasiones una nueva pluma antes de que la anterior haya desaparecido totalmente, sostienen nuestra afirmación.

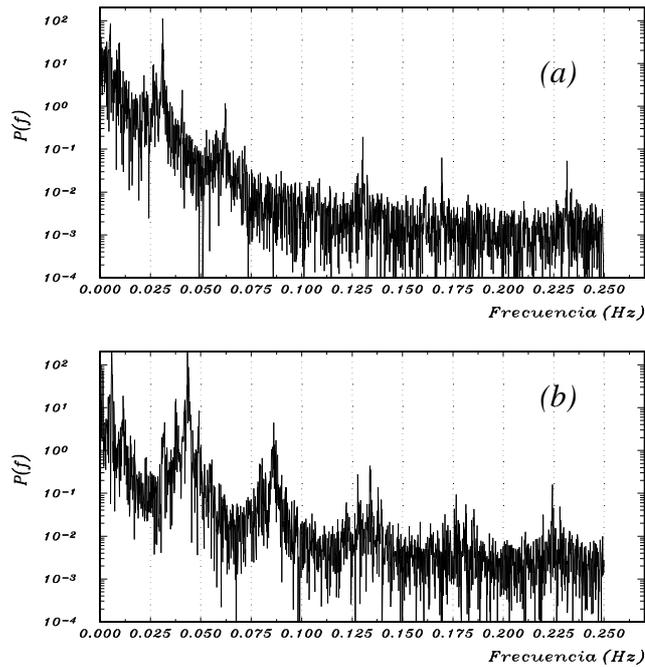


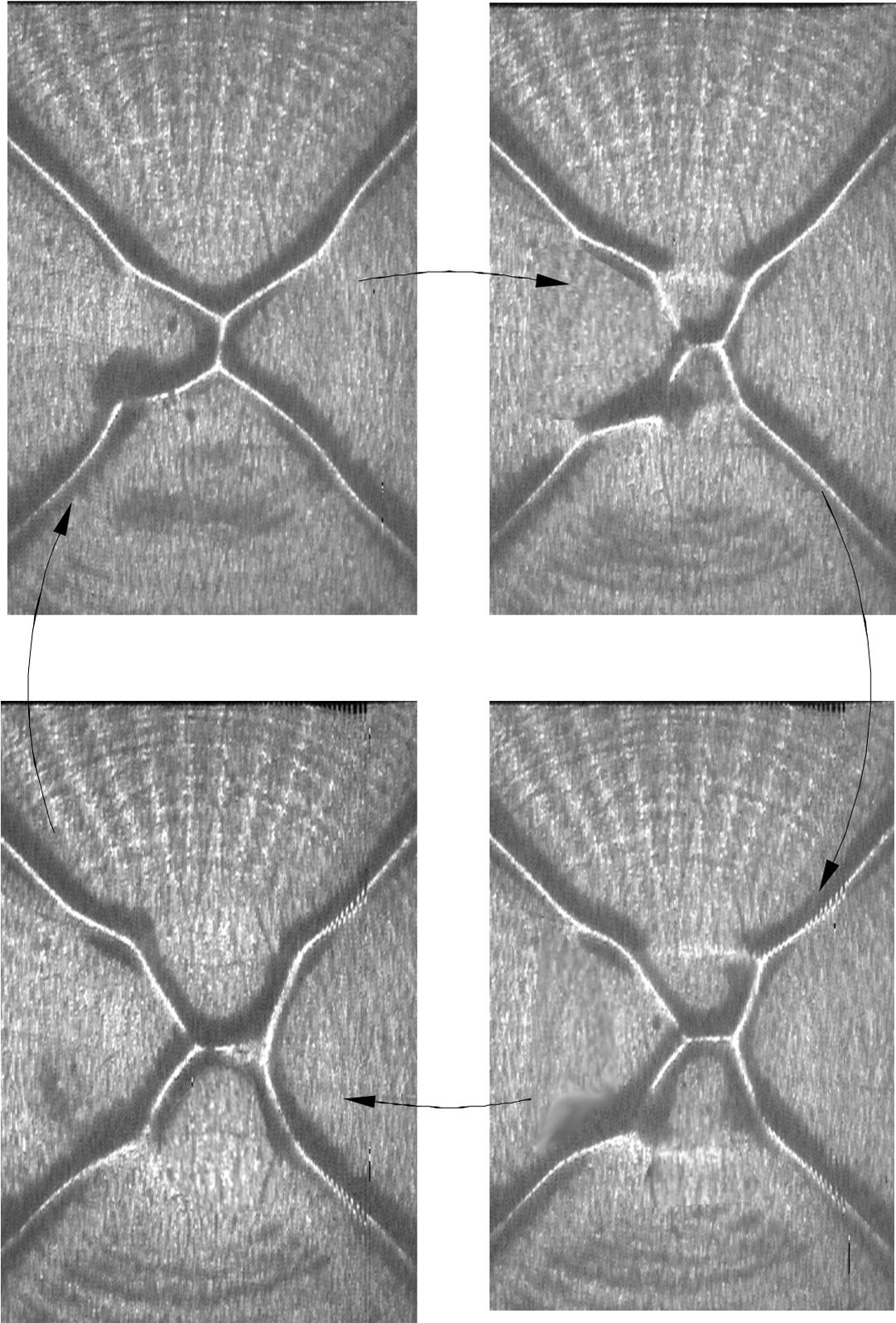
Figura V.10 Espectro de potencias para dos relaciones de aspecto diferentes (a) 2.66 y (b) 4.5.

La tercera frecuencia f_3 , tiene un origen claramente verificable en las imágenes laterales del sistema. Ya comentamos que la energía asociada a este oscilador debía ser muy pequeña comparada con los restantes. Cuando una pluma, arrastrada por el flujo, llega al centro de simetría, la velocidad vertical en su interior es mucho mayor que el valor medio del flujo en esa misma dirección. De esa manera, el líquido que asciende por la pluma origina un remolino en las proximidades del centro (ver Fig. III.18.b) cuyo período característico coincide exactamente con la inversa de f_3 .

Una vez discutido el mecanismo físico de cada uno de los osciladores, podemos interpretar las causas de la complejidad espacial que presenta el planform, a partir del efecto que tienen las plumas sobre la deformación de la superficie. Para valores próximos al umbral de aparición del régimen dependiente del tiempo, ninguna de estas estructuras se desarrolla lo suficiente como para perturbar la superficie libre. Sin embargo, a medida que la temperatura del calefactor crece, las plumas crecen tan rápidamente que "colisionan" con la superficie antes de ser absorbidas por flujo básico, de manera que la deforman.

Retomando entonces la idea inicial sobre la similitud del comportamiento en los sistemas convectivos estudiados, podemos afirmar que el origen del comportamiento temporal es análogo en los dos casos. La inestabilidad de la capa límite, y el desarrollo de las plumas térmicas, son los responsables del comportamiento temporal de las oscilaciones de temperatura. Por otra parte, una posible diferencia en la fase de estos osciladores, podría ser la causante del comportamiento espacio-temporal de la línea central del planform en la celda A. Esta afirmación, puede ser *cuantitativamente* contrastada en la secuencia de imágenes presentadas a continuación, que corresponden al fondo de la celda B, pero con paredes de metacrilato que coinciden con el área del calefactor. En ellas se pone de manifiesto cómo los frentes de la inestabilidad pueden arribar al centro de simetría, generado un trazo central cuyo comportamiento recuerda al observado en la celda A.

Figura V.9. Diferencias de fase entre los frentes de inestabilidad



Se requiere sin duda un estudio más detallado para determinar exactamente si se trata de una inestabilidad de fase. Sin embargo, los datos anteriores parecen ser una buena indicación de ello.

CONCLUSIONES

Finalizaremos este trabajo, con una breve recapitulación de las principales conclusiones a las que hemos llegado.

Nuestros experimentos, han centrado su atención en el estudio de sistemas tipo Bénard Marangoni, con baja relación de aspecto. En el primero de ellos (celda A), hemos verificado como la forma de la estructura convectiva es compatible con los modos propuestos por la teoría; resultando llamativo el grado de acuerdo que existe en los movimientos predichos por una suma de cosenos, y los determinados experimentalmente. Hemos verificado también, la relación que existe entre la información obtenida a través del planform, con la temperatura en el interior de las celdas convectivas, y cómo esta magnitud nos permite estudiar las propiedades de simetría del sistema, y su comportamiento dinámico.

Detectamos la presencia de un atractor extraño justo sobre el umbral de aparición del régimen dependiente del tiempo, y utilizamos los métodos topológicos para caracterizar la señal temporal de la temperatura, cuyos resultados están en un total acuerdo con los resultados obtenidos a partir del planform.

En el experimento sin paredes laterales, determinamos la forma del flujo y su relación con la deformación de la superficie. Comprobamos cómo la aparición del régimen dependiente del tiempo en el seno del fluido, trae aparejada la desestabilización de la superficie, sobre la que comienzan a viajar *pulsos de onda*, acoplados al flujo principal. Comprobamos que éstos están asociados al comportamiento difusivo de una región de fluido más caliente, que deforma la superficie a la vez que se desplaza en sus proximidades.

Determinamos que el régimen dependiente del tiempo próximo al umbral, es cuasiperiódico. Este régimen está compuesto por *tres frecuencias* y hemos comprobado su estabilidad para una región del espacio de parámetros, por encima de la cual el sistema se vuelve caótico. De estas tres frecuencias, solo *dos* son detectables a través de la temperatura de la superficie, de manera que ésta se comporta como un filtro

pasablanda, dejando pasar solo aquellas variaciones temporales cuyo período esté por encima de los 10 segundos.

Cada una de estas tres frecuencias, se relaciona con la diferencia de temperatura mediante una ley de potencias, pero con exponentes diferentes entre sí. No hemos observado que existan regiones en el espacio de parámetros donde éstas se sincronicen.

Estudiamos el origen de los comportamientos temporales de ambos sistemas, vinculándolos a la desestabilización de la *capa límite térmica*. Mostramos que para la celda B, el origen cada una de las frecuencias está asociado a diferentes clases de inestabilidad: 1) la ruptura de la capa límite formando estructuras localizadas como las plumas térmicas, 2) la desestabilización de toda la capa en su conjunto, cuya *altura media* también es una función del tiempo y 3) la desestabilización del flujo de base en forma de *remolinos* en las proximidades del centro del calefactor.

Aunque para la celda A no observamos con precisión este tipo de comportamientos, parece posible que el comportamiento de la línea central del planform esté asociado a una *diferencia de fase*, entre los diferentes frentes que viajan por la capa límite del sistema.

Todos estos ítems, son si duda una pequeña parte de la colosal tarea que implica comprender los fenómenos convectivos, y son muchas las incógnitas que aún nos plantean. Sin embargo, son estas incógnitas la que hacen de este trabajo un desafío apasionante.-

REFERENCIAS

- [1] H. Bénard, *Rev. Gen. Sciences Pures & Appl.* **11**, (1900) 1261.
- [2] H. Bénard, *Ann. Chim. Phys.* **23** (1901) 62.
- [3] L. Rayleigh, *Phil. Mag.* **32**, (1916) 529.
- [4] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, (1963) 130.
- [5] D. A. Nield, *J. Fluid Mech.* **19**, (1964) 341.
- [6] F.H. Busse, *Rep. Prog. Phys.* **41** (1978) 1929.
- [7] R. Krishnamurti, *Part I & II, J. Fluid Mech.* **42**, (1970) 295, 309.
- [8] D. Ruelle & F. Takens, *Commun. Math. Phys.* **20**, (1971) 167.
- [9] H. Bai Lin, "*Chaos II*", World Scientific Eds. (1990).
- [10] A. Libchaber & J. Maurer, *J. Phys. (Paris)* **41**, (1980) C3-51.
- [11] M. Dubois, P. Bergé & V. Croquette, *J. Phys. (Paris) Lett.* **43**, (1982) L295.
- [12] S. Newhouse, D. Ruelle & F. Takens, *Commun. Math. Phys.* **64**, (1978) 35.
- [13] J.H. Curry & J.A. Yorke, *Springer Notes in Math.* **668**, Springer Verlag (1977), 48.
- [14] P. Bergé, M. Dubois, M. Maneville & Y. Pomeau, *J. Phys. (Paris) Lett.* **41**, (1980) L344.
- [15] M. Dubois, M.A. Rubio, P. Bergé, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1446.
- [16] H.L. Swinney & J.P. Gollub, *Phys. Today* **31 (8)** (1978).
- [17] G. Ahlers & R.P. Behringer, *Phys. Rev. Lett.* **40**, (1978) 712.
- [18] H. Mancini, *Tesis Doctoral*, Universidad de Navarra, (1994).
- [19] P. Dauby & G. Lebon, (1994)(preprint).
- [20] P. Freymuth, *Rev. Sci Instrum.* **64**, (1993) 1.
- [21] W. Merzkirch, "*Flow Visualization*" 2nd Edition, Academic Press (1987).

-
- [22] P. Kolodner & H. Williams, *Nonlinear Evolution of Spatio-Temporal Structures in Dissipative Convection System*, F.H. Busse & L. Kramer Eds. Plenum Press (1990).
- [23] V. Croquette, *Contemporary Phys.* **30**, (1989) 113.
- [24] D. Malacara Ed. "*Optical Shop Testing*", J. Willwy & Sons (1977).
- [25] M. Delfiner, E. Izaguirre & H.L. Mancini, *Asociación Física Argentina*, La Cumbre, Córdoba (1986).
- [26] P. Bergé & M. Dubois, *Contemporary Phys.* **25**, (1984) 535.
- [27] L. Michalski, K. Eckersdorf & J. McGhee, "*Temperature Measurement*", J. Wiley & Sons Eds. (1991).
- [28] E. L. Koschmider, "*Bénard Cells and Taylor Vortices*", Cambridge University Press 1993.
- [29] P. Dauby, G. Lebon, P. Colinet & J. Legros preprint (1993).
- [30] W.J.Minkowycz, E.M.Sparrow, G.E.Schneider & R.H. Pletcher, *Handbook of Numerical Heat Transfer*, John Wiley & Sons. (1988).
- [31] T. Ondarçuhu, G. Mindlin, H. Mancini & C. Pérez García, *Phys. Rev. Lett.* **70**, (1993) 3892.
- [32] T. Ondarçuhu, G. Mindlin, H. Mancini & C. Pérez García, *J Phys. (Paris)* **6**, (1994), A427.
- [33] D. Krmpotic, G. Mindlin & C. Pérez García, preprint (1995).
- [34] B. Mindlin, Comunicación privada.
- [35] J. Wesfreid, P. Bergé & M. Dubois, *Phys. Rev. A* **19**, (1979) 1231.
- [36] A. Gaponov-Grekhov & M. Rabinovich, "*Nonlinearities in Action*", Springer Verlag. (1992).
- [37] A. Ezerskii, A. Garcimartín, J. Burguete, H. Mancini & C. Pérez García, *Phys Rev. E* **47**, (1993) 1126.
- [38] A. Ezerskii, A. Garcimartín, H. Mancini & C. Pérez García, *Phys. rev. Lett.* **48** (1993) 4414.
- [39] E. Guyon, J.P. Hulin & L. Petit, "*Hydrodynamique physique*", Inter Editions/Editions du CNRS, (1991).
- [40] D. Villers & J. Platten, *PCH PhysicoChem. Hydrodyn.* **8**, (1987) 173.
- [41] A. Garcimartín, *Tesis Doctoral*, Universidad de Navarra, (1994).
- [42] G. Gershuni, P. Laure, V. Miznikov, B Roux & E Zhukhovitsky, *Microgravity Q* **2** (1992) 142.

- [43] R. Behringer & G. Ahelers, *J. Fluid Mech.* **125**, (1982) 219.
- [44] G. Ahlers, P. Hohenberg & M. Lücke, *Phys. Rev. A* **32**, (1985) 3519.
- [45] J. Elder, *J. Fluid Mech.* **32**, (1968) 69.
- [46] A. Townsend, *J. Fluid Mech.* **5**, (1959) 209.
- [47] G. Willis & J. Deardorff, *Phys. Fluids* **8**, (1965) 2225.
- [48] G. Willis & Deardorff, *J. Fluid Mech.* **54**, (1970) 661.
- [49] F. Busse, "*Hydrodynamic Inestabilities and the trasnsition to Turbulence*", H. Swinney & P. Gollub Eds. Springer Verlag (1981) 97.
- [50] F. Busse & E. Bolton, *J. Fluid Mech.* **146**, (1984) 115.
- [51] S. Ciliberto & N. Simonelli, *Europhys. Lett.* **2**, (1986) 285.
- [52] G. Ahlers, *Phys Rev. Lett.* **33**, (1974) 1185.
- [53] J. Gollub & S. Benson, *J. de Phys. Lett. (Paris)* **40**, (1978) 948.
- [54] B. Malraison, P. Atten, P. Bergé & M. Dubois, *J. Phys. Lett. (Paris)* **44**, (1983) L897.
- [55] J. Glazier & A. Libchaber, *IEEE Transactions of Circuits and System* **35**, (1988) 790.
- [56] H. Greenside, G. Ahlers, P Hohenberg & R. Walden, *Physica D* **5**, (1982) 322.
- [57] M. Cross & P. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, (1993) 851.
- [58] B. Mindlin & R. Gilmore, *Physica D* **58**, (1992) 229.
- [59] H. Mancini, D. Maza, C. Pérez García, M. Huerta & G. Mindlin, preprint (1995).
- [60] B. Mindlin & H. Solari, preprint (1994).
- [61] F. Takens, *Lectures Notes in Math.* **898**, Springer, Heindelberg-New-York. (1981).
- [62] P. Grassberger & I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **50**, (1983) 346.
- [63] M. Jensen P. Bak & T. Bohr, *Phys. Rev. A* **30**, (1984) 1960.
- [64]. P. Bergé, *Physica Scripta* **T1**, (1982) 71.
- [65] C. Grebogi, E. Ott & J. Yorke, *Physica D* **15**, (1985) 354.
- [66] J. Gollub & S. Benson, *J. Fluid Mech.* **100**, (1980) 449.
- [67] S. Linsay & W Cumming, *Physica D* **40**, (1989) 196.
- [68] F. Moon, "*Chaotic and Fractal Dynamics*", J. Wiley & Sons Eds. (1992).
- [69] J. Gollub & S. Benson, "*Pattern Formation and Pattern Recognition*", H. Haken Ed. Springer- Heilderber-New York (1979).
- [70] H. Schuster, "*Deterministic Chaos. An Introduction*", Physik-Verlag (1984).
- [71] M Smith, *Phys. Fluids* **29**, (1986) 3182.

- [72] E. Brigham, *"The Fast Fourier Transform and its Applications"*, Prentice Hall Eds. (1988).
- [73] C. Normand, Y. Pomeau & M. G. Velarde, *Rev. of Mod. Phys.* **49**, (1977) 581.
- [74] L.N. Howard, *J. Fluid Mech.* **73**, (1963) 405.
- [75] T. Lennie, D. Mc Kenzie, D. Moore & N. Weiss, *J. Fluid Mech.* **188**, (1988) 47.
- [76] M. Graham & P. Steen, *J. Fluid Mech.* **272**, (1994) 67.
- [77] M. Dubois & P. Bergé, *J. Physique* **42**, (1981) 167.
- [78] S. Rosenblat, G. Homsy & S. Davis, *J. Fluid Mech.* **120**, (1982) 123.
- [79] S. Rosenblat, S. Davis & G. Homsy, *J Fluid Mech.* **215**, (1990) 215.
- [80] J.K. Platten, J.C. Legros, *"Convection in Liquids"*, Springer-Verlag (1984).